

С.О. СИМОНЯН, К.С. АГАДЖАНЫН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Предложен новый метод (метод обратного тангенса - МОТ) решения линейных задач оптимального быстрогодействия, позволяющий полностью автоматизировать процесс решения при использовании ППП MATLAB-5.2. На основе решения задачи оптимального управления движением искусственного спутника Земли осуществлен сравнительный анализ ряда известных и предложенного методов.

Ключевые слова: оптимальное управление, метод обратного тангенса, пакет прикладных программ, искусственный спутник Земли.

Введение. В [2] был рассмотрен вопрос автоматизированной машинной реализации известного метода детерминантных уравнений (МДУ) [3], предназначенного для решения линейных автономных задач оптимального управления, движение которых описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (1)$$

при краевых условиях

$$X(0) = \bar{f}_x, \quad X(T) = \bar{f}_x = O_{R^n} \quad (2)$$

и "жестких" ограничениях

$$|u_k(t)| \leq \ell_k, \quad k = \overline{1, r}, \quad (3)$$

причем требуется, чтобы

$$I = \int_0^T l dt = T \rightarrow \min_{u(t)}, \quad (4)$$

где $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ - вектор основных переменных (здесь и далее T - знак транспонирования, а T - время оптимального быстрогодействия); $U(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ - вектор управляющих воздействий; $A = (a_{ij}); i, j = \overline{1, n}$ - матрица системы; $B = (b_{jk}); j = \overline{1, n}; k = \overline{1, r}$ - матрица управляющих воздействий; $\ell_k, k = \overline{1, r}$ - амплитуды последних.

С помощью МДУ путем получения эквивалентной динамической задачи (1)-(4) конечной системы трансцендентных уравнений сначала находятся моменты переключений $t_{kj}; k = \overline{1, r}; j = \overline{1, n}$, кусочно-постоянной функции программного управления

$$U_{\text{opt}}(t) = \text{diag}(\ell_k) \text{SIGN}[B^T \Psi(t) \psi(0)], \quad (5)$$

а затем вектор начальных значений сопряженных переменных $\psi(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_n(0))^T$ ($\text{diag}(l_k)$ - диагональная матрица порядка r ; $\text{SIGN}(\cdot)$ - векторная функция знака размерами $r \times 1$; $\Psi(t) = (\Phi^{-1}(t))^T = \Phi^T(-t)$ - матрица фундаментальных решений сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t)$, где $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T$ - вектор сопряженных переменных, причем $\Phi(t)$ - матрица фундаментальных решений однородной системы $\dot{X}(t) = AX(t)$).

В настоящей работе предлагается новый метод решения задачи (1)-(4). При этом вектор $\psi(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_n(0))^T$ определяется непосредственно и совместно со временем оптимального быстрогодействия T . В случае необходимости моменты переключений t_{kj} ; $k = \overline{1, r}$; $j = \overline{1, n}$, оптимальной управляющей функции (5) могут быть определены в дальнейшем как решение, в общем случае, трансцендентной системы конечных уравнений

$$\sigma(t) = B^T \Psi(t) \psi(0) = 0, \quad (6)$$

где $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_r(t))^T$ - вектор функций переключения.

Математический аппарат. Известно [3], что решение задачи (1)-(4) сводится к решению интегрального уравнения

$$-X(0) = \int_0^T \Phi^{-1}(t) B U(t) dt \quad (7)$$

относительно вектора управляющих воздействий $U(t)$, определяемого соотношением (5).

Используя метод функциональных преобразований сведения ограничений типа неравенств к равенствам без использования дополнительных переменных (метод сглаживания) [4, с.53] и вводя параметр K (достаточно малую величину), функцию знака $\text{sign}(g(x))$ от некоторой функции $g(x)$ довольно точно можно аппроксимировать функцией обратного тангенса, т.е. принять, что

$$\text{sign}[g(x)] \approx \frac{2}{\pi} \arctg \left[\frac{g(x)}{K} \right]. \quad (8)$$

Имея такую аппроксимацию, соотношение (5) можно заменить выражением

$$\begin{aligned}
U_{\text{opt}}(t) &= \frac{2}{\pi} \text{diag}(\ell_k) \text{Arctg} \left[\frac{1}{K} B^T \Psi(t) \Psi(0) \right] = \\
&= \frac{2}{\pi} \text{diag}(\ell_k) \text{Arctg} \left[\frac{1}{K} \begin{pmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_r(t) \end{pmatrix} \right],
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\text{Arctg}(\bullet) = \left(\arctg \left[\frac{1}{K} \sigma_1(t) \right], \dots, \arctg \left[\frac{1}{K} \sigma_r(t) \right] \right)^T$.

Представление (9) дает возможность вместо кусочно-постоянных знакопеременных функций $\text{sign}(\sigma_k(t))$; $k = \overline{1, r}$, использовать непрерывные функции $\arctg \left[\frac{1}{K} \sigma_k(t) \right]$;

$k = \overline{1, r}$, что позволяет сравнительно легко преодолевать очевидные вычислительные трудности, связанные с интегрированием системы (7) при использовании соотношения (5).

После интегрирования (7), с учетом (9), получаем трансцендентную систему n конечных уравнений с $(n+1)$ неизвестными:

$$F(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0), T) = 0. \tag{10}$$

При этом динамическая задача оптимизации (1)-(4) сводится к задаче математического программирования:

$$T \rightarrow \min_{\psi_1(0), \dots, \psi_n(0), T} \tag{11}$$

при условиях (10).

Задача Лагранжа (10), (11) требует составления расширенного критерия качества

$$L = \psi_0 T + F^T(\cdot) \mu \Rightarrow \min_{\psi(0), T}, \tag{12}$$

где $\psi_0 = -1$ [3]; $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ - вектор неопределенных множителей Лагранжа.

Заметим, что $\psi(0) \equiv \mu$ [3].

Необходимые условия экстремума функции (12) имеют вид

$$\begin{cases} \nabla_T L = -1 + \nabla_T^T F \mu = 0 & \text{(одно уравнение),} \\ \nabla_\mu L = F(\cdot) = 0 & \text{(n уравнений),} \end{cases} \tag{13}$$

где с учетом (7) и (9) имеем

$$\nabla_T F = \frac{2}{\pi} \Phi(-T) B \text{diag}(\ell_k) \text{Arctg} \left[\frac{1}{K} B^T \Phi^T(-T) \Psi(0) \right]. \tag{15}$$

Следовательно, из (13) имеем

$$\Psi^T(0) \cdot \Phi(-T) B \text{diag}(\ell_k) \text{Arctg} \left[\frac{1}{K} B^T \Phi^T(-T) \Psi(0) \right] = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Учитывая, что

$$\Psi^T(0) \Phi(-T) B = \sigma^T(T), \tag{17}$$

уравнение (16) представим в компактной форме:

$$\sigma^T(T) \text{diag}(\ell_k) \text{Arctg} \left[\frac{1}{K} \sigma(T) \right] = \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

или, с учетом (8),

$$\sigma^T(T) \text{diag}(\ell_k) \text{SIGN}(\sigma(T)) = 1. \quad (19)$$

Уравнение (19) можно представить также в виде

$$\sum_{k=1}^r |\ell_k \sigma_k(T)| = 1. \quad (20)$$

Присоединив последнее уравнение к системе (10) (или (14)), будем иметь доопределенную систему (n+1)-го порядка, решением которой можно получить как время оптимального быстрогодействия T, так и вектор $\psi(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_n(0))^T$, обеспечивающий оптимальность закона управления $U_{\text{opt}}(t)$.

Пример. Рассмотрим практическую задачу. Синтезируем регулятор, обеспечивающий оптимальное в смысле быстрогодействия управление движением спутника [1], когда: момент инерции спутника $J = 200 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; исполнительными органами системы управления являются газовые реактивные двигатели с регулируемой тягой, развивающие максимальный момент $M_m = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}$; в начальный момент отклонение спутника составляет $\vartheta_0 = 1^\circ 46'$, а угловая скорость $d\vartheta_0/dt = 28,65 \text{ рад/с}$. Уравнение движения спутника при отсутствии возмущений имеет вид

$$J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = kM.$$

Необходимо найти время и управление изменением момента M, при котором приход спутника в установившееся нулевое состояние будет совершаться наискорейшим образом.

После несложных преобразований движение спутника можно описать следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,005 \end{pmatrix} u(t),$$

а на управление $u(t)$, которое переводит эту систему из начального состояния $X(0) = (0,03; 0,5)^T$ в состояние покоя $X(T) = (0, 0)^T$ за минимальный промежуток времени T, наложено ограничение $|u(t)| \leq 4$.

Для этой задачи выражение (7) принимает вид

$$-\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0,005 \end{pmatrix} u(t) dt,$$

где $u_{\text{opt}}(t) = 8/\pi \arctg[(-\psi_1(0)t + \psi_2(0))/K]$.

В соответствии с (20) имеем: $4(-\psi_1(0)T + \psi_2(0)) = 1$, откуда $T = (4\psi_2(0) - 1) / 4\psi_1(0)$.
Интегрируя (7) и подставив вместо T последнее соотношение, получим следующую трансцендентную систему уравнений с неизвестными $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$:

$$\begin{cases} F_1(\psi_1(0), \psi_2(0)) = \frac{1}{\psi_1^2(0)} [-24,9987 + 0,9996\psi_2(0) - 0,0064 \times \\ \times \arctg(500\psi_2(0))\psi_2^2(0) + 2,546510^{-8} \arctg(500\psi_2(0)) + \\ + 1,2732 \cdot 10^{-5} \cdot \psi_2(0) \ln(1 + 250000\psi_2^2(0)) + 0,03\psi_1^2(0)] = 0, \\ F_2(\psi_1(0), \psi_2(0)) = \frac{1}{\psi_1^2(0)} [-0,9997 + 0,0127 \arctg(500\psi_2(0)) \times \\ \times \psi_2(0) - 1,2732 \cdot 10^{-5} \ln(1 + 250000\psi_2^2(0)) + 0,5\psi_1(0)] = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы ($K=10^{-5}$) приводит к следующим результатам:
 $\psi_1(0) = -2,8215$; $\psi_2(0) = -120,5404$; $T = 60,4416$ [с].

При этом $U_{\text{opt}}(t) = 2,5465 \arctg(1410,7861t - 60270,2141)$, причем время переключения $t_{\text{пер.}} = 42,7210$ [с].

Сопоставим эти величины со значениями соответствующих неизвестных, полученными в [1] методом фазовой плоскости (МФП), а также с результатами, полученными МДУ при решении следующей эквивалентной нелинейной системы конечных уравнений 5-го порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,02t_1^2 + 0,02t_2^2 - 0,01T^2 + 0,03 = 0, \\ 0,04t_1 - 0,04t_2 + 0,02T + 0,5 = 0, \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{система (7) при} \\ \text{функции (5)} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1(t_1 - t_2) + \gamma_1^2 = 0, \\ (t_2 - t_1)(t_2 - T) + \gamma_2^2 = 0, \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(равенства Валентайна)} \\ \text{(детерминантное уравнение)} \end{array}$$

$$0,064\gamma_1\gamma_2(t_1 - t_2) = 0,$$

где t_1 и t_2 - времена переключений (в конкретном случае, $t_1 = 0$); γ_1, γ_2 - неизвестные постоянные Валентайна (в конкретном случае, $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 27,5136$); T - время оптимального быстрогодействия.

Сравнительные оценки представлены в таблице, где МОТ - метод обратного тангенса.

Таблица

Переменные	МФП	МДУ	МОТ
$t_{\text{пер.}} [\text{с}]$	42,8	42,7200	42,7210
$T [\text{с}]$	60,6	60,4401	60,4416
$\psi_1(0)$ $\psi_2(0)$	-2,8089 -120,2247	-2,8209 -120,5219	-2,8215 -120,5404
$x_1(t_{\text{пер.}})$ $x_2(t_{\text{пер.}})$	3,1116 -0,3560	3,1400 -0,3544	3,1400 -0,3543
$x_1(T)$ $x_2(T)$	$-5,6800 \cdot 10^{-2}$ 0,0000	$0,2664 \cdot 10^{-14}$ 0,0000	$-6,860 \cdot 10^{-4}$ $-0,079 \cdot 10^{-4}$

Заметим, что в таблице величины $\psi_1(0) = -2,8089$, $\psi_2(0) = -120,2247$ при МФП получены путем дополнительных вычислений с целью сопоставления их с соответствующими значениями, полученными МДУ и МОТ.

Временные характеристики решения задачи МОТ представлены на рис.1 и 2. Машинная реализация решения задачи осуществлена применением пакета прикладных программ "MATLAB - 5" [5].

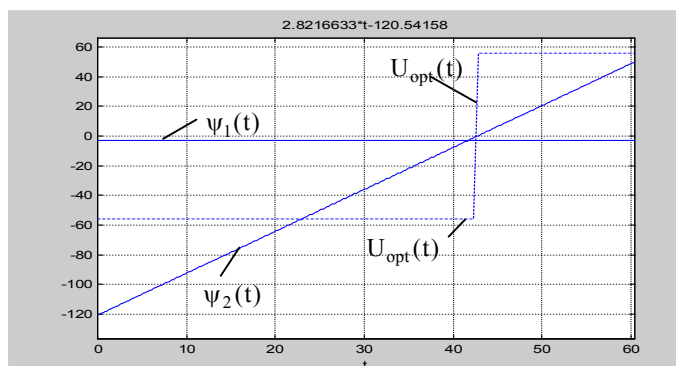


Рис. 1

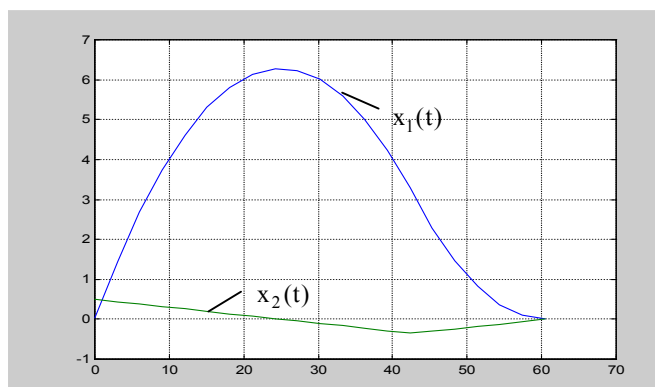


Рис. 2

Закключение. При МОТ система (13),(14) всегда $(n+1)$ -го порядка, вне зависимости от значения r . Между тем, при МДУ эквивалентная система конечных уравнений $(2nr+1)$ -го порядка, причем очевидно, что $(2nr+1) > n+1$, ($r \geq 1$).

Что касается сравнительной эффективности МДУ и МОТ, то, при прочих равных условиях, МДУ превосходит МОТ, если трудности вычислительного характера, обусловленные порядком $(2nr+1)$ -й эквивалентной системы конечных уравнений, не преобладают над затруднениями, обусловленными сложностью соотношений системы (13),(14). В противном случае МОТ, очевидно, выгодно отличается от МДУ и, тем более, от МФП, возможности которого весьма ограничены размерностью переменных состояния ($n \leq 2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антомонов Ю.Г. Синтез оптимальных систем. – Киев: Наукова думка, 1972.-320 с.
2. Симомян С.О., Агаджанян К.С. К оптимизации по быстродействию линейных многомерных систем // Моделирование, оптимизация, управление // Сб. науч. тр. – 1999. - Вып. 2. - С. 168-175.
3. Симомян С.О. Метод детерминантных уравнений в прикладной теории оптимальных систем / ГИУА. - Ереван, 1992. – 104 с. (на арм. яз.).
4. Трухачев Р.И., Хоменюк В.В. Теория неклассических вариационных задач.-Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1971.-168 с.
5. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов "MATLAB – 5". В 2-х т. - М.: Диалог-Мифи, 1999. Т.1 – 366 с., Т.2 – 304 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 15.11.1999.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Կ.Ս. ԱՂԱՋԱՆՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼ ԱՆԳԱԳՈՐԾՈՒԹՅԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ

ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Օպտիմալ արագագործության գծային խնդիրների լուծման համար առաջարկվել է նոր մեթոդ (հակադարձ տանգենտի մեթոդ - ՀՏՄ), որը հնարավորություն է տալիս ամբողջապես ավտոմատացնել լուծման գործընթացը MATLAB 5.2 ԿՕՓ-ի օգտագործման դեպքում: Երկրի արհեստական արբանյակի շարժման օպտիմալ կառավարման խնդրի լուծման հիման վրա իրականացվել է մի շարք հայտնի և առաջարկված մեթոդների համեմատական վերլուծություն:

S.H. SIMONYAN, K.S. AGHAJANYAN

ON ONE METHOD FOR LINEAR PROBLEM SOLVING OF OPTIMAL HIGH-SPEED

A new method (a method of a return tangent (MRT)) for linear problem solving of optimal high-speed is proposed. The method allows to automate completely the solving process using MATLAB 5.2. Based on the problem solving of optimal control by artificial Earth satellite movement, a comparative analysis of some known methods and the proposed one is realized.