0002-306Х. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2002. Т. LV, № 1.

УДК 62-50

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, А.Г. АВЕТИСЯН

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Предложен эффективный метод решения многоточечных краевых задач, основанный на дифференциально-тейлоровских преобразованиях. Рассмотрены модельные примеры

Ключевые слова: краевые задачи, дифференциально - тейлоровские преобразования, комбинированный подход.

Рассмотрим многоточечную краевую задачу [2], в которой:

- движение характеризуется линейной нестационарной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + f(t), \tag{1}$$

где $X(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T$ - n-мерный вектор переменных состояния; $A(t) = (a_{ij}(t)),\ i, j = \overline{1,n}$ - матрица системы порядка n; $f(t) = (f_1(t),...,f_n(t))^T$ - n -мерный вектор возмущений;

- граничные условия при $q+1$ значениях аргумента t, т.е. в точках $t_0, t_1,..., t_q$, заданы связанной системой конечных соотношений

$$\Gamma_0 X(t_0) + \sum_{r=1}^{q} \Gamma_r X(t_r) = \gamma, \tag{2}$$

где $\Gamma = (\Gamma_{rsj}),\ r = \overline{0,q};\ s = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ - постоянные матрицы с размерами m(n (m(n); (=((1,...,(m)^T - m-мерный вектор правых частей с постоянными элементами.

Требуется определить вектор $X(t)$, одновременно удовлетворяющий системам (1) и (2) с точностью до ε.

Теперь предположим, что система краевых условий (2) такова, что задача имеет хотя бы одно решение. Предположим также, что элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ и $f_j(t)$ вектора $f(t)$ таковы, что на отрезке $[t_0,\ t_q]$ решение системы (1) можно представить векторным рядом Тейлора. В качестве основного математического аппарата для нахождения этого решения используем дифференциально-тейлоровские (точнее, дифференциально-маклореновские, т.к. $t_0=0$) преобразования [1]:

$$x(t) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^K X(K) \ \overline{\underline{\cdot}}\ X(K) = \frac{H^K}{K!}\frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K}\Bigg|_{t=t_o=0}, \tag{3}$$

где $X(K)$ - n-мерный вектор дискрет (векторная функция целочисленного аргумента K=0,1,2,...,∞, причем X(0)(x(0)), а H – некоторый масштабный коэффициент.

Теперь систему (1) из области оригиналов $x(t)$ переведем в область изображений $X(K)$. При этом алгебраический эквивалент системы (1) выглядит так:

$$X(K+1)_K = \frac{H}{K+1}\left(\sum_{r=0}^{K} A(r)X(K-r)_K + F(K)\right), \tag{4}$$

где индекс k указывает на степень аппроксимирующего приближенное решение задачи многочлена Тейлора.

Отсюда при изменении аргумента K последовательно получим представления

$$\begin{cases} X(1)_K = X_1(X(0)_K, H) = \left[B_1(X(0)_K)X(0)_K + C_1\right]H, \\ X(2)_K = X_2(X(0)_K, H^2) = \left[B_2(X(0)_K)X(0)_K + C_2\right]H^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X(K)_K = X_K(X(0)_K, H^K) = \left[B_K(X(0)_K)X(0)_K + C_K\right]H^K, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{5}$$

где $X(0)_K = X(t_0 = 0)_K$ - начальный вектор дискрет при аппроксимации решения задачи (1), (2) многочленом K-й степени; $B_p(X(0)_K), P = \overline{1, K}$ - постоянные матрицы порядка n; $C_p, P = \overline{1, K}$ - постоянные векторы-столбцы с размерами $n(1$.

Далее в соответствии с (3) имеем

$$\begin{aligned} x(t)_K &= \sum_{P=0}^{K} X(P)_K\left(\frac{t}{H}\right)^P = \sum_{P=0}^{K} X_P(X(0)_K, H^P)\left(\frac{t}{H}\right)^P = \\ &= \sum_{P=0}^{K}\left[B_P(X(0)_K)X(0)_K + C_p\right]t^p, \end{aligned} \tag{6}$$

причем $B_0(X(0))_K = E$, где E – единичная матрица порядка n, а $C_0 = (0)$ - нулевой вектор-столбец с размерами $n x 1$.

Нетрудно убедиться, что при фиксированных значениях $t_1, t_2, \dots, t_q$ независимой переменной t решение (6) можно представить линейными относительно вектора $X(0)_K$ соотношениями

$$X(t_r)_K = D_{rK}X(0)_K + G_{rK}, \; r = \overline{1, q}, \tag{7}$$

где $D_{rK} = (d_{r_{ij}})_K$ – постоянные матрицы порядка n; $G_{rK} = (g_{r_j})_K$ - постоянные векторы с размерами $n x 1$.

С учетом последних связанная система краевых условий (2) приобретает вид

$$\left[\Gamma_0+\sum_{r=1}^{q}\Gamma_r D_{rK}\right]X(0)_K+\sum_{r=1}^{q}\Gamma_r G_{rK}=\gamma,$$

откуда

$$\left[\Gamma_0+\sum_{r=1}^{q}\Gamma_r D_{rK}\right]X(0)_K=\gamma-\sum_{r=1}^{q}\Gamma_r G_{rK},$$

или

$$Q_K X(0)_K=d_K, \qquad (8)$$

где

$$Q_K=\Gamma_{\mathbf{0}}+\sum_{r=1}^{q}\Gamma_{\mathbf{r}} D_{rK},\quad d_K=\gamma-\sum_{r=1}^{q}\Gamma_{\mathbf{r}} G_{rK}.$$

Теперь рассмотрим два возможных варианта.

1. Пусть m=n. Тогда:

а) $X(0)_K=Q_K^{-1}d_K$, если $\mathrm{rang}Q_K=n;$ (9)

б) $X(0)_K=Q_K^{+}d_K$, если $\mathrm{rang}Q_K<n,$ (10)

где + - знак псевдообратной матрицы (иными словами, при определенной, но вырожденной системе (8) с бесконечным множеством решений ищется решение (вектор $X(0)_K$) с минимальной длиной).

2. Пусть m<n. Тогда, умножая обе части соотношения (8) на транспонированную матрицу Q_K^T , получим

$$Q_K^T Q_K X(0)_K=Q_K^T d_K,$$

откуда

а) $X(0)_K=\left[Q_K^T Q_K\right]^{-1}Q_K^T d_K$, если $\mathrm{rang}\left[Q_K^T Q_K\right]=n;$ (11)

б) $X(0)_K=\left[Q_K^T Q_K\right]^{+}Q_K^T d_K$, если $\mathrm{rang}\left[Q_K^T Q_K\right]<n$ (12)

(иными словами, при недоопределенной системе (8) также с бесконечным множеством решений опять-таки ищется вектор $X(0)_K$ с минимальной длиной).

Ввиду того, что при невырожденности матрицы обратная ей матрица совпадает с ее псевдообратной, то, как наиболее общие соотношения, при организации численных процедур можно воспользоваться представлениями (10) и (12) соответственно при m=n или m<n .

Таким образом, определив в соответствии с (10) или (12) вектор начальных дискрет $X(0)_K$, при аппроксимации решения многочленом K-й степени с учетом системы (5) можно вычислить также векторы дискрет $X(1)_K, X(2)_K,\ldots,X(K)_K$, а в дальнейшем и приближенное решение $X(t)_K$ в соответствии с выражением (6).

При этом, однако, чаще всего не удается получить точное решение задачи (если, конечно, оно существует) либо из-за недостаточности степени используемых аппроксимирующих многочленов, либо из-за использования псевдообратных матриц, в общем случае, обуславливающих, хотя в некотором смысле, “оптимальные”, но все же приближенные решения (начальный вектор дискрет

$X(0)_K$ с минимальной длиной при недоопределенных системах, или начальный вектор дискрет $X(0)_K$, обеспечивающий минимальную суммарную невязку при переопределенных системах (метод наименьших квадратов)). Поэтому требуется поиск других, более эффективных путей решения проблемы. К счастью, оказывается, что есть такая возможность (комбинированный подход)!

Суть этого подхода заключается в следующем: ввиду того, что при всех процедурах основные вычисления сводятся к нахождению такого начального вектора дискрет $X^*(0)$ решения задачи, при котором одновременно должны быть удовлетворены системы дифференциальных уравнений и краевых условий, то с целью использования наиболее полной информации для предотвращения энтропии, обусловленной условием $\mathrm{rang}Q_K < n$ (при m=n) или недоопределенностью системы краевых условий (при m<n), необходимо использовать любую из подсистем (порядка $\geq n$), порожденных гиперсистемой

$$\begin{cases} Q_1 X(0)_1 = d_1, \\ Q_2 X(0)_2 = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_K X(0)_K = d_K, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdots \\ Q_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ Q_K \\ \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} X^*(0) = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ d_K \\ \cdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

с матрицей с размерами $m \cdot k \times n$ и вектором свободных членов с размерами $m \cdot k \times 1$.

<u>Пример 1</u> ([1], стр. 259-262; m=n=3). Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in [t_0, t_1] \in [0,1]$$

при граничных условиях

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

и требуется найти решение $\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)^T$.

Спектральная модель (4) в данном примере имеет вид

$$\begin{cases} X_1(K+1) = \dfrac{H}{K+1}\left(-3X_1(K) - X_2(K) - X_3(K) + Ъ(K-1)\right), \\ X_2(K+1) = \dfrac{H}{K+1}\left(-X_2(K-1) + X_3(K)\right), \\ X_3(K+1) = \dfrac{H}{K+1}\left(-3X_2(K) + 2Ъ(K)\right), \end{cases}$$

откуда

$$B_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} H,\ C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} H,\quad D_{11} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ G_{11} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 9/2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} H^2,\ C_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} H^2,\ D_{12} = \begin{bmatrix} -2 & -2/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2/3 & 1/2 \end{bmatrix},\ G_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -9/2 & -5/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} H^3,\ C_3 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix} H^3,\quad D_{13} = \begin{bmatrix} -13/20 & -4/15 & -67/120 \\ 0 & 1/3 & 5/8 \\ 0 & -11/15 & 5/8 \end{bmatrix},\ G_{13} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

и т.д.

Теперь перейдем к получению начальных векторов дискрет $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ соответственно при линейной ($K = 1$), квадратической ($K = 2$) и кубической ($K = 3$) аппроксимациях решений.

а) при линейной аппроксимации имеем

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \det Q_1 = 6 \neq 0,\ d_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4/3 & -8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},\quad \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

б) при квадратической аппроксимации имеем

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8/3 & -1/2 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix},\ \det Q_2 = 7/3 \neq 0,\ d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}571429 & -2{,}285714 \\ 0 & 0{,}428571 & 0{,}214286 \\ 0 & 0{,}285714 & 1{,}142857 \end{bmatrix},\quad \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

в) при кубической аппроксимации имеем

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 5/2 \\ 0 & 41/15 & -5/8 \\ 0 & -2/5 & 5/4 \end{bmatrix},\ \det Q_3 = 19/6 \neq 0,\ d_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},$$

$$Q_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}842105 & -2{,}421053 \\ 0 & 0{,}394737 & 0{,}197368 \\ 0 & 0{,}126316 & 0{,}863158 \end{bmatrix},\quad \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и т.д.

Очевидно, что в этой задаче при всех типах аппроксимаций начальный вектор дискрет $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T = (1,1,0)^T$ определяется однозначно в соответствии с (9), при котором имеем следующую картину (табл. 1):

Таблица 1

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X1(K)	1	-4	6	-6	4.5	-2,7	1,35	-0,57857	0,21696	-0,07232	0,02169
X2(K)	1	0	$0, \forall K = \overline{2,\infty}$								
X3(K)	0	1	$0, \forall K = \overline{2,\infty}$								

Наконец, решение задачи выглядит так:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 - 4\cdot t + 6\cdot t^2 - 6\cdot t^3 + 4.5\cdot t^4 - 2.7\cdot t^5 + 1.35\cdot t^6 - \cdots, \\ x_2(t) = 1, \\ x_3(t) = t. \end{cases}$$

Заметим, что в отличие от [1] здесь получено решение, одновременно удовлетворяющее системам дифференциальных уравнений и краевых условий.

Пример 2. (m=2<n=3). Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & 2t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 1 - t - \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t = [0,2]$$

при граничных условиях

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти решение $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$.

Спектральная модель (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} X_1(K+1) \\ X_2(K+1) \\ X_3(K+1) \end{pmatrix} = \frac{H}{K+1} \begin{pmatrix} H^2 X_1(K-2) + 2HX_2(K-1) + Ъ(K) - H^2Ъ(K-2) \\ HX_1(K-1) + X_2(K) + Ъ(K) - HЪ(K-1) - \frac{1}{2}\cdot H^2Ъ(K-2) \\ -X_1(K) + X_3(K) \end{pmatrix}.$$

Отсюда при $K = \overline{1,5}$ получим

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} H, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} H, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad G_{11} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5\end{bmatrix}H^2,\quad C_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -0{,}5\end{pmatrix}H^2,\quad D_{12}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ -4 & 0 & 5\end{bmatrix},\quad G_{12}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -2\end{pmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 0\\ 1/6 & 1/6 & 0\\ -1/6 & -1/3 & 1/6\end{bmatrix}H^3,\quad C_3=\begin{pmatrix}1/3\\ 1/6\\ -1/6\end{pmatrix}H^3,\quad D_{13}=\begin{bmatrix}11/3 & 28/3 & 0\\ 10/3 & 19/3 & 0\\ -16/3 & -8/3 & 19/3\end{bmatrix},\quad G_{13}=\begin{pmatrix}14/3\\ 10/3\\ -10/3\end{pmatrix},$$

$$B_4=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 0\\ 1/24 & 7/24 & 0\\ -1/8 & -1/4 & 1/24\end{bmatrix}H^4,\quad C_4=\begin{pmatrix}1/4\\ 1/24\\ -1/8\end{pmatrix}H^4,$$

$$D_{14}=\begin{bmatrix}23/3 & 40/3 & 0\\ 4 & 11 & 0\\ -22/3 & -20/3 & 7\end{bmatrix},\quad G_{14}=\begin{pmatrix}26/3\\ 4\\ -16/3\end{pmatrix},$$

$$B_5=\begin{bmatrix}1/15 & 4/15 & 0\\ 3/40 & 23/120 & 0\\ -3/40 & -1/10 & 1/120\end{bmatrix}H^5,\quad C_5=\begin{pmatrix}1/15\\ 3/40\\ -3/40\end{pmatrix}H^5,$$

$$D_{15}=\begin{bmatrix}49/5 & 328/15 & 0\\ 32/5 & 257/15 & 0\\ -126/15 & -148/15 & 109/15\end{bmatrix},\quad G_{14}=\begin{pmatrix}54/5\\ 32/5\\ -116/15\end{pmatrix}$$

и т.д.

С учетом этих данных имеем следующие недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений:

а) при K=1:

$$\begin{bmatrix}3 & 5 & 0\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{pmatrix}_1=\begin{pmatrix}-5\\ 3\end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix}(П1)\\ (П2)\end{matrix}$$

б) при K=2:

$$\begin{bmatrix}5 & 15 & 0\\ -5 & -3 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}-5\\ 5\end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix}(П3)\\ (П4)\end{matrix}$$

в) при K=3:

$$\begin{bmatrix}35/3 & 27 & 0\\ -9 & -11 & 16/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{pmatrix}_3=\begin{pmatrix}-35/3\\ 9\end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix}(П5)\\ (П6)\end{matrix}$$

г) при K=4:

$$\begin{bmatrix} 61/3 & 119/3 & 0 \\ -15 & -19 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}_4 = \begin{pmatrix} -61/3 \\ 15 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} (\Pi 7) \\ (\Pi 8) \end{matrix}$$

д) при K=5:

$$\begin{bmatrix} 27 & 943/15 & 0 \\ -293/15 & -461/15 & 94/15 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}_5 = \begin{pmatrix} -27 \\ 293/15 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (\Pi 9) \\ (\Pi 10) \end{matrix}$$

и т.д.

Результаты решения задачи согласно комбинированному подходу для 10-и экспериментов при различных комбинациях уравнений гиперсистемы (П1)-(П10) представлены в табл. 2, откуда имеем следующую картину: при экспериментах 1 и 2 получены приближения вектора $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$, при которых соответствующие векторы $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ не удовлетворяют ни системе дифференциальных уравнений, ни системе краевых условий; при экспериментах 3 и 6 матрицы систем вырожденные; при экспериментах 4, 5, 7, 9, 10 получено точное значение вектора $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T = (-1,0,0)^T$, при котором соответствующее решение имеет вид: $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T = \left(-1+t, t-\frac{1}{2}t^2, t\right)^T$.

Таблица 2

Экс.	Подсистемы уравнений	$X_1(0)$	$X_2(0)$	$X_3(0)$
1	П1, П2, П3	-2,5	0,5	-2,5
2	П1, П2, П6	1,759259	0,055556	-1,166666
3	П1, П3, П5	Матрица системы вырожденная		
4	П2, П3, П6	-1	0	0
5	П3, П4, П5			
6	П3, П4, П6	Матрица системы вырожденная		
7	П4, П5, П6	-1	0	0
8	П4, П5, П9, П10	-1,014926	0,033807	-0,000601
9	П4, П6, П9, П10	-1	0	0
10	П2, П5, П6, П9, П10			

Последнее точно удовлетворяет и системе дифференциальных уравнений, и системе краевых условий, причем при экспериментах 4, 5, 7 использованы определенные системы 3-го порядка, а при экспериментах 9 и 10 - переопределенные системы 4-го и 5-го порядка соответственно. При эксперименте 8 использована переопределенная система 4-го порядка и получено достаточно близкое к точному решение, несмотря на то, что гиперплоскости, порожденные уравнениями П5 и П9, почти параллельны.

Заметим, что при решении этой задачи некомбинированным способом на всех шагах вычислительных процедур функционируют схемы вида (12), а получаемые при их использовании приближения $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ не удовлетворяют ни системе дифференциальных уравнений, ни системе краевых условий. Между тем, при использовании комбинированного подхода в подавляющем большинстве случаев удалось получить точное решение задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. –Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
2. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.–Киев: Наукова думка, 1986.– 224 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 15.06.2000.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ. Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱԿԵՏ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՒՂՂԱԿԻ ՄԵԹՈԴ

Առաջարկված է բազմակետ եզրային խնդիրների լուծման արդյունավետ մեթոդ՝ հիմնված դիֆերենցիալ-թեյլորյան ձևափոխությունների վրա: Դիտարկված են մոդելային օրինակներ:

S.H. SIMONYAN, A.G. AVETISSYAN

DIRECT METHOD OF LINEAR MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS SOLUTION

An effective method to the solution of multipoint boundary problems using differential-Taylor transforms is proposed. Some model examples are considered.