

Р.М. АВАГЯН

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Приводится алгоритм приближенного интегрирования системы с применением метода разложения вектора решения в сходящиеся степенные ряды. Исследуется область сходимости этих рядов. Дается конструктивная оценка радиуса сходимости.

Ключевые слова: приближенное интегрирование, сходящиеся степенные ряды, радиус сходимости, динамические процессы.

Исследование динамических процессов в короткозамкнутом асинхронном двигателе (АД) сводится к решению задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1,2]:

$$\begin{aligned}\psi'_d &= -T_s^{-1} \psi_d + K_R T_s^{-1} \psi_D + \omega_c \psi_q + U_d, \\ \psi'_q &= -T_s^{-1} \psi_q + K_R T_s^{-1} \psi_Q + \omega_c \psi_d + U_q, \\ \psi'_D &= -T_R^{-1} \psi_D + K_S T_s^{-1} \psi_d + (\omega_c - \omega_{cR}) \psi_Q, \\ \psi'_Q &= -T_R^{-1} \psi_Q + K_S T_s^{-1} \psi_q + (\omega_c - \omega_{cR}) \psi_D, \\ \omega'_R &= H^{-1} [K_S K_R (\sigma X_{SR})^{-1} (\psi_q \psi_D - \psi_d \psi_Q) - M]\end{aligned}$$

на некотором интервале времени $[t_0, t_0 + T]$ при начальных условиях

$$t = t_0, \quad \psi_d = \psi_{d0}, \quad \psi_q = \psi_{q0}, \quad \psi_D = \psi_{D0}, \quad \psi_Q = \psi_{Q0}, \quad \omega_R = \omega_{R0}. \quad (2)$$

Система уравнений (1) записана в относительных единицах и описывает динамические процессы АД в синхронно-вращающейся системе координат d, q . Коэффициенты T_s и T_R представляют собой соответственно постоянные времени обмотки статора и ротора (при замкнутых накоротко обмотках ротора и статора соответственно) и определяются через активные и индуктивные параметры АД следующими формулами:

$$T_s = \sigma X_S / r_S, \quad T_R = \sigma X_R / r_R,$$

где σ - коэффициент рассеяния,

$$\sigma = 1 - X_{SR}^2 / X_S X_R;$$

K_S и K_R - коэффициенты связи обмоток статора и ротора соответственно,

$$K_S = X_{SR} / X_S, \quad K_R = X_{SR} / X_R;$$

H - инерционная постоянная АД.

Система уравнений (1) удобна для оценок величин ее отдельных членов, так как коэффициенты $K_s, K_R, \sigma, T_s, T_R, H$ изменяются в сравнительно узких пределах при изменении мощности АД в широком диапазоне.

Ниже приводится алгоритм приближенного интегрирования системы (1) с применением метода разложения вектора решения в сходящиеся степенные ряды. Исследуется область сходимости этих рядов и дается конструктивная оценка радиуса сходимости. Базой для применения метода разложения решения в сходящиеся степенные ряды служит следующее основное выражение [3,4]:

$$X'_j = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \quad j=1, 2, \dots, m$$

с начальным условием $X_j(t_0) = X_{j0}$.

Правые части f_j в окрестности точки $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ суть аналитические функции своих аргументов, то есть разлагаются в кратный сходящийся степенной ряд

$$f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{K_0 K_1 \dots K_m} a^j_{K_0 K_1 \dots K_m} K_0 K_1 \dots K_m (t - t_0)^{K_0} (x_1 - x_{10})^{K_1} \dots (x_m - x_{m0})^{K_m}.$$

При значениях t , близких к t_0 , решение задачи Коши существует и представляется разложениями в сходящиеся степенные ряды Тейлора:

$$X_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_j^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

где $X_j^{(n)}(t_0)$ - производная n -го порядка функции $X_j(t)$ в точке t_0 .

При этом, если функции $f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_m)$ аналитичны в области

$$|t - t_0| \leq \alpha, |x_j - x_{j0}| \leq \beta, \quad j=1, 2, \dots, m$$

изменения величин $t, x_1, x_2, \dots, x_m$, и в этой области

$$|f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_m)| \leq \mu,$$

где μ - некоторая положительная постоянная, то ряды (6) сходятся в интервале

$$|t - t_0| \leq h = \min(\alpha, \beta / \mu).$$

Ограничение области сходимости условием (9) вполне естественно. Действительно, с одной стороны требование $h \leq \alpha$, очевидно, является необходимым. С другой стороны, требование $h \leq \beta / \mu$ обусловлено тем, что если $X_j = X_j(t)$ является решением задачи (3) на отрезке $[t_0; t_0 + \alpha]$, то из условия $|X_j'(t)| \leq \mu$ следует

$$|X_j(t)| \leq \mu(t - t_0).$$

Учитывая (7), имеем $t - t_0 \leq \beta / \mu$. Отметим, что задача оценки радиуса сходимости рядов (6) для метода разложения в степенные ряды имеет важное практическое значение. Если $t - t_0$ больше радиуса сходимости какого-нибудь из рядов (6), то при усечении ряда и приближенном представлении решения в виде полинома

$$X_j^N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{X_j^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$$

погрешность с увеличением N не стремится к нулю, и метод степенных рядов неприменим. Если же $t - t_0$ меньше радиуса сходимости, то любая наперед заданная точность счета ε обеспечивается соответствующим выбором числа N из условия

$$\left| X_j^{N+1}(t) - X_j^N(t) \right| = \left| \frac{X_j^{(N+1)}}{(N+1)!} (t - t_0)^{(N+1)} \right| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Коэффициенты $X_j^n(t_0)$ в (6) определяются последовательным дифференцированием уравнений (3) в точке t_0 :

$$\begin{aligned} X_j(t_0) &= X_{j0}; \\ 1! X_j^{(1)}(t_0) &= f_j(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}); \\ 2! X_j^{(2)}(t_0) &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \right)^0 + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right) x'_1(t_0) + \dots + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_m} \right) x'_m(t_0); \\ 3! X_j^{(3)}(t_0) &= \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} \right)^0 + 2 \left[\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial t \partial x_1} \right)^0 x'_1(t_0) + \dots + \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_m \partial t} \right)^0 x'_m(t_0) \right] + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1^2} \right)^0 x'_1(t_0)^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_m^2} \right)^0 x'_m(t_0)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right)^0 x''_1(t_0) + \dots + \\ &+ \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_m} \right)^0 x''_m(t_0), \end{aligned} \quad (12)$$

где частные производные с индексом "0" означают значения этих производных в точке $(t_0, x_{10}, \dots, x_{m0})$.

С целью определения радиуса сходимости h для рядов (6) при интегрировании системы (1) максимальные значения управляющих и возмущающих переменных для конкретного процесса обычно задаются с определенной точностью. Таким образом,

$$|U_d| \leq U_{dm}; |U_q| \leq U_{qm}; |\omega_c| \leq \omega_{cm}; |M| \leq M_m,$$

где $U_{dm}, U_{qm}, \omega_{cm}, M_m$ - максимальные значения составляющих подведенного к обмотке статора АД напряжения, его круговой частоты и нагрузочного момента соответственно.

Функции $U_d(t), U_q(t), \omega_c(t), M(t)$ обычно являются аналитическими или кусочно-аналитическими по времени. Соответственно являются аналитическими или кусочно-аналитическими и правые части уравнений (1). В первом случае области аналитичности правых частей (1) определяются неравенствами

$$\begin{aligned} |t - t_0| &\leq \alpha; |\psi_d - \psi_{d0}| \leq \beta; |\psi_q - \psi_{q0}| \leq \beta; \\ |\psi_D - \psi_{D0}| &\leq \beta; |\psi_Q - \psi_{Q0}| \leq \beta; |\omega_R - \omega_{R0}| \leq \beta, \end{aligned}$$

где α совпадает с длиной интервала интегрирования T_1 , а β - произвольное положительное, $0 \leq \beta < \infty$.

Общий радиус сходимости рядов (6) для системы (1) определяем по условию (9). Так как особый интерес представляет определение по возможности наибольшего радиуса сходимости, то условие (9) перепишем в виде

$$h = \min[\alpha, \max(\beta / \mu)], \quad (15)$$

и задача сводится к определению $\max(\beta / \mu)$. Рассмотрим β как свободный параметр, и для каждого уравнения системы (1), используя условия (14), представим μ как функцию от β . Соответственно имеем пять функций

$$\begin{aligned} \mu_d &= \mu_d(\beta); \mu_q = \mu_q(\beta); \mu_D = \mu_D(\beta); \\ \mu_Q &= \mu_Q(\beta); \mu_R = \mu_R(\beta), \end{aligned} \quad (16)$$

по которым определяем величины

$$\max(\beta / \mu_d), \max(\beta / \mu_q), \max(\beta / \mu_D), \max(\beta / \mu_Q), \max(\beta / \mu_R).$$

Общий радиус сходимости определяем в виде

$$h = \min[\alpha, \max(\beta / \mu_d), \max(\beta / \mu_q), \max(\beta / \mu_D), \max(\beta / \mu_Q), \max(\beta / \mu_R)].$$

В соответствии с (14) имеем

$$\begin{aligned} |\psi_d| - |\psi_{d0}| &\leq |\psi_d - \psi_{d0}| \leq \beta; |\psi_d| \leq \beta + |\psi_{d0}|; |\psi_q| \leq \beta + |\psi_{q0}|; \\ |\psi_D| &\leq \beta + |\psi_{D0}|; |\psi_Q| \leq \beta + |\psi_{Q0}|; |\omega_R| \leq \beta + |\omega_{R0}|. \end{aligned} \quad (18)$$

Для первого уравнения системы (1), используя неравенства (18) и условие $K_R < 1$, получим

$$\begin{aligned}
|\dot{\psi}_d| &= \left| -T_s^{-1} \psi_d + K_R T_s^{-1} \psi_D + \omega_c \psi_q + U_d \right| \leq \\
&\leq T_s^{-1} |\psi_d + K_R \psi_D| + |\omega_c \psi_q| + |U_d| < \\
&< T_s^{-1} (|\psi_D| + |\psi_d|) + |\omega_c \psi_q| + |U_d| \leq \\
&\leq T_s^{-1} (2\beta + |\psi_{D0}| + |\psi_{d0}|) + \omega_{cm} \beta + \omega_{cm} |\psi_{q0}| + U_{dm} = \\
&= (2T_s^{-1} + \omega_{cm}) \beta + T_s^{-1} (|\psi_{D0}| + |\psi_{d0}|) + (\omega_{cm} + |\omega_{q0}|) + U_{dm}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Следовательно,

$$\mu_d = (2T_s^{-1} + \omega_{cm}) \beta + T_s^{-1} (|\psi_{d0}| + |\psi_{D0}|) + \omega_{cm} |\psi_{q0}| + U_{dm}. \tag{20}$$

Взаимной заменой индексов d, D на q, Q для μ_q получим

$$\mu_q = (2T_s^{-1} + \omega_{cm}) \beta + T_s^{-1} (|\psi_{q0}| + |\psi_{Q0}|) + \omega_{cm} |\psi_{d0}| + U_{qm}. \tag{21}$$

Таким образом, функции $\mu_d(\beta)$ и $\mu_q(\beta)$ имеют следующий вид:

$$\mu_{d(q)}(\beta) = a_1 \beta + a_0. \tag{22}$$

Аналогичным образом из третьего уравнения системы (1) с учетом неравенства $K_s < 1$ получим

$$\begin{aligned}
|\dot{\psi}_d| &= \left| -T_R^{-1} \psi_D + K_S T_R^{-1} \psi_d + \omega_c \psi_Q + \omega_R \psi_Q \right| < \\
&< T_R^{-1} (|\psi_D| + |\psi_d|) + |\omega_c \psi_Q| + |\omega_R \psi_Q| \leq \\
&\leq T_R^{-1} (2\beta + |\psi_{D0}| + |\psi_{d0}|) + \omega_{cm} \beta + \omega_{cm} |\psi_{Q0}| + \beta^2 + \beta |\psi_{Q0}| + \\
&+ \beta |\omega_{R0}| + |\psi_{Q0}| \omega_{R0} = \beta^2 + (2T_R^{-1} + \omega_{cm} + |\omega_{R0}| + |\psi_{Q0}|) \beta + \\
&+ T_R^{-1} (|\psi_{D0}| + |\psi_{d0}|) + (\omega_{cm} + |\omega_{R0}|) |\psi_{Q0}|.
\end{aligned} \tag{23}$$

Подобно предыдущему случаю имеем

$$\begin{aligned}
\mu_D &= \beta^2 + (2T_R^{-1} + \omega_{cm} + |\omega_{R0}| + |\psi_{Q0}|) \beta + \\
&+ T_R^{-1} (|\psi_{D0}| + |\psi_{d0}|) + (\omega_{cm} + |\omega_{R0}|) |\psi_{Q0}|, \\
\mu_D &= \beta^2 + (2T_R^{-1} + \omega_{cm} + |\omega_{R0}| + |\psi_{Q0}|) \beta + \\
&+ T_R^{-1} (|\psi_{Q0}| + |\psi_{q0}|) + (\omega_{cm} + |\omega_{R0}|) |\psi_{D0}|.
\end{aligned} \tag{24}$$

Функции $\mu_D(\beta)$ и $\mu_Q(\beta)$ имеют вид

$$\mu_{D(Q)}(\beta) = \beta^2 + a_1 \beta + a_0. \tag{25}$$

Из пятого уравнения системы (1) получим

$$\mu_R = H^{-1} \left\{ K_S K_R (\sigma \cdot x_{SR})^{-1} + 2 \right\} \beta^2 + \beta \left(|\psi_{d0}| + |\psi_{q0}| + |\psi_{D0}| + |\psi_{Q0}| \right) + |\psi_{q0}| + |\psi_{D0}| + |\psi_{d0}| + |\psi_{Q0}| + M_m \}, \quad (26)$$

и функция $\mu_R(\beta)$ принимает вид

$$\mu_R(\beta) = (a_2 \beta^2 + a_1 \beta + a_0) H^1. \quad (27)$$

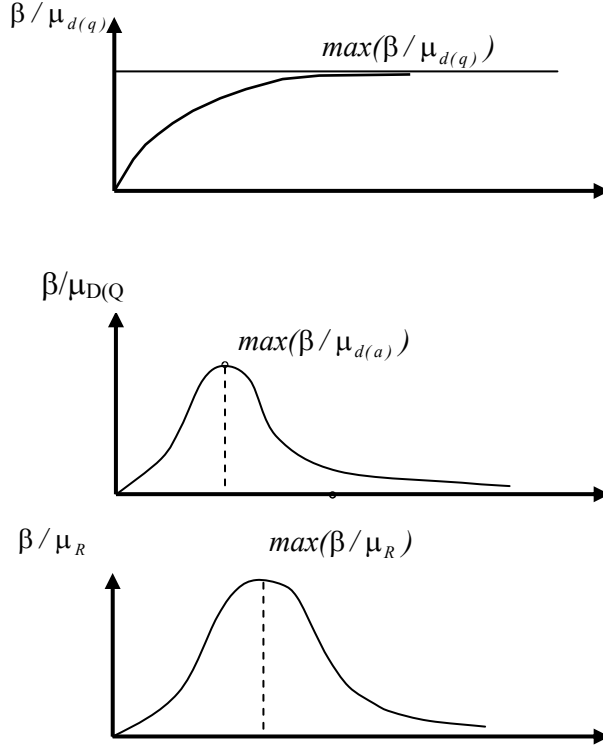


Рис. Графики функций $\beta/\mu(\beta)$

На рис.1 приведены графики функций $\beta/\mu_{d(q)}$, $\beta/\mu_{D(Q)}$, β/μ_R . Как видно, график функции $\beta/\mu_{d(q)}$ монотонно возрастает и при $\beta \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к значению $1/a_1$, которое можно принять как $\max(\beta/\mu_{d(q)})$. Графики функций $\beta/\mu_{D(Q)}$ и β/μ_R имеют максимум и при $\beta \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Дифференцируя эти функции по β и сравнивая с нулем, определим $\max(\beta/\mu_{D(Q)})$ и $\max(\beta/\mu_R)$.

Опуская детали вычислений, приведем окончательные результаты:

$$\begin{aligned} \max(\beta/\mu_{D(Q)}) &= 1/(a_1 + 2\sqrt{a_0}), \\ \max(\beta/\mu_R) &= H/(2\sqrt{a_2} 2\sqrt{a_0} + a_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя соответствующие значения постоянных a_2, a_1, a_0 из (20), (21), (24), (26) в (28), получим

$$\begin{aligned} \max(\beta/\mu_d) &= \max(\beta/\mu_q) = \left(2T_R^{-1} + \omega_{cm}\right)^{-1}; \\ \max(\beta/\mu_D) &= \left(2T_R^{-1} + \omega_{cm} + |\omega_{R0}| + |\psi_{Q0}| + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{T_R^{-1}}(|\psi_{D0}| + |\psi_{d0}|) + (\omega_{cm} + |\omega_{R0}|)|\psi_{Q0}| \right)^{-1}; \\ \max(\beta/\mu_Q) &= \left(2T_R^{-1} + \omega_{cm} + |\omega_{R0}| + |\psi_{Q0}| + 2\sqrt{T_R^{-1}}(|\psi_{Q0}| + |\psi_{q0}|) + \right. \\ &\quad \left. + (\omega_{cm} + |\omega_{R0}|)|\psi_{Q0}| \right)^{-1}; \\ \max(\beta/\mu_R) &= \left\{ 2\sqrt{[K_S \cdot K_R (\sigma \cdot X_{SR})^{-1} + 2]} (|\psi_{q0}| |\psi_{D0}| + |\psi_{d0}| |\psi_{Q0}|) + \right. \\ &\quad \left. + Mm + |\psi_{q0}| |\psi_{d0}| + |\psi_{D0}| |\psi_{Q0}| \right\}^{-1} H. \end{aligned} \quad (29)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аресян Г. Л.** Новый метод исследования переходных процессов в АД // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер.ТН.- 1998.- Т.51, ¹ 3.- С. 314-332.
2. **Авагян Р.М.** Расчет переходных процессов асинхронного двигателя методом кусочной линеаризации // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 1999.-Т.53, ¹1.- С. 55-59.
3. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.1, ИЛ, 1953: Т. 2, ИЛ, 1954. - 225 с.
4. **Еругин Н. П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М.: Наука и техника, 1972. - 426 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.09.1999.

Ռ. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆ

ԱՍԻՆԽՐՈՆ ԷԼԵԿՏՐԱՇԱՐԺԻԶԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

Բերված է համակարգի մոտավոր ինտեգրման ալգորիթմը, կիրառված է լուծման վեկտորի՝ զուգամետ աստիճանային շարքերի վերլուծման մեթոդը: Հետազոտված է այդ շարքերի զուգամիտման տիրույթը, տրված է զուգամիտման շառավղի կոնստրուկտիվ գնահատականը:

R.M. AVAGYAN APPROXIMATE INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ASYNCHRONOUS ENGINE

The algorithm of the approximate integration system applying the decomposition method of a solution vector into power series is proposed. The convergence set of these series is studied, but the constructive evaluation of the convergence radius is not given.