

Р.Р. ГЮЛБУДАГЯН

ИЗУЧЕНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В ряде нелинейных автоколебательных электрических цепей исследованы автоколебания тока или напряжения, предложены алгоритм и математическая программа, что дает возможность выявить закон временной зависимости автоколебаний тока или напряжения и вычислить их периоды, а также сделать соответствующий анализ при малых значениях параметра бифуркации $\mu < 1$.

Ключевые слова: автоколебания, индуктивность, туннельный диод, ток, напряжение, бифуркация.

В последние годы возрастает интерес к исследованию электротехнических, физических, биологических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями параметрического вида, что объясняется изучением в этих системах автоколебательных процессов и определенных условий переходов к динамическому хаосу посредством явления бифуркации.

Исследование автоколебательных процессов, протекающих в биологических объектах, целесообразно проводить путем построения радиотехнических моделей. В частности, бифуркация предельного цикла и появление автоколебательных режимов рассматриваются при изучении нервных импульсов в волокнах сердца в модели Пуркинье, описываемой нелинейными электрическими цепями [1].

Этим фактом объясняется интерес к активным нелинейным автономным и неавтономным RCL-цепям, описываемым автономными и неавтономными дифференциальными уравнениями Ван - дер - Поля [2-5].

Целью работы является изучение автоколебательных процессов в нескольких типах нелинейных автономных RLC- цепей, а именно: а) L_0C с последовательно соединенным двухполосником S-типа $-R_sCL_0$; б) L_0C_d - S-типа - $R_sC_dL_0$; в) LC- S-типа - R_sCL ; г) LC_d -S-типа - R_sC_dL ; д) L_0C с параллельно соединенным двухполосником N - типа - R_NCL_0 .

Введем следующие обозначения: L и L_0 – соответственно индуктивность с ферромагнитным сердечником и без него; C – емкость; C_d – емкость закрытого p-n – перехода; i_s и i_N – соответственно сила тока на двухполоснике S- и N-типов; U_N , U_s – соответственно напряжение на двухполоснике N - и S-типов; U_c – напряжение на емкости; R_s , R_N - соответственно сопротивление на двухполоснике S- и N-типов.

ВАХ S-типа описывается следующей степенной функцией:

$$U(i_s, \ell, \mu) = -i_s + \frac{i_s^{2\ell+1}}{\mu}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

μ - параметр бифуркации, который имеет вид

$\mu = \sqrt{C/L}$ для цепи R_sCL [4], $\mu = \sqrt{C_d/L}$ для цепи R_sCdL , $\mu = \sqrt{C/L_0}$ для цепи R_sCL_0 ,
 $\mu = \sqrt{C_d/L_0}$ для цепи R_sCdL_0 , $\mu = \sqrt{L_0/C}$ для цепи R_NCL_0 .

Фазовая плоскость с последовательно подсоединенным двухполюсником S - типа определяется в виде

$$(x, y) = [i_s, (-C/L)^{1/2} U_c]. \quad (2)$$

Фазовая плоскость с параллельно подсоединенным двухполюсником N - типа определяется в виде

$$(x, y) = [U_N, (L/C)^{1/2} i_L]. \quad (3)$$

Коэффициент нелинейности m определяется из соотношения

$$i_C - m i_C^{2\ell+1} = C \frac{dU_c}{dt}, \quad (4)$$

где ℓ - коэффициент, определяющий скорость изменения демпфирующего члена $(x^{2\ell} - \mu)$.

Основываясь на законе Кирхгофа, после некоторых преобразований получим окончательный вид модели, описывающей семейством дифференциальных уравнений [4]:

$$\ddot{x} + [(2\ell + 1)x^{2\ell} - \mu]\dot{x} + x - mx^{2\ell+1} = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Отметим, что дифференцирование в семействе дифференциальных уравнений (5) ведется по масштабированному времени: $t \rightarrow (LC)^{1/2} t$.

При значении коэффициента нелинейности $m=0$ модель (5) принимает вид

$$\ddot{x} + [(2\ell + 1)x^{2\ell} - \mu]\dot{x} + x = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

При $\ell=1$ модель (5) принимает вид

$$\ddot{x} + [3x^2 - \mu]\dot{x} + x - mx^3 = 0, \quad (7)$$

а при $m=0$, $\ell=1$ модель (5) совпадает с известной моделью Ван-дер - Поля, имеющей следующий вид [4]:

$$\ddot{x} + [3x^2 - \mu]\dot{x} + x = 0. \quad (8)$$

Теперь приступим к анализу семейства дифференциальных уравнений (5)-(8). С этой целью приведем следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть $\mu < 1$. Тогда:

а) решения семейства дифференциальных уравнений (5), описывающих автоколебания тока в R_sCL_0 -, R_sCdL_0 -, R_sCdL -, R_sCL - цепях или напряжения в цепи R_NCL_0 , определяются в

$$x(t) = \varepsilon \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{(2\ell+1)!}{4^{\ell+1}} \varepsilon^{2\ell+1} \sum_{j=0}^{2\ell+1} \frac{m \cos at + \sin at}{(\ell+1-j)!(2\ell+1-j)!}, \quad (9)$$

$$j \neq \ell+1, \ell=1,2,3,\dots,$$

$$\text{где } a = \frac{2\pi[2j-(2\ell+1)]}{T}, \quad \varepsilon = \varepsilon(\ell, \mu) = \left(\frac{\mu}{\mu_{2\ell}} \right)^{1/2\ell}, \quad \mu_{2\ell} = \frac{(2\ell+1)!}{2^{2\ell}(\ell+1)! \ell!};$$

б) решения семейства дифференциальных уравнений (6), описывающих колебания тока в указанных цепях, определяются следующим выражением ($m=0$):

$$x(t) = \varepsilon \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{(2\ell+1)}{4^{\ell+1}} \varepsilon^{2\ell+1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell+1}}^{2\ell+1} \frac{\sin at}{(\ell+1-j)!(2\ell+1-j)!}.$$

Утверждение 2. Пусть $\mu < 1$. Тогда:

а) периоды автоколебаний тока, описывающихся моделью (5) в цепях $R_s C L_0$, $R_s C_d L_0$, $R_s C_d L$, $R_N C L_0$, или напряжения в цепи $R_N C L_0$ определяются в виде

$$T(\ell, m, \mu) = 2\pi \left[1 + \frac{m^2 \mu}{2} + \tau_{4\ell} \frac{\mu^2}{\mu_{2\ell}^2} \right],$$

$$\tau_{4\ell} = \frac{m^2 \mu_{2\ell}^2}{4} - \text{Im} C_{2\ell}(0) + \frac{1}{8} \mu_{2\ell}^2 - \frac{\text{Im} C_1^{(2\ell-1)}(0)}{(2\ell-1)!} \mu_{2\ell},$$

$$\begin{aligned} \text{Im} C_{2\ell}(0) &= \frac{(2\ell+1)!}{2^{2\ell+1}} \sum_{k=0}^{2\ell-1} \frac{1}{(2\ell-k)!(k+1)!} \times \\ &\times \left[\frac{(m^2+1)\chi(2\ell-k, \ell)}{k!(2\ell-k)!} + \frac{(2\ell-k)(m^2-1)\chi(k+2, \ell)}{(k+2)!(2\ell-k-1)!} \right] - \frac{m^2+1}{2^{2\ell+1}(2\ell)!} \chi(0, \ell), \end{aligned}$$

$$\chi(k, \ell) = \begin{cases} \frac{(2\ell+1)!}{2^{2\ell+2}(\ell-k+1)!}, & k \neq \ell+1, \\ 0, & k = \ell+1, \end{cases}$$

$$\text{Im} C_1^{(2\ell-1)}(0) = \frac{3}{8} \left(\frac{\frac{\mu}{2} - m}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}}} \right)^{(2\ell-1)} \Bigg/ \mu = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

На рис.1 приведены график автоколебаний тока в цепях R_sCL_0 , R_sCdL_0 , R_sCdL , R_sCL или напряжения в цепи $R_N CL_0$ и их периоды - $T(\ell, \mu, m)$ при определенных значениях коэффициентов ℓ, μ, m .

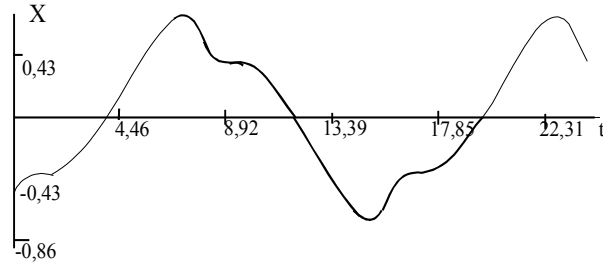


Рис.1

б) периоды автоколебаний тока, описывающихся моделью (6) в цепях R_sCL_0 , R_sCdL_0 , R_sCdL , R_sCL , или напряжения в цепи $R_N CL_0$ определяются в виде ($m=0$)

$$T(\ell, \mu) = 2\pi \left[1 + \tau_{4\ell} \frac{\mu^2}{\mu_{2\ell}} \right], \quad \ell = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\tau_{4\ell} = -\text{Im}C_{2\ell}(0) + \frac{1}{8}\mu_{2\ell}^2 - \frac{\text{Im}C_1^{(2\ell-1)}(0)}{(2\ell-1)!}\mu_{2\ell}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{Im}C_{2\ell}(0) &= \frac{(2\ell+1)!}{2^{2\ell+1}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{2\ell-1} \frac{1}{(2\ell-1)!(k+1)!} \left[\frac{\chi(2\ell-k, \ell)}{k!(2\ell-k)!} + \frac{(2\ell-k)\chi(k+2, \ell)}{(k+2)!(2\ell-k-1)!} \right] - \frac{\chi(0, \ell)}{2^{2\ell+1}(2\ell)!}, \end{aligned}$$

$$\text{Im}C_1^{(2\ell-1)}(0) = \frac{3}{8} \left(\frac{\frac{\mu}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}}} \right)^{(2\ell-1)} \Bigg/ \mu = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

На рис.2 приведены график автоколебаний тока в цепях R_sCL_0 , R_sCdL_0 , R_sCdL , R_sCL или напряжения в цепи $R_N CL_0$ и их периоды - $T(\ell, \mu, m)$ при других значениях коэффициентов ℓ, μ, m .

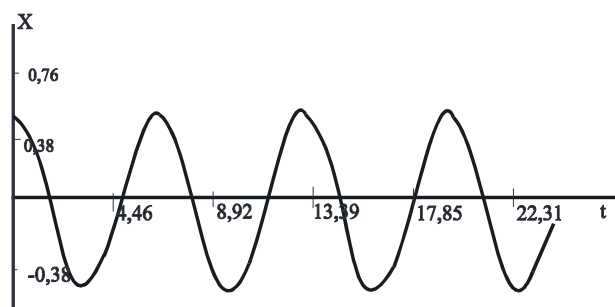


Рис.2

На основе алгоритмов изучения автоколебаний тока в цепях R_sCL_0 , $R_sC_dL_0$, R_sC_dL , R_sCL или напряжения в цепи R_nCL_0 составлена математическая программа на языке C++. С ее помощью открывается возможность построения и изучения графиков автоколебаний тока или напряжения при малых значениях параметра бифуркации $\mu < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асланиди А.Б., Мориев О.А.** Эхо в возбудимых волокнах сердца // Математическое моделирование.-1999. - Т.11, вып. 9. - С. 3-22.
2. **Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Спиро А.Г.** Хаотические колебания в неавтономном генераторе с реактивной нелинейностью // Радиотехника и электроника. – 1983. - Т. 28, ¹ 12. - С. 2389-2398.
3. **Дмитриев А.С., Кислов В.Я.** Странный аттрактор в неавтономном уравнении Ван-дер-Поля // Радиотехника и электроника. – 1982. - ¹ 12. - С. 2454-2456.
4. **Гюлбудаян Р.Р., Агаян С.С.** Динамическая модель автоколебательных процессов // Информатика. –1990. - ¹ 2. - С.79-83.
5. **Gyulbudaghyan R.R.** Modeling of the Relaxation of Auto-Oscillatory Processes in Non-Linear RLC Circuits // Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. – 1998. - Т.19. - С. 89-93.

НИИ «Арматом». Материал поступил в редакцию 14.06.1999.

Ռ.Ռ. ԳՅՈՒԼԲՈՒԴԱԴՅԱՆ

**ԻՆՔՆԱՏԱՏԱՆՈՂԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ
ՈՉ ԳԾԱՑԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇՂԹԱՆԵՐՈՒՄ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼԻ ՀԻՄԱՆ ՎՐԱ**

Հետազոտված են հոսանքի կամ լարման ինքնատատանումները մի շարք ոչ գծային ինքնատատանողական էլեկտրական շղթաներում, առաջարկված է ալգորիթմ և մաթեմատիկական ծրագիր, որոնք հնարավորություն են ընձեռում բացահայտելու հոսանքի կամ լարման ինքնատատանումների ժամանակային կախվածության օրենքը և հաշվելու նրանց պարբերությունները, ինչպես նաև կատարելու գրաֆիկական վերլուծություն բիֆուրկացման պարամետրի փոքր՝ $\mu < 1$ արժեքների դեպքում:

R.R. GYLBUDAGYAN

**AUTOOSCILLATORY PROCESS INVESTIGATION IN NONLINEAR ELECTRIC CIRCUITS
BASED ON A DYNAMIC MODEL**

The current or voltage autooscillations are analyzed in some nonlinear autooscillatory electric circuits as well as an algorithm and a mathematical program are suggested. They enable to reveal the law of time dependence for current and voltage autooscillations and to calculate their periods, as well as to make a suitable analysis in case of small bifurcation parameter $\mu < 1$.