

Н.Л. КАЗАРЯН, В.В. ГЕВОРГЯН

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО ПЛОСКИХ ИНВЕРСИЙ
ОТНОСИТЕЛЬНО СЕЧЕНИЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ВРАЩЕНИЯ

Излагается метод пространственного преобразования, основанного на множестве плоских инверсий, индуцируемых расслоением 3D пространства на однопараметрическое множество плоскостей, перпендикулярных заданной прямой J . Описываются результаты исследования образов, полученных погружением некоторой прямой в пространство преобразования. Рассмотрены случаи частного и общего расположения прямой - образа относительно элементов определителя преобразования. Выведены аналитическая формула преобразования и аналитические выражения линий - образов, полученных в процессе преобразования. Разработан пакет прикладных программ, осуществляющий данное преобразование и выводящий результаты в виде графических моделей-рисунков и чертежей.

Ключевые слова: нелинейное преобразование, плоская инверсия, кубическое преобразование, кривые третьего порядка.

Преобразование 3D пространства на основе однопараметрических множеств плоских инверсий (ОПИ) задается линией L - множеством центров окружностей инверсии, лежащих в ∞^1 плоскостей Ω_i , линией J , точки пересечения которых с плоскостями Ω_i определяют радиусы окружностей инверсий [1-2].

Рассмотрим случай, когда линии L и J суть две пересекающиеся прямые. Тогда преобразование 3D пространства осуществится относительно конической поверхности. Назовем его преобразованием однопараметрического множества

плоских инверсий относительно конической поверхности (ОПИ.КП). Оно задается прямой J и величиной угла α между прямыми L и J .

Примем ось J конической поверхности совпадающей с осью Z , а вершину поверхности совместим с началом O прямоугольных координат (рис. 1).

Через произвольную точку A_i пространства проходит единственная плоскость Ω_i , перпендикулярная оси J и пересекающая ее в точке O_i [1]. Линией пересечения конической поверхности и плоскости Ω_i является окружность c_i с радиусом R_i и с центром в точке O_i . Преобразование в плоскости Ω_i осуществляется относительно окружности c_i ,

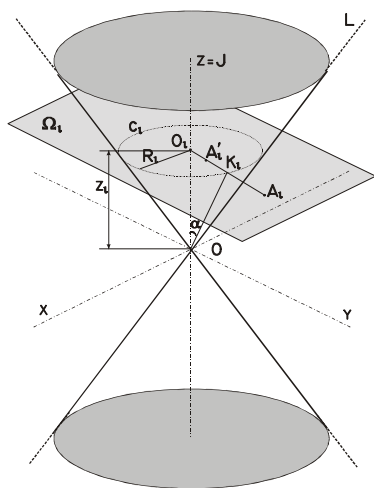


Рис. 1

которая и является окружностью инверсии. Тогда точка A_i преобразуется в точку A' так, что $O_i A_i \cdot O_i A'_i = R_i^2$.

В каждой плоскости Ω_i сохраняются все свойства инверсии.

В отличие от преобразования ОПИ.ЦП [1], где радиус R_i инверсии – постоянная величина, в преобразовании ОПИ.КП R_i есть функция от величины угла α и координаты z .

Отрезок $O_i A_i$ пересекает коническую поверхность в точке K_i . Из прямоугольного треугольника $\Delta O O_i K_i$ имеем

$$O_i K_i / O_i O = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

где $O_i K_i$ – радиус R_i окружности σ_i ; $O_i O$ – координата z_i плоскости Ω_i .

Следовательно,

$$R_i = z_i \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Подставив значение R из (2) в формулу преобразования ОПИ.ЦП [1]:

$$x' = \frac{x R^2}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y R^2}{x^2 + y^2}, \quad z' = z, \quad (3)$$

получим формулу преобразования ОПИ.КП:

$$x' = \frac{x z^2}{x^2 + y^2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad y' = \frac{y z^2}{x^2 + y^2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad z' = z. \quad (4)$$

Из определения преобразования следует, что преобразование ОПИ.КП является точечным, непрерывным, взаимно-однозначным, т.е. сохраняет размерность фигур.

Рассмотрим преобразование прямой в ОПИ.КП. Как и при преобразовании ОПИ.ЦП, геометрическая форма и положение образа в 3D зависит от взаимного положения прообраза и оси J .

Прямые, подлежащие преобразованию, классифицируем следующим образом:

- 1) прямая параллельна оси J ;
- 2) прямая пересекает ось J ;
- 3) прямая и ось J скрещивающиеся.

1. Прямая m параллельна оси J (рис. 2) и определена системой уравнений

$$\begin{cases} x = c, \\ y = d. \end{cases} \quad (5)$$

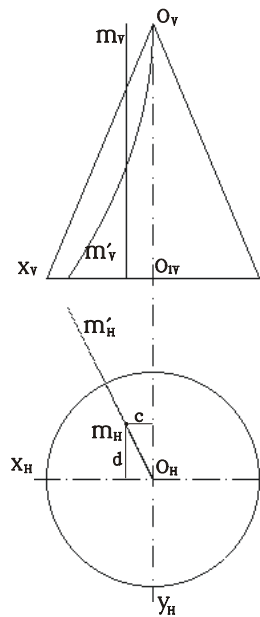


Рис. 2

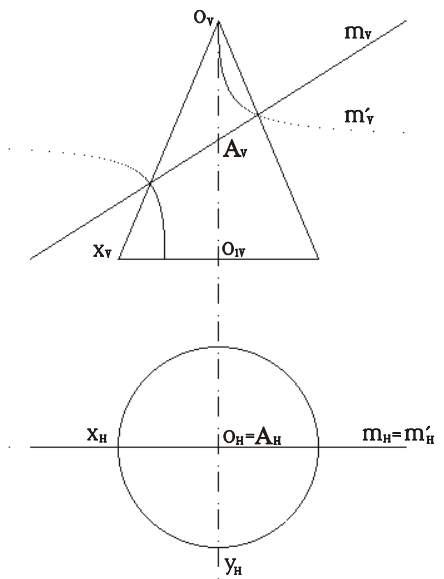


Рис. 3

Подставляя формулы преобразования (4) в (5), получим аналитическое выражение линии m :

$$\begin{cases} x' = \frac{z'^2 c}{c^2 + d^2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ y' = \frac{z'^2 d}{c^2 + d^2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \end{cases} \quad (6)$$

которая представляет собой параболу с вершиной в точке O (начало координат) и с осью симметрии $\begin{cases} x = cy/d, \\ z = 0. \end{cases}$

Ось симметрии параболы принадлежит плоскости (xoy) и пересекает ось J в точке O .

2. Прямая m пересекает ось J под углом, отличным от 90° (рис.3), и определена системой уравнений

$$\begin{cases} z = ax + c, \\ y = bx. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя формулы преобразования (4) в (7), получим аналитическое выражение линии m' :

$$\begin{cases} x' = \frac{az'^2}{(z'-c)(1+b^2)} \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ y' = bx', \end{cases} \quad (8)$$

которая представляет собой кривую второго порядка – гиперболу, лежащую в плоскости $y=bx$.

Если прямая m

$$\begin{cases} z = ax, \\ y = bx \end{cases} \quad (9)$$

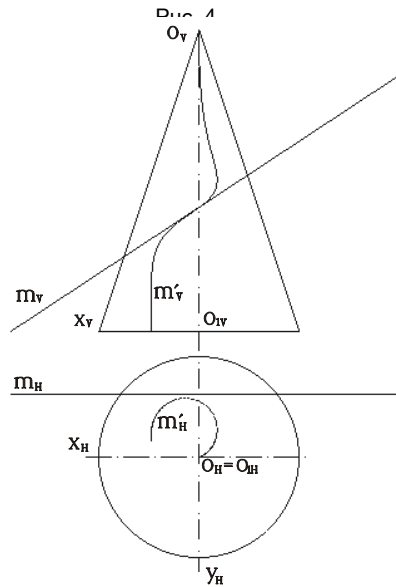
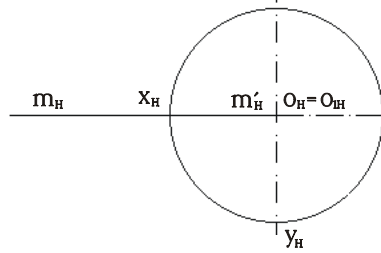
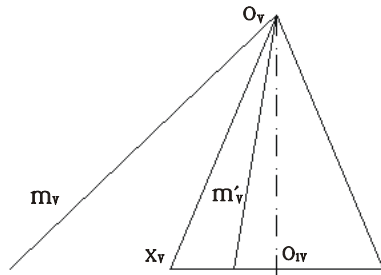


Рис. 5

пересекает ось J в точке O вершины конической поверхности (рис. 4), то ее образом является прямая m' , определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} x' = \frac{z' a}{1 + b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ y' = bx'. \end{cases} \quad (10)$$

В частном случае, если прямая m пересекает ось J под углом 90° в точке, отличной от O , или совпадает с одной из образующей конической поверхности, то ее образом является прямая m' , совпадающая с прообразом m (это свойство характерно и для преобразования ОПИ.ЦП [1]).

3. Прямая m образует с осью J пару скрещивающихся прямых (рис.5) и определена системой уравнений

$$\begin{cases} z = ax + c, \\ y = bx + d. \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя формулы преобразования (4) в (11), получим аналитическое выражение линии m' :

$$\begin{cases} x' = \frac{z'^2 (z' - c)}{(z' - c)^2 (1 + b^2) + 2abd(z' - c) + a^2 d^2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ x'^2 + y'^2 = \frac{z'^2 (y' - x' b)}{d} \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

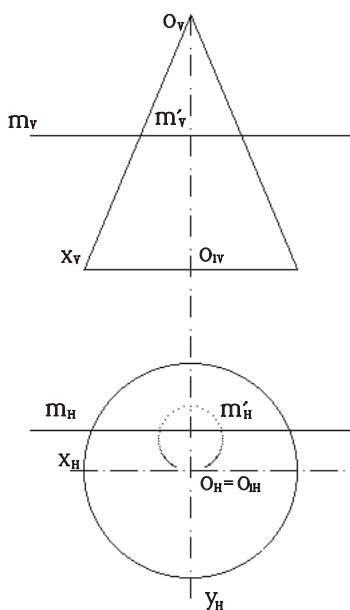


Рис. 6

Линия m' представляет собой пространственную кривую третьего порядка.

В частном случае, если прямая m перпендикулярна оси J (рис.6), ее образом является окружность m' , плоскость которой перпендикулярна оси J .

Таким образом, в преобразовании ОПИ.КП прямая в общем случае преобразуется в пространственную кривую третьего порядка, пересекающую ось J в вершине конической поверхности.

Разработан пакет прикладных программ, работающий в среде Microsoft Windows`98. Результаты работы пакета использованы в исследовании образов прямых в ОПИ.КП, а также при получении чертежей, представленных в настоящей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Казарян Н. Л.** Нелинейное преобразование пространства ОПИ.ЦП применительно к моделированию геометрических форм // Информационные технологии и управление // ИА Армении. - 1999. - № 2. - С. 102-113.
2. **Казарян Н. Л.** Моделирование циклических поверхностей на основе нелинейного преобразования пространства ОПИ.ЦП // Ежеквартальный реферативный сборник.-2000. - № 1. - Деп. в АрмНИИНТИ, № 13 - Ар00.
3. **Казарян Н. Л., Степанян А. Н., Арамян Л. М.** Нелинейное преобразование пространства как множество однопараметрических инверсий // Ежеквартальный реферативный сборник.-1999. - № 4. - Деп. в АрмНИИНТИ, № 66 - Ар99.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 12.04.2001.

Ն. Լ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

**ՊՏՏՄԱՆ ԿՈՆԱԿԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՀԱՏՈՒՅԹՆԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՍԲ ՀԱՐԹ
ԻՆՎԵՐՍԻԱՆԵՐԻ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆ**

Ներկայացված է առաջադրված J ուղղին ուղղահայաց հարթությունների միապարամետրական բազմությամբ շերտավորվող 3D տարածության ձևափոխություն, որն առաջանում է բազմության ամեն մի հարթության մեջ կոնական մակերևույթի համապատասխան հատույթի՝ շրջանագծի նկատմամբ ինվերսիայի ձևափոխությունից: Ուսումնասիրված և ներկայացված են տարածության կամայական ուղղի կերպարները՝ կախված J առանցքի նկատմամբ նրա գրաված դիրքից: Մշակված են Windows 98-ի միջավայրում աշխատող ձևափոխությունների կիրառական ծրագրերի փաթեթները:

N. L. GHAZARYAN, V. V. GEVORGYAN

**SINGLE PARAMETER SET OF FLAT INVERSIONS RELATIVE TO
ROTATING CONICAL CROSS-SECTIONS**

A transformation method of layering 3D spaces by J line perpendicular to a set of single parameter planes is presented. This transformation results in a corresponding conical surface in each of the plane due to the inversion with respect to the transformation. A study of the images obtained from the positions of random lines with respect to the J axis is also presented. Applications software for the transformation processes has been developed in programs based on Windows 98.