

Г.Л. АРЕШЯН

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТОДОМ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ИНВЕРСИИ

Предложен новый метод инверсии, который позволяет отображать область относительно любой выпуклой граничной кривой.

Ключевые слова: инверсия, плоские фигуры, окружность, эллипс, отрезок, центральная звезда.

Зададим в плоскости $Z = x + jy = re^{j\varphi}$ замкнутую выпуклую кривую L , содержащую начало координат (рис. 1). Под выпуклостью будем понимать требование, когда любой луч из начала координат пересекает кривую L только в одной точке $M(x_M, y_M)$. Сопоставим точке $A(x, y)$ на луче OM точку $A'(x', y')$ такую, чтобы отрезки OA , OA' и OM соответствовали равенству

$$(OA)(OA') = (OM)^2. \quad (1)$$

Все внутренние точки области G , ограниченной кривой L , однозначно отображаются во внешнюю поверхность комплексной плоскости Z . Точки $M(x_M, y_M)$ граничной кривой L отображаются сами в себя.

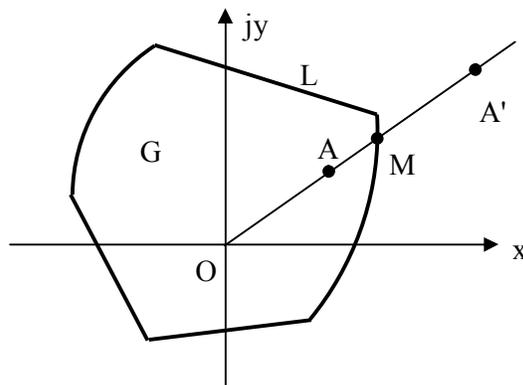


Рис 1. Граничная кривая L , содержащая прямые отрезки. Область G ограничена кривой L

Рассмотрим также комплексную плоскость $\omega = u + jv = \rho e^{j\psi}$, которая содержит такую же граничную кривую L $f(u_L, v_L) = 0$, что и плоскость Z $f(x_L, y_L) = 0$, причем $u_L = x_L$, $v_L = y_L$.

Произведем конформное отображение [1] точек плоскости Z в точки плоскости ω по закону

$$\omega = \frac{R_M^2}{Z^*}, \quad Z^* = x - jy, \quad (2)$$

где

$$R_M^2 = x_M^2 + y_M^2 = u_M^2 + v_M^2. \quad (3)$$

Обратное отображение будет

$$Z = \frac{R_M^2}{\omega^*}, \quad \omega^* = u - jv. \quad (4)$$

Уравнение (2) можно представить в другой форме, если числитель и знаменатель умножить на Z :

$$\omega = R_M^2 \frac{Z}{Z^*Z} = R_M^2 \frac{Z}{|Z|^2} = R_M^2 \frac{x + jy}{x^2 + y^2} = R_M^2 \frac{e^{j\varphi}}{r}. \quad (5)$$

Аналогично для (4) получаем

$$Z = R_M^2 \frac{\omega}{\omega^* \omega} = R_M^2 \frac{\omega}{|\omega|^2} = R_M^2 \frac{u + jv}{u^2 + v^2} = R_M^2 \frac{e^{j\psi}}{\rho}. \quad (6)$$

Точка $A(x, y)$ внутренней области G плоскости Z отображается в точку $A'(u, v)$ плоскости ω , которая лежит во внешней области ограниченной кривой L . При этом аргументы точек A и A' равны друг другу и аргументу точки M :

$$\arg A = \arg A' = \arg M = \varphi = \psi. \quad (7)$$

Точка O начала координат плоскости Z отображается в бесконечно удаленную точку плоскости ω и наоборот, начало координат плоскости ω отображается в бесконечно удаленную точку плоскости Z .

Легко показать, учитывая подобие треугольников (рис.2):

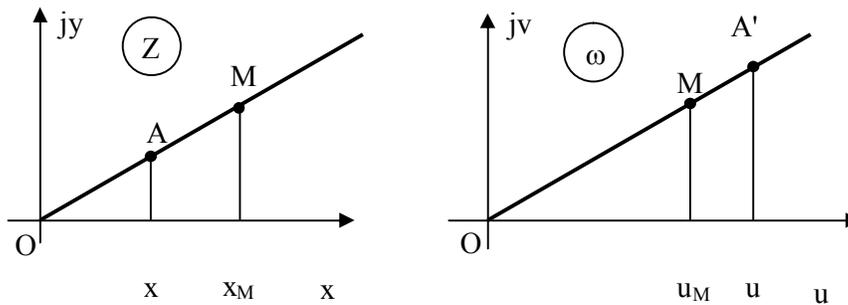


Рис.2. Инверсия точки A в точку A' относительно точки M

- $\Delta OAx \sim \Delta OMx_M = \Delta OMu_M \sim \Delta OA'u$, $x_M = u_M$, $y_M = v_M$,

что, если

$$x = kx_M, \quad y = ky_M, \quad k < 1,$$

то

$$u = \frac{1}{k}u_M = \frac{1}{k}x_M = \frac{1}{k^2}x, \quad v = \frac{1}{k}v_M = \frac{1}{k}y_M = \frac{1}{k^2}y. \quad (9)$$

Равенство (9) справедливо и при $k > 1$. При этом точка A из внешней области плоскости Z отображается в A' , которая находится во внутренней области плоскости ω .

Отображение по закону (2) или (4) назовем отображением методом универсальной инверсии. В зависимости от формы граничной кривой L можно задавать различные инверсии.

Например:

1. Инверсия относительно окружности. В этом случае граничные кривые L в плоскостях Z и ω будут

$$x_M^2 + y_M^2 = R_M^2, \quad u_M^2 + v_M^2 = R_M^2, \quad R_M = \text{const}. \quad (10)$$

Координаты отображенной точки A' будут по (5):

$$\omega = u + jv = R_M^2 \frac{x + jy}{x^2 + y^2}, \quad \text{причем } R_M = \text{const}.$$

Центральные окружности в плоскости Z $x^2 + y^2 = r^2$, $r = kR_M$ отображаются на основании (8) и (9) в центральные окружности в плоскости ω : $u^2 + v^2 = \rho^2$, где $\rho = \frac{1}{k}R_M = \frac{R_M^2}{r}$.

При $k < 1$ внутренние центральные окружности плоскости Z отображаются в центральные внешние окружности плоскости ω . При $k > 1$ внешние окружности плоскости Z отображаются во внутренние окружности плоскости ω . Радиусы внутренних окружностей отображаются в лучи, начинающиеся из точек внешних окружностей и уходящие в бесконечность.

2. Инверсия относительно эллипса. Граничные кривые L в плоскостях Z и ω будут

$$x_M^2/a_M^2 + y_M^2/b_M^2 = 1, \quad u_M^2/a_M^2 + v_M^2/b_M^2 = 1. \quad (11)$$

Координаты отображенной точки A' будут определяться по (5), причем в этом случае $R_M^2 = \text{var}$ и зависит от координат точки M . Покажем, что центральные эллипсы в плоскости Z :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad (12)$$

которые подобны центральному граничному эллипсу L ($a = ka_M, b = kb_M$), отображаются в центральные эллипсы в плоскости ω :

$$u^2/a_1^2 + v^2/b_1^2 = 1. \quad (13)$$

Действительно, подставив в (12) на основании (9) $x = k^2u$, $y = k^2v$, получаем (13), в котором $a_1 = k^{-2}a$, $b_1 = k^{-2}b$.

При $k < 1$ внутренние эллипсы в Z отображаются во внешние эллипсы в ω . При $k > 1$ внешние эллипсы в Z отображаются во внутренние эллипсы в ω .

3. Инверсия относительно отрезка M_1M_2 в центральном угле. В плоскости Z координаты концов отрезка обозначены $M_1(x_{1M}, y_{1M})$, $M_2(x_{2M}, y_{2M})$ (рис.3). В плоскости ω координаты этих точек будут (рис.4) $u_{iM} = x_{iM}$, $v_{iM} = y_{iM}$ ($i=1,2$).

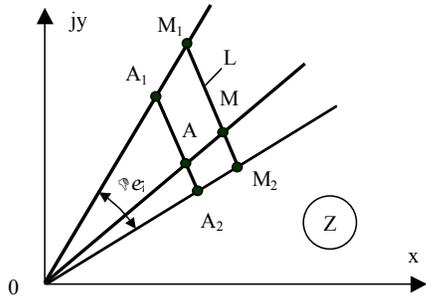


Рис. 3. Отрезок M_1M_2 , являющийся граничной линией L в плоскости Z

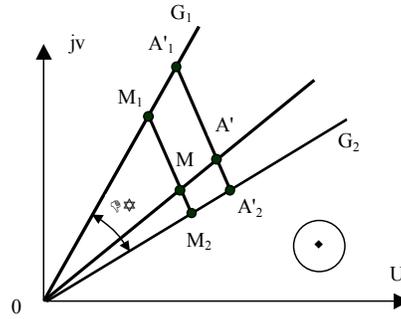


Рис.4. Отрезок M_1M_2 , являющийся граничной линией L в плоскости ω . Отрезок $A'1A'2$ есть отображение отрезка $A1A2$

Отрезки M_1M_2 в плоскостях Z и ω принимаем за граничные линии L . За внутренние области плоскостей Z и ω принимаем области OM_1M_2 , которые образованы центральными лучами, проходящими через точки M_1 и M_2 . Точки внутренней области плоскости Z отображаются уравнением (5) в точки, расположенные в области $S_1M_1M_2S_2$ плоскости ω . Покажем, что точки отрезка A_1A_2 , который параллелен граничной линии M_1M_2 , отображаются в точки, лежащие на отрезке $A'1A'2$, который параллелен отрезку M_1M_2 в плоскости ω . Действительно, ввиду параллельности имеем

$$\begin{aligned} x_1 = ky_{1M}, \quad y_1 = ky_{1M}, \quad x_2 = kx_{2M}, \quad y_2 = kx_{2M}, \\ x = kx_M, \quad y = ky_M, \end{aligned} \quad (14)$$

где координаты точек соответственно обозначены через

$$A_1(x_1y_1), \quad A_2(x_2y_2), \quad A(x,y), \quad M(x_M, y_M).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки A_1 и A_2 , будет

$$(y - y_2)/(x - x_2) = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2). \quad (15)$$

Подставляя на основании (9) значения

$$x = k^2u, \quad y = k^2v, \quad x_i = k^2u_i, \quad y_i = k^2v_i \quad (i = 1, 2)$$

в (15), получаем уравнение отображенного отрезка

$$(v - v_2)/(u - u_2) = (v_1 - v_2)/(u_1 - u_2).$$

4. Инверсия относительно центрального квадрата. В качестве граничной линии L принимаем ребра квадрата с вершинами в точках $\dot{M}_1 = a + ja$, $\dot{M}_2 = a - ja$, $\dot{M}_3 = -a - ja$, $\dot{M}_4 = -a + ja$. Производя инверсию относительно отрезков M_1M_2 , M_2M_3 , M_3M_4 , M_4M_1 (см. предыдущий случай), получаем, что внутренние центральные квадраты в плоскости Z , подобные граничному квадрату L , отображаются во внешние центральные квадраты в плоскости ω . Соответствие точек вершин определяется из (8) и (9).

5. Инверсия относительно центральной звезды с N вершинами. Для обеспечения однозначного отображения ни одно из ребер граничной звезды L не должно совпадать с центральными лучами, исходящими из начала координат. Уравнения (5) и (6) отображают внутренние звезды, подобные граничной звезде L , в плоскости Z (или ω) в подобные звезды во внешней области ω (или Z). Соответствие вершин (или впадин) задается уравнениями (8) и (9).

6. Инверсия относительно произвольной выпуклой кривой. Граничная выпуклая замкнутая кривая L может содержать участки в виде прямых отрезков (рис.1). Легко показать (см. предыдущие разделы), что замкнутые кривые в плоскости Z , подобные L , отображаются в подобные кривые в плоскости ω .

Заключение. В [2] при автоматизации геометрического моделирования различных трехмерных объектов было предложено производить преобразование пространства на основе плоских круговых преобразований, т.е на основании инверсии точек внутренних или внешних областей исходной плоскости (плоскость Z в наших обозначениях) только относительно граничной окружности L . Рассмотренные в настоящей работе конформные отображения методом универсальной инверсии дают возможность производить преобразования областей, используя множество других граничных замкнутых кривых L . Это, несомненно, в огромной степени расширяет области преобразования трехмерных объектов в пространстве и обуславливает возможность (и, наверное, потребность) в новых теоретических исследованиях.

В качестве иллюстрации, на рис. 5 и 6 даны отображения центральных простых кривых D (круг и квадрат) относительно граничных кривых L в плоскости Z в кривые E в плоскости ω .

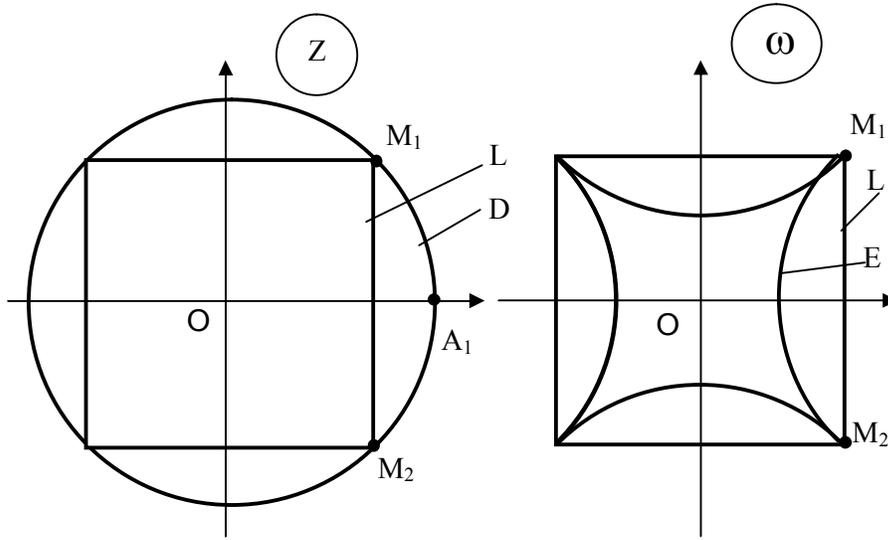


Рис. 5. Описанная окружность D в граничном квадрате L и ее отображение E

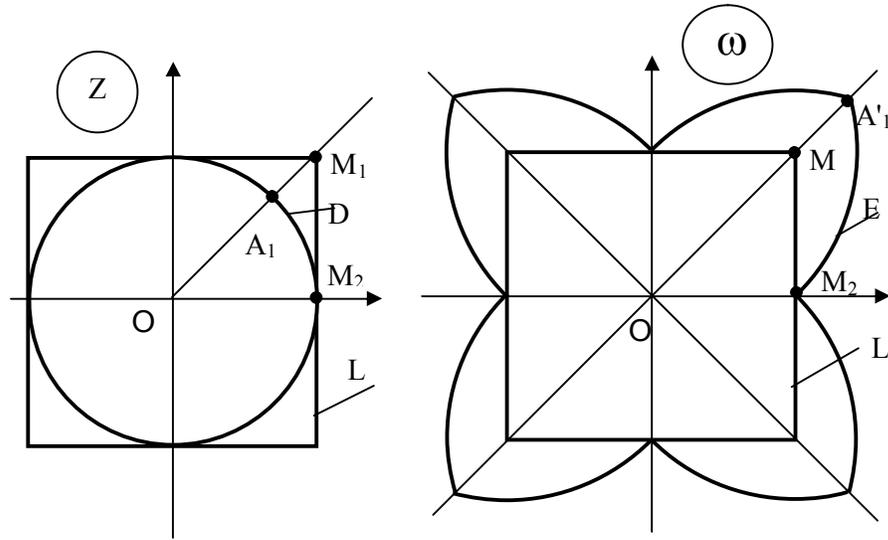


Рис. 6. Вписанная окружность D в граничном квадрате L и ее отображение E

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. – М.; - Л.: Изд. техн. - теор. лит-ры. - 1951.- С. 230.
2. **Казарян Н.Л.** Преобразование пространства на основе плоских круговых преобразований и их применение в автоматизации геометрического моделирования объектов: Дис. ... к.т.н. / ГИУА . – Ереван, 2000. – С.110.

ГИУА.Материал поступил в редакцию 20.08.2000.

Գ.Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ

ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼ ԻՆՎԵՐՍԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ԿՈՆՎԵՔՍ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄ

Առաջարկվում է հակադարձման նոր մեթոդ, որը թույլ է տալիս արտապատկերել տիրույթը ցանկացած ուռուցիկ սահմանային կորի նկատմամբ:

G.L. ARESHYAN

CONFORMAL REPRESENTATION BY UNIVERSAL INVERSION METHOD

A new method of inversion which permits to map the area with respect to any convex boundary curve is proposed.