ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2001. Т. LIV, № 2.

УДК 621.372 ЭНЕРГЕТИКА

В.С. САФАРЯН

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Приводится электрическая модель транспортной задачи, состоящей из нелинейных резисторов, диодов и источников тока. Рассматриваются задачи, родственные к транспортной, приведены их электрические модели. Используя известные свойства решения транспортной задачи, делаются соответствующие выводы о решении режимов рассматриваемых нелинейных цепей.

Ключевые слова: транспортная задача, квазитранспортная задача, опорное решение, двудольный граф, совершенная транспортная задача.

Как известно [1], некоторые простые задачи линейного программирования могут быть решены построением эквивалентных электрических цепей, содержащих источники тока и идеальные диоды. В [1] также показано, что решение любой электрической цепи, состоящей из источников напряжения, источников тока, идеальных трансформаторов, эквивалентно определению оптимального решения задачи линейного программирования. Добавление линейных сопротивлений к этим электрическим элементам обеспечивает более широкую эквивалентность между задачами квадратичного программирования с линейными ограничениями и электрическими цепями.

В [2] приводится электрическая модель транспортной задачи, а также метод решения задач линейного программирования по частям с применением общей теории ортогональных цепей.

Известно, что диакоптика, как самостоятельное направление решения математических и других задач, сформулировалась впервые в работах Г.Крона. Однако предложенные им подходы даны в абстрактном, общем виде, и попытки их непосредственного применения для решения конкретных задач не всегда были успешными.

В отличие от [1,2], в настоящей работе приводится электрическая модель транспортной задачи, состоящая из нелинейных резисторов, диодов и источников тока. Предлагаемая модель отличается своей простотой и может быть использована для решения транспортных задач. Учитывая аналогию между этими задачами и известными свойствами решения транспортной задачи [3], приходим к соответствующим выводам о решении нелинейных задач электрических цепей и наоборот.

Математическая формулировка транспортной задачи [3]: определить значения переменных x_{ij}, которые минимизируют стоимость перевозок

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ a_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

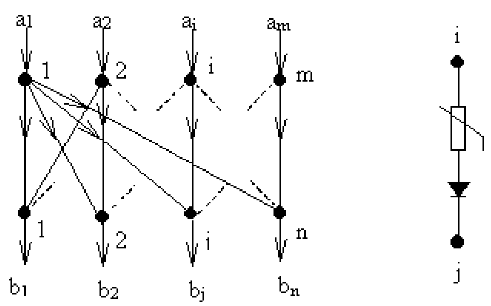
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad b_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$x_{ij}\,(0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5}$$

Построим электрическую цепь, математическая модель которой идентична (1) - (5).

Для этого рассмотрим электрическую цепь, соответствующий граф которой является ориентированным полным двудольным (рис. 1а).



а) б)

Рис. 1

Ветви электрической цепи состоят из идеального диода (ориентированного по направлению ветви) и нелинейного резистора (рис. 1б) с характеристикой $g_{ij} = x_{ij}/c_{ij}$, где g_{ij}- проводимость резистора; x_{ij}- ток через него; c_{ij}- фиксированное напряжение ветви. Характеристика ветви приведена на рис. 2.

Исходя из свойства минимальности потери рассеивания [4], можно показать, что уравнения состояния цепи идентичны (1) - (5). Действительно, (2), (3) представляют собой уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов цепи, (4) обеспечивается характеристикой ветви, (5) представляет собой уравнение баланса узловых токов, а потери в цепи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij}}{x_{ij}} x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Исходя из свойств транспортной задачи [1], можно установить следующие свойства для решений нелинейных цепей с характеристикой, представленой на рис. 2.

а) нелинейные цепи вышеупомянутого типа всегда имеют решение;

б) если значения всех источников токов - целые числа, то токи во всех ветвях также целочисленные;

в) существует решение, состоящее не более чем из m+n-1 токов (опорное решение);

г) если имеется решение, состоящее более чем из m+n-1 токов (неопорное решение), то задача имеет хотя бы два опорных решения;

д) линейная комбинация двух решений также является решением;

е) если имеется неопорное решение, то задача имеет бесконечное число решений.

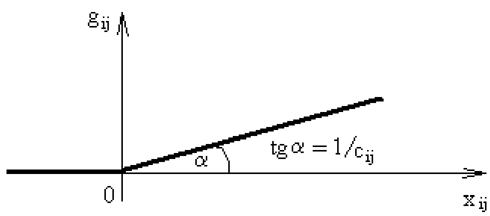


Рис. 2

Последнее свойство вытекает из двух предыдущих.

Исходя из законов Кирхгофа, установим свойство для транспортной задачи.

Очевидно, что цепь, представленная на рис. 1а, содержит m+n узлов, m(n ветвей и m(n-m-n+1 независимых контуров, а также m+n-1 ветвей дерева. При опорном решении ненулевые токи соответствуют ветвям какого-то дерева, при неопорном - из ветвей с ненулевыми токами образуется контур, для которого выполняется второй закон Кирхгофа. Поскольку напряжения на ветвях с ненулевыми токами равны c_{ij}, то можно сделать следующий вывод: если имеется контур, для которого алгебраическая сумма c_{ij} ветвей равна нулю, то транспортная задача имеет бесконечное число решений, в противном случае решение единственное (опорное).

Рассмотрим задачу, двойственную по отношению к рассмотренной транспортной задаче [5].

Определить вектор

$$Y=(u_1, u_2,\ldots,u_m, v_1, v_2,\ldots,v_n), \tag{6}$$

минимизирующий линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{7}$$

при ограничениях

$$v_j - u_i - c_{ij} \le 0,\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Для оптимальности допустимых (удовлетворяющих условиям (2) -(5)) искомых x_{ij} необходимо и достаточно, чтобы среди компонентов вектора (6), удовлетворяющих условию (8), нашелся такой, чтобы $v_j - u_i - c_{ij} = 0$, если $x_{ij} > 0$ [5]. При этом соответствующий вектор (6) является оптимальным в двойственной задаче. Линейная форма (7) представляет собой потери активной мощности, а компоненты вектора (6) - потенциалы узлов рассматриваемой цепи (рис. 1а).

Рассмотрим две задачи, родственные к транспортной.

Квазитранспортная задача. Определить значения переменных x_{ij}, которые минимизируют стоимость перевозок

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left|x_{ij}\right|$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ a_i \ge 0,\ i=\overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ b_j \ge 0,\ j=\overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Квазитранспортную задачу нельзя отнести к классу линейных, поскольку в целевой функции нарушено условие линейности. Электрическая модель квазитранспортной задачи отличается от классической лишь тем, что в ветвях отсутствуют идеальные диоды. При этом характеристика нелинейных резисторов (рис. 3а) имеет вид

$$g_{ij} = \frac{x_{ij}^2}{c_{ij}\left|x_{ij}\right|} = \frac{x_{ij}^2}{c_{ij}\,\mathrm{Sgn}(x_{ij})x_{ij}} = \frac{\left|x_{ij}\right|}{c_{ij}},$$

а вольт-амперная характеристика (рис. 3б):

$$u_{ij} = \frac{x_{ij}}{g_{ij}} = \frac{x_{ij}c_{ij}}{\left|x_{ij}\right|} = \mathrm{Sgn}(x_{ij})c_{ij},$$

где $\mathrm{Sgn}(x_{ij})$ - функция знака; u_{ij} - напряжение на ветви.

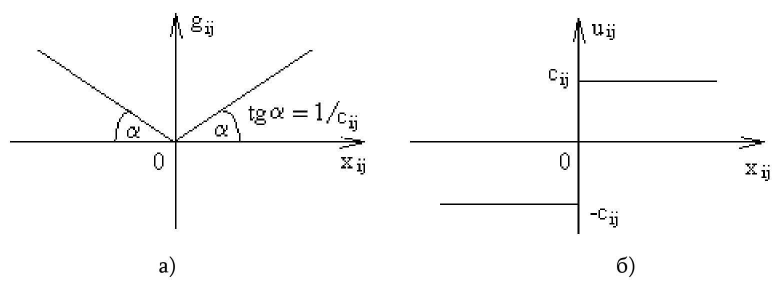
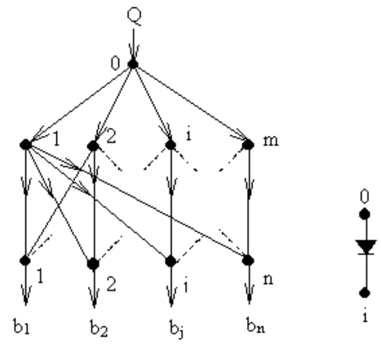


Рис. 3

Следовательно, квазитранспортная задача всегда имеет единст-венное решение [6].

Совершенная транспортная задача (СТЗ). Математическая модель совершенной транспортной задачи отличается от классической (1) - (5) лишь тем, что величины $a_i, i=\overline{1,m}$ рассматриваются как иско-мые. СТЗ не является транспортной задачей в смысле ее классического определения (среди искомых имеются компоненты с отрицательными коэффициентами), но она является задачей линейного программирования. СТЗ можно трактовать как транспортную задачу с оптимальным распределением ресурсов между источниками. Граф электрической цепи, моделирующей СТЗ, представлен на рис. 4а.

В модели СТЗ (рис. 4а) появляется обобщенный узел (0) с входом $Q = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Ветви i-j представлены на рис. 1б, а ветви 0-i содержат лишь идеальные диоды (рис. 4б). Перечисленные выше свойства транспортной задачи справедливы для СТЗ.



а) б)

Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Деннис Дж.Б.** Математическое программирование и электрические цепи. - М.: Иностранная литература, 1961. - 216 с.
2. **Крон Г.** Исследования сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972. - 542 с.
3. **Гасс С.** Линейное программирование. – М.: Физико-математическая литература, 1961. - 303 с.
4. **Дезоер Ч.А., Ку Э.С.** Основы теории цепей. – М.: Связь, 1976. - 286 с.
5. **Мухачева Э.А., Рубенштейн Г.Ш.** Математическое программирование. –Новосибирск : Наука, 1977. - 319 с.
6. **Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С.** Энергетическая теория электрических цепей.- М.: Энергия, 1974. - 151 с.

ЗАО “Институт энергетики РА”. Материал поступил в редакцию 29.03.2000.

Վ.Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Բերվում է տրանսպորտային խնդրի էլեկտրական մոդելը, որը բաղկացած է ոչ գծային դիմադրություններից, դիոդներից և հոսանքի աղբյուրներից։ Դիտարկվում են նաև տրանսպորտայինին մերձավոր խնդիրներ, բերվում են դրանց էլեկտրական մոդելները։ Օգտագործելով տրանսպորտային խնդրի լուծման հանրահայտ հատկությունները, կատարվում են համապատասխան եզրահանգումներ դիտարկվող ոչ գծային շղթաների ռեժիմների լուծման վերաբերյալ։

V. S. SAFARYAN

ELECTRICAL MODEL OF TRANSPORT TASK

An electrical model of transport task consisting of non-linear resistors, diodes and their models are considered. Corresponding conclusions are made on the considered circuit regime solutions by using the well-known characteristics of transport task decision.