

Г.В. БЕРБЕРЯН

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ НА НЕРЕКУРСИВНОЕ ВИНЕРОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДИАГНОСТИКИ МОЩНЫХ ГИДРОГЕНЕРАТОРОВ

Рассмотрена оценка используемых в системе диагностики технического состояния мощных гидрогенераторов и получаемых экспериментальным путем различных физических величин, оптимальные значения которых могут претерпеть изменения в зависимости от формы выходных сигналов, а также от шага дискретизации и организации порядка выборок.

**Ключевые слова:** оптимальная оценка, среднеквадратичная ошибка, помехи, преобразование Винера-Хопфа.

При построении линейных моделей информационно-измерительных систем (ИИС) для диагностики технического состояния мощных гидрогенераторов приводится оценка измеряемых величин с помощью различных статистик, например, математического ожидания [3,4]. При небольшом количестве наблюдаемых величин  $\vec{y}$  часто используют метод нерекурсивного винеровского оценивания [2] с помощью оптимизируемой весовой функции, или весового вектора  $\vec{H}_{opt}$ , выражение которого определяется формулой Винера-Хопфа [2]:

$$\vec{H}_{opt} = R^{-1} \vec{P}, \quad (1)$$

где  $R^{-1}$  - матрица, обратная автокорреляционной матрице выборок выходного сигнала (вектора)  $\vec{y}$ , равной  $R = E\{\vec{y}(n)\vec{y}^T(n)\}$ , а  $\vec{P} = E\{X(n)\vec{y}(n)\}$  - вектор взаимной корреляции между  $n$ -й (последней) выборкой  $X(n)$  входного сигнала  $x(n)$  и случайным вектором  $\vec{y}(n)$ .

При этом выходной параметр  $\vec{y}$  представляется в виде выборок, являющихся функцией выборок входного сигнала  $x(n)$  и белого шума  $N(n)$ , т.е.

$$y(n) = x(n) + N(n), \quad (2)$$

где  $N(n)$  - выборки аддитивного белого шума.

Оценивание случайной величины  $x$  производится по формуле

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} y(n-k) h_k, \quad (3)$$

где  $y(n-k)$  -  $k$ -я выборка выходного сигнала;  $h_k$  -  $k$ -й элемент  $\vec{H}_{opt}$ ;  $M=2,3,4,\dots$ .

Среднеквадратичная ошибка оценки (СКО) определяется по выражению [1]

$$E\{\epsilon^2(n)\} = E\{X^2(n)\} - \bar{H}_{\text{opt}} \bar{P}, \quad (4)$$

где  $X(n)$  - значение последней выборки.

Анализ показал [4], что изменение указанных величин во времени можно представить синусоидальной, периодически возрастающей-убывающей линейной, знакопеременной и квазипостоянной по значению (в виде меандра) и постоянной по значению и знаку функциями, причем выражение (2) остается в силе.

Используя выкладки, приведенные для синусоидальной функции [2], можно определить  $\bar{H}_{\text{opt}}$ ,  $\bar{P}$ , СКО и  $\hat{x}(n)$  для остальных перечисленных функций путем анализа СКО, позволяющих выяснить влияние формы и способа дискретизации  $y(n)$  на эти величины. С целью сравнения полученных результатов для перечисленных функций в краткой форме изложим результат анализа для синусоидальной функции [2].

1. Так как наблюдаемый сигнал является суммой синусоиды и белого шума, в предположении о том, что частота дискретизации (выборки) фильтра в восемь раз превышает частоту изменения выходного сигнала  $y(n)$ , можно записать

$$y(n) = x(n) + N(n) = \sin(n\pi/4) + N(n), \quad (5)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  - номер выборки.

Для упрощения выкладок целесообразно ограничить размер вектора  $\bar{H}_{\text{opt}}$  до 4. Тогда в соответствии с (1) матрицу  $R$  представим как

$$R = E\{\bar{Y}(n) \cdot \bar{Y}^T(n)\} = E\left\{\begin{pmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ y(n-2) \\ y(n-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ y(n-2) \\ y(n-3) \end{pmatrix}^T\right\} =$$

$$= E\begin{pmatrix} y^2(n) & y(n) \cdot y(n-1) & y(n) \cdot y(n-2) & y(n) \cdot y(n-3) \\ y(n) \cdot y(n-1) & y^2(n) & y(n) \cdot y(n-1) & y(n) \cdot y(n-2) \\ y(n) \cdot y(n-2) & y(n) \cdot y(n-1) & y^2(n) & y(n) \cdot y(n-1) \\ y(n) \cdot y(n-3) & y(n) \cdot y(n-2) & y(n) \cdot y(n-1) & y^2(n) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а вектор  $\bar{P}$  в виде

$$\bar{P} = E\left\{X(n) \begin{pmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ y(n-2) \\ y(n-3) \end{pmatrix}\right\}. \quad (7)$$

Опуская выкладки, приведенные в [2], представим выражения  $R, R^{-1}, \bar{H}_{\text{opt}}, \bar{P}, \hat{x}(n)$  и СКО для этого случая в виде

$$R = \begin{pmatrix} a & b & 0 & -b \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ -b & 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $a=1/2+\sigma^2(n)$ , причем  $\sigma^2(n)$  – дисперсия белого шума,  $b=1/2\sqrt{2}$ ;

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & -b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & b_1 & a_1 & b_1 \\ -b_1 & 0 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $a_1 = -a/(2b^2-a^2)$ ,  $b_1=b/(2b^2-a^2)$ ;

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$\bar{H}_{\text{opt}} = R^{-1} \cdot \bar{P} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \\ j \end{pmatrix} = \frac{1}{2[1+\sigma^2(n)]} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad (11)$$

$\hat{x}(n) = [1/2 + \sigma^2(n)] / 2[1 + \sigma^2(n)]$ , причем для  $\sigma^2(n)=0$  -  $\hat{x}(n)=0,25$ , а при  $\sigma^2(n)=0,5$  -  $\hat{x}(n)=0,3$ ;  $E\{e^2(n)\} = E\{X^2(n)\} - \bar{H}_{\text{opt}} \cdot \bar{P} =$   
 $= \sigma^2(n)/(2[1+\sigma^2(n)])$ , причем при  $\sigma^2(n)=0$  следует, что  $E\{e^2(n)\} = 0$ , а при  $\sigma^2(n)=0,5$  (отношение сигнал/шум  $S/N=0$  дБ) СКО равна  $1/6$  (до процесса оценивания СКО равна  $1/2$ ).

2. Рассмотрим случай выходного сигнала, представленного суммой константы  $A$  с аддитивным шумом  $N(n)$ , т.е.  $y(n) = x(n) + N(n) = A + N(n)$ , причем без нарушения общности и упрощения анализа можно принять  $A=1$ .

Тогда в силу тех же исходных допущений элементы  $R$  и  $R^{-1}$  имеют всего по два различных значения:  $a, b$  и  $a_1, a_2$  соответственно, причем  $a = 1 + \sigma^2(n) = 1 + \alpha$  и  $a_1 = (3\alpha^2 + \alpha^3)/\Delta$  – диагональные элементы,  $b=1$  и  $a_2 = -\alpha^2/\Delta$  – все остальные, а  $\Delta = \det R = \alpha^4 + 4\alpha^3$ . Кроме того, т.к.  $c=d=e=f=1$ , то  $g=h=i=j=a_1+3a_2=1/(4+\alpha)$ , вследствие чего

$$E\{e^2(n)\} = 1-4/(4+\alpha),$$

$$а \quad \hat{x}(n) = 4x(n)/(\alpha+4) + [N(n)+N(n-1)+N(n-2)+N(n-3)]/4 = 4x(n)/(\alpha+4)$$

из-за равенства нулю выражения в квадратных скобках в силу равенства нулю среднего значения белого шума. При  $\alpha=0$   $E\{e^2(n)\} = 0$ ,  $g=h=i=j=1/4$ ,  $\hat{x}(n)=1$ , а при  $\alpha \rightarrow 0$  -  $E\{e^2(n)\} \rightarrow 0$ ,  $g=h=i=j=1/4$  и  $\hat{x}(n)=1$ .

3. Изменение выходной величины представляется в виде меандра-постоянной по значению и знакопеременной, т.е. периодически изменяющейся, например, со скважностью, равной двум, функции (рис.1), так что выходной сигнал в общем виде записывается, как и в предыдущем случае, в форме  $y(n) = x(n) + N(n)$ .

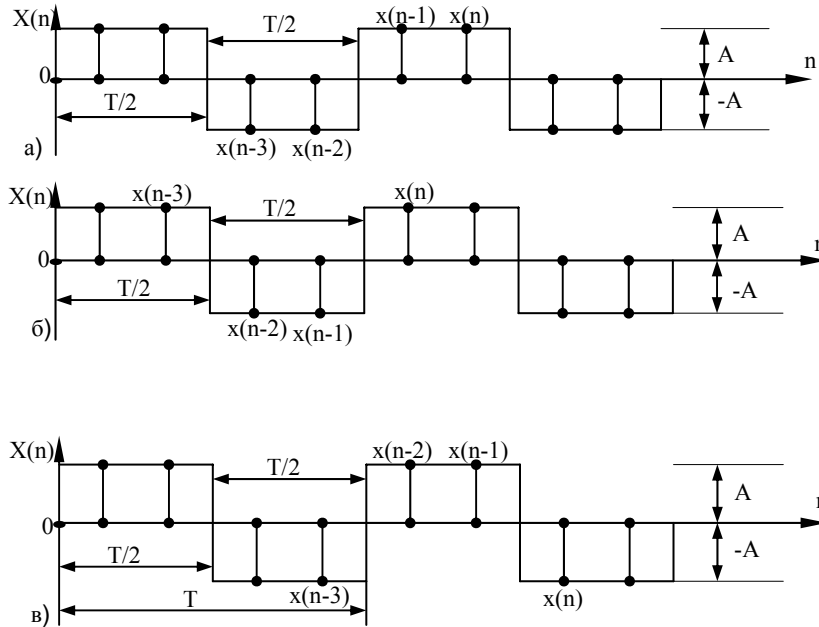


Рис.1

Как видно (рис.1 а,б,в), при равномерном шаге дискретизации и любой организации процесса выборки матрица  $R$  и вектор  $\vec{P}$  структурно изменяются так, что вектор  $\vec{N}_{opt}$  остается неизменным. Поэтому матрицу  $R$  и вектор  $\vec{P}$  составим на основе организации выборки (рис.2а) в соответствии с общими выражениями (6) и (7), полагая  $A=1$ . При этом диагональные элементы  $R$  равны  $a=1+\sigma^2(n)=1+\alpha$ ,  $a_{12}=a_{21}=a_{34}=a_{43}=1$ ,  $a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=a_{31}=a_{32}=a_{41}=a_{42}=-1$ .

Эта матрица симметричная, т.е.  $R^T=R$ , поэтому элементы матрицы  $R^{-1}$  можно определить непосредственно по элементам  $R$ , причем получается три разных элемента:

где  $\Delta = \det R$  и  $\alpha^3 + \alpha^2 = R_{11}$ ,  $-\alpha^2 = R_{12}$ ,  $\alpha^2 = R_{13} = R_{14}$  – алгебраические дополнения первой строки матрицы  $R$ .

Поэтому  $\Delta = \det R = (1+\alpha)R_{11} + (-1)R_{12} + 1 \cdot R_{13} + (-1)R_{14} = \alpha^4 + 4\alpha^3$ , причем для вектора  $\vec{P}$  –  $c=d=1$ ,  $e=f=-1$ , а для  $\vec{H}_{opt}$  –  $g=h=1/(4+\alpha)$  и  $i=j=-1/(4+\alpha)$ .

В итоге значение СКО на основании (4) равно  $E\{e^2(n)\} = 1 - 4 \cdot 1/(4 + \alpha)$ , которое при  $\alpha=0$  тоже равно нулю,  $g=h=1/4$ , а  $i=j=-1/4$ . При  $\alpha \neq 0$  значение СКО зависит от  $\alpha$ . Например, при  $\alpha=1/2$   $E\{e^2(n)\} = 1 - 4 \cdot 1/(4 + 0,5) \approx 0,1$ , а элементы  $\vec{H}_{opt}$  отличаются от значения  $1/4$  на  $0,028 \cdot [1/(4 + 0,5)] \approx 0,222$  вместо  $0,25$ , что вполне допустимо для большинства практических целей диагностики.

То же самое относится и к оценке  $\hat{x}(n)$ , с той лишь разницей, что элементы  $j$  и  $h$   $\vec{H}_{opt}$  – положительные, а  $i$  и  $j$  – отрицательные, но это не меняет сути, т.к. выборки  $y(n)$ , соответствующие этим элементам, равны по значению и имеют те же знаки, что и одноименные элементы указанного вектора. Что касается влияния скважности, то легко заметить, что при любом шаге дискретизации и порядке выборок оно полностью отсутствует.

Таким образом, результаты рассматриваемого случая полностью совпали с результатом предыдущего примера.

4. Рассмотрим случай изменения входной величины по периодически возрастающему-убывающему линейному закону с периодом  $T$  (с одинаковым по абсолютному значению угловым коэффициентом) от некоторого положительного ( $x_{max}=A$ ) до отрицательного значения ( $x_{min}=-A$ ). При этом можно принять  $A=x_{max}=|x_{min}|=1$  (рис.2).

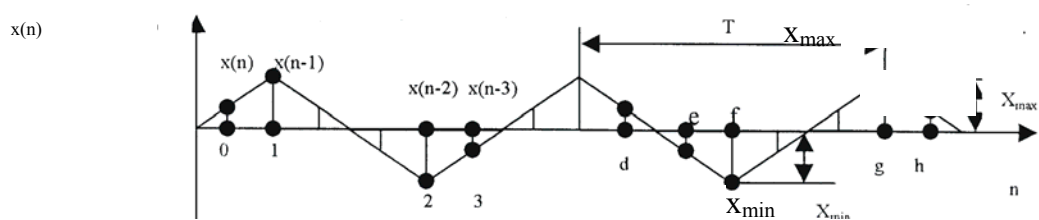


Рис. 2

Как и прежде, можно записать  $y(n)=x(n)+N(n)$  и выяснить, как влияет выбор шага дискретизации на точность оценивания. Исходным условием является то, что частота выборок по меньшей мере должна вдвое превышать частоту повторения  $f=1/T$ , а  $M=4$ . Другим вопросом, касающимся выбора шага дискретизации, является выяснение влияния вида и порядка этого выбора на СКО. При этом нетрудно заметить, что прямой ответ на последний вопрос вытекает непосредственно из сравнения структур матрицы  $R$  четвертого порядка без обращения и

вектора  $\vec{P}$ , причем, если  $R$  и  $\vec{P}$  остаются неизменными, то это является признаком независимости ошибки оценивания от порядка выборок, в противном случае такая зависимость может существовать.

Пусть выборки производятся с неравномерным шагом в точках 0, 1, 2 и 3 графика изменений  $x(n)$  выражения на рис.2. При этом, обозначив  $E\{N^2(n)\}=\sigma^2(n)=\alpha$  и приняв  $A=1$ , запишем элементы матрицы  $R$  и вектора  $\vec{P}$  при такой организации выборок, что

$$x(n)=x(n-1)/2=A/2=1/2, \quad x(n-3)=x(n-2)/2=-A/2=-1/2;$$

диагональные элементы матрицы-

$$a_{11}=a_{44}=(1/4)+\alpha, a_{22}=a_{33}=1+\alpha, \\ a_{12}=a_{21}=a_{34}=a_{43}=1/2, \quad a_{13}=a_{24}=a_{31}=a_{42}=-1/2, a_{23}=a_{32}=-1;$$

элементы  $\vec{P}$ :  $c=1/4, d=1/2, e=-1/2, f=-1/4$ .

При другой организации выборок, такой, что  $x(n)=x(n-1)/2=-1/2$ ,  $x(n-1)=-1$ ,  $x(n-2)=1$  и  $x(n-3)=x(n-2)/2=1/2$  (выборки производятся в точках e, f, g и h, рис.2), и таком же неравномерном шаге дискретизации, как в предыдущем случае, придем к такому же результату. Если же принять за  $x(n)$  значение входной величины в точке d так, что  $x_d=x(n)=A/2=1/2$ ,  $x(n-1)=-1$ ,  $x_g=x(n-2)=1$ ,  $x_h=x(n-3)=1/2$ , и одновременно изменить шаг дискретизации, то элементы матрицы  $R$  и вектора  $\vec{P}$  получатся в следующем виде:

$$a_{11}=a_{44}=(1/4)+\alpha, \quad a_{22}=a_{33}=1+\alpha, a_{12}=a_{21}=a_{42}=-1/2, \quad a_{13}=a_{24}=a_{31}=a_{34}=a_{43}=1/2, \quad a_{23}=a_{32}=-1, \quad a_{14}=a_{41}=1/4; \\ c=f=1/4, d=-1/2, e=1/2.$$

Легко заметить, что  $R$  и  $\vec{P}$  претерпевают существенные изменения, которые предположительно могут вызвать изменение элементов  $R^{-1}$ , а следовательно, и элементов вектора  $\vec{N}_{opt}$  и далее СКО.

Допустив  $R=R^T$  ( $R$  – симметричная матрица), рассчитаем  $R$ ,  $R^{-1}$ ,  $\vec{N}_{opt}$  и СКО для первых двух случаев.

В силу симметричности  $R$  матрица  $R^{-1}$  получается тоже симметричной, причем одинаковым значениям элементов матрицы  $R$  соответствуют одинаковые значения тех же элементов  $R^{-1}$ , т.е. если

$$a_{11R}=a_{44R}, a_{12R}=a_{21R}=a_{34R}=a_{43R}, a_{22R}=a_{33R}, a_{23R}=a_{32R}, a_{14R}=a_{41R}, \\ a_{13R}=a_{31R}=a_{24R},$$

то то же самое остается неизменным при замене в индексах  $R$  на  $R^{-1}$ .

Запишем выражение алгебраических дополнений для различных элементов матрицы  $R$ , число которых, очевидно, равно количеству перечисленных равенств – шести:

$$R_{11}=(4\alpha^3+9\alpha^2)/4, R_{12}=-\alpha^2/2,$$

$$R_{13}=\alpha^2/2, R_{14}=\alpha^2/4, R_{22}=(2\alpha^3+3\alpha^2)/2 \quad \text{и} \quad R_{23}=\alpha^2, \quad \text{и соответствующего}$$

$$\Delta=\det R=a_{11R} \cdot R_{11}+a_{12R} \cdot R_{12}+a_{13R} \cdot R_{13}+$$

$$+a_{14R} \cdot R_{14}=(2\alpha^4+5\alpha^3)/2,$$

где  $a_{11R}$ ,  $a_{12R}$ ,  $a_{13R}$  и  $a_{14R}$  – элементы первой строки матрицы  $R$ .

Выражения элементов  $R^{-1}$  получаются в виде  $a_{11R^{-1}} = (4\alpha + 9) / 2\Delta_1$ ,

$a_{12R^{-1}} = -1 / \Delta_1$ ,  $a_{13R^{-1}} = 1 / \Delta_1$ ,  $a_{14R^{-1}} = 1 / 2\Delta_1$ ,  $a_{22R^{-1}} = (2\alpha + 3) / \Delta_1$  и

$a_{23R^{-1}} = 2 / \Delta_1$ , причем  $\Delta_1 = 2\alpha^2 + 5\alpha$ .

Элементы  $\vec{N}_{opt}$  запишутся в виде:  $g=1/(4(+10)$ ,  $h=2g$ ,  $i=-2g$  и  $j=-g$ .

При  $\alpha=0$  имеем  $g=1/10$ ,  $h=1/5$ ,  $i=-1/5$  и  $j=-1/10$ , а

$$E\{e^2(n)\} = 1/4 - [(1/10 \quad 1/5 \quad -1/5 \quad -1/10) \times \\ \times (1/4 \quad 1/2 \quad -1/2 \quad -1/4)] = 0.$$

При этом

$$\hat{x}(n) = y(n) \cdot h_0 + y(n-1) \cdot h_1 + y(n-2) \cdot h_2 + y(n-3) \cdot h_3 = \\ = (1/2) \cdot (1/10) + 1 \cdot (1/5) + (-1) \cdot (-1/5) + (-1/2) \cdot (-1/10) = 1/2.$$

Как видно из расчетов, за явными изменениями  $R$  может быть скрыта неизменность СКО и  $\hat{x}(n)$ . Поэтому, во избежание ошибочных выводов, необходимо рассчитать  $R^{-1}$ ,  $\vec{P}$  и  $\vec{N}_{opt}$  и прямой подстановкой выражения СКО и  $\hat{x}(n)$  убедиться в неизменности последних.

В самом деле, при изменении структуры матрицы  $R$ , возникшем при другом порядке выборок и шаге дискретизации (рис.2),

$$R_{11} = (4\alpha^3 + 9\alpha^2) / 4, R_{12} = \alpha^2 / 2, R_{13} = -R_{12} \text{ и}$$

$\Delta = \det R = (2\alpha^4 + 5\alpha^3) / 2$ , а элементы

$$a_{11R^{-1}} = (4\alpha + 9) / 2\Delta_1, a_{12R^{-1}} = 1 / \Delta_1, a_{13R^{-1}} = -a_{12R^{-1}}, a_{14R^{-1}} = -a_{12R^{-1}} / 2,$$

$a_{22R^{-1}} = (2\alpha + 3) / \Delta_1$  и  $a_{23R^{-1}} = 2 / \Delta_1$ , т.е. структура  $R^{-1}$  изменилась так же, как и структура  $\vec{N}_{opt}$ :  $g=j=1/(4(+10)$ ,  $g=-i=1/(2(+5))$ .

Прямой подстановкой элементов  $\vec{N}_{opt}$  и  $\vec{P}$  в выражения СКО  $\hat{x}(n)$  можно убедиться, что последние остались неизменными, а при  $\alpha=0$  значение СКО равно нулю,  $\hat{x}(n)=1/2$ . При  $\alpha \neq 0$ , например,  $\alpha=1/2$ , СКО равна 0,05, а  $\hat{x}(n)=0,4$ .

Таким образом, пришли к заключению, что СКО и  $\hat{x}(n)$  не зависят от изменения шага дискретизации и организации порядка выборки.

В итоге отметим, что для уменьшения СКО можно увеличить размер  $M$ , но это связано с резким увеличением объема вычислительных операций и уменьшением быстродействия ИИС, что может оказаться недопустимым.

Полученные результаты являются вполне удовлетворительными для большинства практических целей диагностики, достигаемых с помощью относительно несложных, а потому и более надежных ИИС. Они позволяют синтезировать комбинированные алгоритмы оценивания,

с помощью которых, помимо предсказания состояний непосредственно по оцениваемым параметрам, оказывается возможным реализовать этот процесс по зависимости последних от  $\alpha$ , причины возникновения и изменения которого могут служить дополнительными информативными признаками указанной диагностики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кукс Я., Ольман В.** Минимаксная линейная оценка коэффициентов регрессии // Изв. АН ЭССР. Физ. и Матем. - 1972. - Т.21, <sup>1</sup> 1. - С. 66-72.
2. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. **К.Ф. Коуэна** и **П.М. Гранта**. - М.: Мир, 1988. - 392 с.
3. Статистические методы для ЭВМ: Пер. с англ. / Под ред. **К. Энслейна**, **Э. Рэлстона**, **Г.С. Уилфа**. - М.: Наука, 1986. - 464 с.
4. **Сипайлов Г.А., Санников Д.И., Жадан В.А.** Тепловые, гидравлические и аэродинамические расчеты в электрических машинах. - М.: Высшая школа, 1989. - 239 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.04.1999

### Գ.Վ. ԲԵՐԲԵՐՅԱՆ

**ՎԻՆԵՐԻ ՈՉ ՌԵԿՐՍԻՎ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՎՐԱ ԵԼՔԱՅԻՆ ԱԶԴԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ՁԵՎԻ ԳՈՐԾՈՂ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՀԶՈՐ ՀԴԴՐՈԳԵՆԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ԱՄՏՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ**

Դիտարկված է խոշոր հիդրոգեներատորների տեխնիկական վիճակի ախտորոշման համակարգում օգտագործվող և փորձական եղանակով որոշվող զանազան ֆիզիկական մեծությունների գնահատումը, որոնց օպտիմալ արժեքները զգալիորեն կախված են ազդանշանների ձևերից և կարող են որոշ պայմաններում փոփոխվել ընդհատավորման քայլի, ինչպես նաև ընտրանքների ընթացքի կազմակերպման կարգի փոփոխության հետևանքով:

### G.V.BERBERYAN

#### INVESTIGATION OF INFLUENCE OF THE OUTPUT SIGNAL WAVE-FORMS ON THE NONRECURSIVE WIENER ESTIMATION IN THE HIGH-POWER HYDROGENERATOR DIAGNOSTICS SYSTEM

Estimations used in the high-power hydrogenerator technical condition diagnostics system and experimentally obtained, different physical quantities are considered, the optimal values of estimations being subjected to the variations in terms of output signal form, as well as discretization of step change and organization of sampling order.