Г. К. КАРАПЕТЯН, М. А. АРАМЯН

ОБ УСРЕДНЕНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

На основе известного определения усреднения физических величин установлена связь между параметрами усредненного поля неоднородной среды и поля внутри включения. Для средней диэлектрической проницаемости неоднородных систем регулярных структур получено общее соотношение, которое применимо для включений любой геометрической формы.

Ключевые слова: включение, усреднение, диэлектрическая проницаемость, напряженность электрического поля.

Неоднородные среды, к которым относятся композиционные, зернистые и волоконные материалы, различные смеси, неоднородные проводники и т.д., имеют широкое применение в технике. Изучению электромагнитных, тепловых, диффузионных и других свойств неоднородных материалов при применении различных физических полей посвящено большое количество работ, в которых предложены различные методы, эмпирические и полумпирические формулы. Их публикация продолжается до сих пор [1-6]. Для определения усредненных параметров неоднородных материалов необходимо вычислить физические поля внутри всех составляющих этих материалов, после чего перейти к усредненным средам. Очевидно, что эта задача очень сложна, и для ее решения необходимы данные о структуре неоднородного материала, ориентировании и распределении всех его составляющих.

В статье предлагается метод, позволяющий произвести усреднение в неоднородной двухкомпонентной среде и получить уравнения состояния среды. Известно, что ряд различных физических процессов характеризуется уравнением вида

$$\vec{Q} = \lambda \vec{F}, \quad (1)$$

где $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ – определенные векторные величины; λ – коэффициент переноса или другой параметр материала (теплопроводность, электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемость, диффузия).

Уравнением такого вида описывается связь: вектора электрического смещения и напряженности электрического поля; плотности электрического тока и напряженности электрического поля; магнитной индукции и напряженности магнитного поля и т.д. Если $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ – тензорные поля, то под обобщенной проводимостью λ следует понимать тензоры модулей упругости, коэффициент теплового расширения и т.д. [3].

Предположим, имеем двухкомпонентную неоднородную среду с параметрами λ_1 и λ_2 , к которой приложена обобщенная однородная сила $\vec{F}_0$. Усредненный параметр $\langle \lambda \rangle$ этой системы, согласно (1), будет

$$\langle \lambda \rangle = \frac{|\langle \vec{Q} \rangle|}{|\langle \vec{F} \rangle|}, \quad (2)$$

где усреднения проводятся согласно определению Лоренца.

Если рассматриваемая среда диэлектрическая, то среднее значение ее диэлектрической проницаемости будет равно

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\left| \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \vec{D}_M dv \right|}{\left| \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \vec{E}_M dv \right|} = \frac{|\langle \vec{D} \rangle|}{|\langle \vec{E} \rangle|}. \quad (3)$$

Усредненный параметр неоднородной системы определяется в два этапа. На первом этапе изучается распределение поля в компонентах системы с учетом граничных условий. На втором этапе методом наложения полей определяется среднее поле. Применим вышеназванный метод к исследуемой двухкомпонентной системе. В случае, когда относительная диэлектрическая проницаемость дисперсионной среды ($i=1$, для усредненного электрического вектора смещения получим

$$\langle \vec{D} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \vec{D} dv = \frac{1}{V_0} \left[\int_{V_1} \vec{D} dv + \int_{V_2} \vec{D} dv \right], \quad (4)$$

где V_2 – объем включений в физически бесконечно малом объеме V_0 ; V_1 – соответственно, объем дисперсионной среды внутри V_0 .

В области V_1 $\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1$, а в V_2 – $\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\langle \vec{D} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_1} \varepsilon_0 \vec{E}_1 dv + \frac{1}{V_0} \int_{V_2} \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2 dv. \quad (5)$$

Так как рассматриваются линейные среды, то напряженность поля в любой точке пространства будет

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p, \quad (6)$$

где напряженность поля поляризации, как известно из [7], равна

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}.$$

В области V_1 имеем

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{p1} = \vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}_1 = \vec{E}_0, \quad (7)$$

так как $\vec{P}_1 = 0$ ($\varepsilon_1 = 1$ вакуум).

Известно, что в неоднородных системах регулярных структур при внешнем однородном поле включения поляризуются одинаково и однородно. Тогда напряженность внутри включений $\vec{E}_2$ будет постоянная.

Уравнение (5) с учетом (7) примет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{D} \rangle &= \frac{1}{V_0} \int_{V_1} \varepsilon_0 \vec{E}_0 dv + \frac{1}{V_0} \int_{V_2} \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2 dv = \frac{V_1}{V_0} \varepsilon_0 \vec{E}_0 + \frac{V_2}{V_0} \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \\ &= f_1 \varepsilon_0 \vec{E}_0 + f_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2 = (1 - f_2) \varepsilon_0 \vec{E}_0 + f_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где f_2 - относительная объемная концентрация включений, $f_1 + f_2 = 1$.

Теперь определим среднее значение напряженности поля. Усредняя уравнение (6), для $\langle \vec{E} \rangle$ получим

$$\langle \vec{E} \rangle = \langle \vec{E}_0 \rangle + \langle \vec{E}_p \rangle, \quad (9)$$

где $\langle \vec{E}_0 \rangle = \vec{E}_0$, так как внешнее поле однородное.

А для $\langle \vec{E}_p \rangle$, по определению (2), получим

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_p \rangle &= \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \vec{E}_p dv = \frac{1}{V_0} \left(\int_{V_1} \vec{E}_p dv + \int_{V_2} \vec{E}_p dv \right) = \\ &= -\frac{1}{V_0} \left(\int_{V_1} \frac{\vec{P}_1}{\varepsilon_0} dv + \int_{V_2} \frac{\vec{P}_2}{\varepsilon_0} dv \right) = -\frac{1}{V_0 \varepsilon_0} \int_{V_2} \vec{P}_2 dv = -\frac{V_2}{V_0 \varepsilon_0} \vec{P}_2 = f_2 \vec{E}_{p2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что $\vec{E}_{p2} = \vec{E}_2 - \vec{E}_0$, для $\langle \vec{E} \rangle$ окончательно получим

$$\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}_0 + f_2 (\vec{E}_2 - \vec{E}_0) = (1 - f_2) \vec{E}_0 + f_2 \vec{E}_2. \quad (11)$$

Подставляя (8) и (11) в (3), можем представить усредненную относительную диэлектрическую проницаемость исследуемой среды как функцию, зависящую только от напряженности поля внутри включения

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{|(1 - f_2) \vec{E}_0 + f_2 \varepsilon_2 \vec{E}_2|}{|(1 - f_2) \vec{E}_0 + f_2 \vec{E}_2|}. \quad (12)$$

После преобразований уравнение (12) примет вид

$$\langle \varepsilon \rangle = 1 + \frac{|(\varepsilon_2 - 1) f_2 \vec{E}_2|}{|f_2 \vec{E}_2 + (1 - f_2) \vec{E}_0|}. \quad (13)$$

В случае, когда относительная диэлектрическая проницаемость дисперсионной среды $\varepsilon_1 \neq 1$, после соответствующих преобразований [1] уравнение (13) примет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{|(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) f_2 \vec{E}_2|}{|f_2 \vec{E}_2 + (1 - f_2) \vec{E}_0|}. \quad (14)$$

Таким образом, рассчитав напряженность поля только внутри включений, можно определить усредненную диэлектрическую проницаемость неоднородной среды. Необходимо также отметить, что выведенное соотношение (14) применимо для двухкомпонентной системы с периодической структурой и включениями любого вида без никаких ограничений на величину концентрации включений f_2 . Для неоднородных же сред с регулярной структурой коэффициент $\langle \lambda \rangle$ ($\langle \varepsilon \rangle$, $\langle \mu \rangle$, ...) в уравнениях состояния среды [2,3] периодичен и не является функцией от пространственных координат.

В качестве примера приведем вывод формулы для расчета средней диэлектрической проницаемости неоднородных материалов со сферическими включениями. Сначала рассмотрим случай $f_2 \ll 1$, когда можно пренебречь взаимодействием между включениями. При этом напряженность поля внутри включения определяется выражением

$$\bar{E}_2 = \frac{3\varepsilon_1 \bar{E}_0}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим известную формулу Максвелла–Лоренца [1]

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 2f_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 - f_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим неоднородную среду при высоких объемных концентрациях, когда следует учесть дипольные взаимодействия. Известно, что в этом случае напряженность поля внутри включений равна [4]

$$\bar{E}_2 = \frac{3\varepsilon_1 \bar{E}_0}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 - f_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), для средней диэлектрической проницаемости неоднородных материалов регулярных структур получим новую формулу

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + f_2(1 + f_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 - f_2(2 - f_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}. \quad (18)$$

Эта формула удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к теории смесей. Действительно, в теоретической схеме отсутствуют внутренние противоречия, так как результат основан на уравнении поля, удовлетворяет граничным условиям $f_2=0 \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_1$, $f_2=1 \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_2$, имеет место хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными данными в широком диапазоне концентрации включений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нетушил А.В.** Модели электрических полей в гетерогенных средах нерегулярных структур // Электричество.–1975.– 10.– С. 1-8.
2. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний.–М.: Мир,1984. – 530 с.
3. **Дульнев Г.Н., Новиков В.В.** Процессы переноса в неоднородных средах. – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – 470 с.

4. **Карапетян М.А.** Исследование электрического поля в неоднородной среде.- Ереван: Айастан, 1990. –216 с.
5. **Арамян М.А.** Расчет потенциальных полей и средних параметров дисперсных систем регулярных структур с различными формами включений // Электричество.–1997.–¹ 2. – С. 64-69.
6. **Арамян М.А., Симонян В.С., Карапетян Г.К.** Энергия поляризации дисперсной фазы неоднородной системы как функция от своего параметра // Изв.НАН РА и ГИУА. Сер.ТН.–2000.–Т.53, ¹ 1. – С. 59-63.
7. **Стреттон Дж. А.** Теория электромагнетизма.– М.; Л.: Изд. техн.–теор. лит., 1948.– 535 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 20.07.1999.

Գ.Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Մ.Ա. ԱՐԱՄՅԱՆ

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ

ՄԻՋԻՆԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Օգտվելով ֆիզիկական մեծությունների միջինացման հայտնի սահմանումից, կապ է հաստատվել անհամասեռ համակարգի միջինացված դաշտի և ներառման ներքում դաշտի պարամետրերի միջև: Պարբերական կառուցվածքով անհամասեռ համակարգերի միջին դիէլեկտրիկական թափանցելիության համար ստացվել է ընդհանուր առնչություն, որը կիրառելի է ցանկացած երկրաչափական ձև ունեցող ներառումների համար:

G .K. KARAPETYAN, M. A. ARAMYAN

ON AVERAGING POTENTIAL FIELDS IN

INHOMOGENEOUS MEDIA

Using the known definition of averaging the physical values, a relation between the parameters of averaging fields in inhomogeneous environment and fields inside the inclusion is established. The general relationship being applicable for any inclusions having arbitrary geometrical forms is obtained for average dielectric permittivity of inhomogeneous systems with periodic structures.