

О.С. СИМОНЯН

ДИНАМИЧЕСКИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ПАРЕТО - ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Разработаны явная и неявная динамические макроэкономические модели парето-оптимального управления уменьшением загрязнения окружающей среды карбон-диоксидом (CO₂) и увеличением потребляемой энергии.

Ключевые слова: окружающая среда, динамическая модель, парето-оптимальное управление.

1. Введение. В [1] предложена статическая математическая модель уменьшения загрязнения окружающей среды карбон-диоксидом, приведены факторы, способствующие изменению количества загрязнения, а также переменные, с помощью которых возможно управлять уровнем этого загрязнения, т.е. уменьшать его. Эта модель позволяет описывать связь между экономическими переменными и загрязнением окружающей среды карбон-диоксидом. Однако вопросы изучения динамики изменения этих переменных и создания динамической макроэкономической модели остались открытыми. С целью заполнения этого пробела в [2] разработана динамическая модель макроэкономического анализа загрязнения окружающей среды карбон-диоксидом. В настоящей работе предлагается динамическая макроэкономическая модель парето-оптимального управления уменьшением такого загрязнения и увеличением потребляемой энергии.

2. Явная математическая модель. Имея в виду балансовые уравнения

$$\begin{cases} c(t) = c^g(t) + c^o(t) + c^f(t), \\ e_c(t) = e_c^g(t) + e_c^o(t) + e_c^f(t) + e_c^n(t), \end{cases}$$

где $c(t) = (c^g(t), c^o(t), c^f(t))^T$ - вектор выбрасываемого в окружающую среду количества карбон-диоксида (подвектор переменных состояния); $e_c(t) = (e_c^g(t), e_c^o(t), e_c^f(t), e_c^n(t))^T$ - вектор общей потребности в энергии (подвектор переменных состояния); а g, o, f, n - индексы, указывающие на потребление газа, нефти, бензина и атомной энергии соответственно, разработанную в [2] модель можно представить в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = r_{\varphi_1}(t)\varphi_1(t)e_c(t) + \left(r_{\varphi_2}(t)\varphi_2(t)\frac{G(t)}{e(t)} + r_{\varphi_3}(t)\varphi_3(t)\frac{P(t)}{G(t)} + r_p(t) \right) c(t), \\ \dot{e}_c(t) = \left(r_{\psi_g}(t)\psi_g(t) + r_{\psi_o}(t)\psi_o(t) + r_{\psi_f}(t)\psi_f(t) + r_{\psi_n}(t)\psi_n(t) + \right. \\ \left. + r_{\varphi_2}(t)\varphi_2(t)\frac{G(t)}{e(t)} + r_{\varphi_3}(t)\varphi_3(t)\frac{P(t)}{G(t)} + r_p(t) \right) e_c(t), \end{cases}$$

где $e(t)$ - функция, задающая закон изменения производимой энергии; $G(t)$ - валовой внутренний продукт (скалярное управляющее воздействие); $P(t)$ - численность населения (скалярное управляющее воздействие);

$$r_{\varphi_1}(t) = \frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\varphi_1(t)}, r_{\varphi_2}(t) = \frac{\dot{\varphi}_2(t)}{\varphi_2(t)}, r_{\varphi_3}(t) = \frac{\dot{\varphi}_3(t)}{\varphi_3(t)}, r_P(t) = \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} - \quad (5)$$

нормы роста по переменным

$$\varphi_1(t) = \frac{c(t)}{e_c(t)}, \varphi_2(t) = \frac{e(t)}{G(t)}, \varphi_3(t) = \frac{G(t)}{P(t)}, P(t) \quad (6)$$

соответственно;

$$r_{\psi_g}(t) = \frac{\dot{\psi}_g(t)}{\psi_g(t)}, r_{\psi_o}(t) = \frac{\dot{\psi}_o(t)}{\psi_o(t)}, r_{\psi_f}(t) = \frac{\dot{\psi}_f(t)}{\psi_f(t)}, r_{\psi_n}(t) = \frac{\dot{\psi}_n(t)}{\psi_n(t)} - \quad (7)$$

нормы роста по переменным

$$\psi_g(t) = \frac{e_c^g(t)}{e_c(t)}, \psi_o(t) = \frac{e_c^o(t)}{e_c(t)}, \psi_f(t) = \frac{e_c^f(t)}{e_c(t)}, \psi_n(t) = \frac{e_c^n(t)}{e_c(t)} \quad (8)$$

соответственно.

С учетом соотношений (5)-(8) систему (3), (4) можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = \left(\frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\varphi_1(t)} + \dot{\varphi}_2(t) \frac{G(t)}{e(t)} + \dot{\varphi}_3(t) \frac{P(t)}{G(t)} + \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} \right) c(t), & (9) \\ \dot{e}_c(t) = \left(\dot{\varphi}_2(t) \frac{G(t)}{e(t)} + \dot{\varphi}_3(t) \frac{P(t)}{G(t)} + \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} \right) e_c(t), & (10) \end{cases}$$

ибо

$$\begin{aligned} r_{\psi_g}(t) \psi_g(t) + r_{\psi_o}(t) \psi_o(t) + r_{\psi_f}(t) \psi_f(t) + r_{\psi_n}(t) \psi_n(t) = \\ = \dot{\psi}_g(t) + \dot{\psi}_o(t) + \dot{\psi}_f(t) + \dot{\psi}_n(t) = \\ = \frac{d}{dt} (\psi_g(t) + \psi_o(t) + \psi_f(t) + \psi_n(t)) = \frac{d}{dt} (1) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (9), (10) описывает динамику изменения переменных состояния $C(t)$ и $e_c(t)$. К этой системе добавим следующие естественные ограничения:

$$0 \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_1^*, \quad (12)$$

$$0 \leq \varphi_2(t) \leq \varphi_2^*, \quad (13)$$

$$0 \leq \varphi_3(t) \leq \varphi_3^*, \quad (14)$$

где φ_1^* , φ_2^* , φ_3^* – задаваемые из определенных практических соображений граничные величины соответствующих переменных.

С учетом соотношений (6) систему ограничений (12)-(14) представим в виде

$$0 \leq c(t) \leq \varphi_1^* e_c(t), \quad (15)$$

$$0 \leq e(t) \leq \varphi_2^* G(t), \quad (16)$$

$$0 \leq G(t) \leq \varphi_3^* P(t), \quad (17)$$

и добавим к ней еще одно естественное ограничение

$$0 \leq P(t) \leq P^*. \quad (18)$$

Следуя [4], ограничения (15)-(18) вида двусторонних слабых неравенств сведем к следующим равенствам:

$$\Phi_{\varphi_1}(c(t), e_c(t)) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{c(t)(c(t) - \varphi_1^* e_c(t))}{k} = 0, \quad (19)$$

$$\Phi_{\varphi_2}(e(t), G(t)) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{e(t)(e(t) - \varphi_2^* G(t))}{k} = 0, \quad (20)$$

$$\Phi_{\varphi_3}(G(t), P(t)) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{G(t)(G(t) - \varphi_3^* P(t))}{k} = 0, \quad (21)$$

$$\Phi_P(P(t)) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{P(t)(P(t) - P^*)}{k} = 0, \quad (22)$$

где k – достаточно малое положительное число (для учета ограничений (15)-(18) могут быть использованы также другие представления, в частности, негладкие соотношения типа знаковых функций (sign), требующих, естественно, использования методов недифференцируемой оптимизации [3]).

С учетом вышеизложенного имеем следующую двухкритериальную оптимизационную задачу (при известных законах изменения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$):

а) терминальные критерии качества:

$$c(T) \rightarrow \min_{G(t), P(t)}, \quad (23)$$

$$e_c(T) \rightarrow \max_{G(t), P(t)}, \quad t \in [t_0, T], \quad (24)$$

где t_0 – начало, а T – конец динамического процесса;

б) уравнения динамики: система обыкновенных дифференциальных уравнений (9), (10) (системы переменных состояния);

в) ограничения: соотношения вида равенств (19)-(22), образующие связанную область допустимых решений;

г) краевые условия: могут быть различными (фиксированные, нефиксированные, частично фиксированные, типа гладких перемещающихся или перемещающихся многообразий и т.д.), в зависимости от

которых для решения полученной паретовской динамической оптимизационной задачи должны быть использованы соответствующие необходимые условия трансверсальности на левом (при $t=t_0$) и правом (при $t=T$) концах оптимальных траекторий [3].

3. Неявная математическая модель. Теперь, в отличие от предложенной явной математической модели, рассмотрим ее неявный эквивалент, в котором вместо управляющих воздействий $G(t)$ и $P(t)$ выступают нормы роста $r_c(t)=r_c(G(t),P(t))$ и $r_{e_c}(t)=r_{e_c}(G(t),P(t))$ переменных состояния $c(t)$ и $e_c(t)$ соответственно. С этой целью сделаем ряд преобразований. Для нормы роста $r_{\phi_1}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} r_{\phi_1}(t) &= \frac{\dot{\phi}_1(t)}{\phi_1(t)} = \frac{e_c(t)}{c(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{c(t)}{e_c(t)} \right) = \frac{e_c(t)}{c(t)} \frac{\dot{c}(t)e_c(t) - c(t)\dot{e}_c(t)}{e_c^2(t)} = \\ &= \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\dot{e}_c(t)}{e_c(t)} = r_c(t) - r_{e_c}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично можно доказать, что

$$r_{\phi_2}(t) = r_c(t) - r_G(t), \quad (26)$$

$$r_{\phi_3}(t) = r_G(t) - r_P(t), \quad (27)$$

где $r_c(t)$, $r_{e_c}(t)$, $r_e(t)$, $r_G(t)$ - нормы роста по переменным $c(t)$, $e_c(t)$, $e(t)$, $G(t)$ соответственно.

Следовательно, при соотношениях (25)-(27) система (9), (10) приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = (r_c(t) - r_{e_c}(t) + r_e(t))c(t), & (28) \\ \dot{e}_c(t) = r_{e_c}(t)e_c(t). & (29) \end{cases}$$

Преобразуя дифференциальное уравнение (28), получим

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - r_{e_c}(t) + r_e(t) \right) c(t) = \\ &= \dot{c}(t) - (r_{e_c}(t) - r_e(t))c(t), \end{aligned}$$

откуда

$$r_{e_c}(t) = r_e(t) \quad (30)$$

или

$$\frac{\dot{e}_c(t)}{e_c(t)} = \frac{\dot{e}(t)}{e(t)}. \quad (31)$$

Таким образом, система (9), (10) окончательно принимает вид

$$\dot{c}(t) = r_c(t)c(t), \quad (32)$$

$$\dot{e}_c(t) = r_{e_c}(t)e_c(t) \quad (33)$$

(как и должно быть).

Следовательно, двухкритериальная оптимизационная задача формулируется следующим образом:

а) терминальные критерии качества:

$$c(T) \rightarrow \min_{r_c(t)}, \quad (34)$$

$$e_c(T) \rightarrow \max_{r_{ec}(t)}, \quad t \in [t_0, T]; \quad (35)$$

б) уравнения динамики: система обыкновенных дифференциальных уравнений (32), (33);

в) ограничения:

(36)

$$r_c^* \leq r_c(t) \leq 0, \quad (37)$$

$$0 \leq r_{ec}(t) \leq r_{ec}^*,$$

где r_c^* и r_{ec}^* - задаваемые из определенных практических соображений граничные величины соответствующих переменных, которые (по аналогии с (19)-(22)) также могут быть сведены к ограничениям вида равенств

$$\Phi_c(r_c(t)) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{(r_c(t) - r_c^*)r_c(t)}{k} = 0, \quad (38)$$

$$\Phi_{ec}(r_{ec}(t)) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{(r_{ec}(t) - r_{ec}^*)r_{ec}(t)}{k} = 0; \quad (39)$$

г) краевые условия: аналогичны пункту "г" явной математической модели.

4. Замечание. Для достаточно общего случая – при гладких перемещающихся многообразиях на левом и правом концах оптимальных траекторий, в [3] предложена непрерывная математическая модель скоростного субградиентного спуска, основанная на методах утопической точки, квадратичных штрафных функций и дифференциальных уравнений. Там же рассмотрен модельный пример, результаты решения которого подтверждают высокую вычислительную эффективность разработанной модели. Предложенные здесь математические модели двухкритериальной оптимизации полностью укладываются в рамки этой модели, с той лишь разницей, что вместо субградиентного спуска необходимо оперировать градиентным спуском.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Matsuoka Yusuru, Kawashina Yasuko, Kainuma Mikiko, Morita Tsuneyuki.** A review of CO₂ Emission Reduction Policies in Japan and an Assessment of Policies of the Annex I Parties for Beyond the Year 2000 // Climate Change: Integrating Science, Economics and Policy, Proc. of a Workshop. 19-20 March, 1996, IIASA, Laxemburg, Austria. - P. 331-347.
2. **Arakelyan A.H., Simonyan H.S.** Dynamic Multiple Objective Decision Support System to Provide the Monitoring and Management the Carbone Dioxide Emission // MOPGP OO: The Fourth International Conference on Multi-Objective Programming and Goal Programming: Theory & Applications. Ustron, Poland. May 29 - June 1. 2000. - P. 17-21.
3. **СИМОНЯН С.О., Аветисян А.Г. СИМОНЯН О.С., Гюзальян Н.Г.** Скоростные субградиентные модели многокритериальных динамических оптимизационных задач // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научн. тр. / ГИУА.- Ереван. - Вып. 3. - С. 182-195.
4. **СИМОНЯН С.О., Аветисян А.Г.** Параллелепипедные ограничения и их гладкие эквиваленты в задачах оптимизации // Сб. мат. год. науч. конф. ГИУА. - Ереван, 2000. - Т.2. - С. 333-335.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.12.2000.

ՀԱ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

ՊԱՐԵՏՈ - ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄԱԿՐՈՏԵԼԵՍԻԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Մշակվել են ածխաթթու գազով (CO₂) շրջակա միջավայրի աղտոտվածության կրճատման և սպառվող էներգիայի մեծացման պարետո-օպտիմալ կառավարման բացահայտ և անբացահայտ դինամիկական մակրոտեղսակալ մոդելներ:

H.S. SIMONYAN

DYNAMIC MACROECONOMIC MODELS OF PARETHO-OPTIMAL CONTROL

Explicit and implicit dynamic macroeconomic models of paretho-optimal control of environment polution reduction by carbon-dioxide (CO₂) and increase of consumable energy are developed.