Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2000. Т. LIII, № 1.

УДК 532.546 ГИДРАВЛИКА

Н.Л. МЕЛИКЯН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПОРА В АРТЕЗИАНСКОМ ВОДОНОСНОМ ГОРИЗОНТЕ ПРИ ПРИТОКЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД К ФОНТАНИРУЮЩЕЙ СКВАЖИНЕ

Դիտարկվում է ճնշումային ջրաբեր շերտում ճնշման վերաբաշխման խնդիրը, երբ այնտեղից կատարվում է ջրառում շատրվանող հորատանցքի միջոցով: Ջրաբեր շերտում ճնշման անկումը որոշող (2) ինտեգրալը, որը ստացված էր Մ.Մասկետի կողմից որպես (1) հավասարման ընդհանուր լուծում, հաշվարկել էինք հորատանցքի ոչ հաստատուն ելքի դեպքում` կիրառելով Թեյլորի շարքը և այդ ելքի որոշման համար հեղինակի կողմից ստացված (1) բանաձևը: Տրվում են ջրաբեր շերտում (9) և անմիջապես հորատանցքի մեջ (10) ճնշման անկումը որոշող բանաձևերը:

Рассмотрены вопросы перераспределения пьезометрического напора в артезианском водоносном горизонте при работе фонтанирующей скважины с переменным во времени дебитом и напором в ней. Даются расчетные формулы в виде сходных рядов для определения понижения напора соответственно в любой точке водоносного горизонта и в самой скважине в любой момент времени.

Табл.3. Библиогр.: 7 назв.

Artesian piesometric head aquifer pressure distribution problems for groundwater input to the spouting well with time variable debit and head in it are considered. The pressure decrease in the artesian aquifer is determined by M.Masket's integral. The design formulas like the series for specifying the head decline at any aquifer point and in the well itself at any moment are given.

Tables 3. Ref. 7

Рассмотрим перераспределение пьезометрического напора при действии одиночной фонтанирующей скважины в неограниченном однородном напорном горизонте постоянной мощности.

Радиальное движение подземных вод характеризуется следующими уравнениями [1-3,6,7]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad a = \frac{Km}{\mu^*}, \qquad (1)$$

где K - коэффициент фильтрации водоносного горизонта; m - его мощность; μ^* и a - коэффициенты упругой водоотдачи водоносного горизонта и пьезопроводности; H - пьезометрический напор на расстоянии r от водозаборной скважины в момент времени t.

Принимая, что в рассматриваемой фильтрационной среде действует постоянно точечный источник, дебит которого, начиная с какого-либо момента времени τ, меняется по закону $Q(\tau)$, и, пользуясь методом источников и стоков [3], как общее решение (1), получена формула

$$S = H_e - H = \frac{1}{4\pi Km}\int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} d\tau, \qquad (2)$$

где S - понижение напора в водоносном горизонте на расстоянии r от водозаборной скважины; H_e - напор до водозабора.

Это решение доведено до расчетной формулы только для точечных источников с постоянным во времени дебитом.

Приведем одно его решение при переменном дебите, что характерно для фонтанирующей скважины. Следуя [6], будем считать, что в некотором интервале времени t функция $Q(\tau)$ может быть разложена в ряд Тэйлора.

Обозначив

$$\frac{r^2}{4a(t-\tau)} = u, \qquad (3)$$

причем

$$u_{\tau=0} = \frac{r^2}{4at} = \beta, u_{\tau=t} \to \infty,$$

$$\tau = t - \frac{r^2}{4au}, d\tau = \frac{r^2}{4au^2} du, \qquad (4)$$

имеем

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= Q\left(t - \frac{r^2}{4au}\right) = Q(t) - \frac{r^2}{4au}Q^{(1)}(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{4au}\right)^2 Q^{(2)}(t) - \\ &- \frac{1}{3}\left(\frac{r^2}{4au}\right)^3 Q^{(3)}(t) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{r^2}{4au}\right)^n Q^{(n)}(t) = Q(t,u), \end{aligned} \qquad (5)$$

где $Q^{(n)}(t)$- n-я производная функции $Q(t)$.

Подставляя (3)-(5) в (2), получим

$$S = \frac{1}{4\pi Km}\int_\beta^\infty Q(t,u)\frac{4au}{r^2} e^{-u} \frac{r^2}{4au^2} du = \frac{1}{4\pi Km}\int_\beta^\infty Q(t,u)\frac{e^{-u}}{u} du. \qquad (6)$$

Учитывая, что $\frac{r^2}{4au} = \frac{t\beta}{u}$, и подставляя (5) в (6), получим

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi Km}\int_\beta^\infty \left[Q(t) - \frac{t\beta}{u}Q^{(1)}(t) + \frac{1}{2!}\left(\frac{t\beta}{u}\right)^2 Q^{(2)}(t) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3!}\left(\frac{t\beta}{u}\right)^3 Q^{(3)}(t) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t\beta}{u}\right)^n Q^{(n)}(t) \right] \frac{e^{-u}}{u} du. \end{aligned} \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (6) по частям, при котором использовано известное решение интегралов типа $\int_\beta^\infty \frac{e^{-u}}{u^{n+1}} du$, получим [5]

$$S=\frac{1}{4\pi Km}\left\{Q(t)[-E_i(-\beta)]-t\beta Q^{(1)}(t)\left[E_i(-\beta)+\frac{e^{-\beta}}{\beta}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{2!}t^2\beta^2Q^{(2)}(t)\left[-\frac{1}{2}E_i(-\beta)+\frac{e^{-\beta}}{2\beta^2}-\frac{e^{-\beta}}{2\beta}\right]-$$
$$-\frac{1}{3!}t^3\beta^3Q^{(3)}(t)\left[\frac{1}{6}E_i(-\beta)+\frac{e^{-\beta}}{3\beta^3}+\frac{e^{-\beta}}{6\beta^2}+\frac{e^{-\beta}}{6\beta}\right]+\ldots+ \qquad (8)$$
$$\left.+\frac{(-1)^n}{n!}t^n\beta^nQ^{(n)}(t)\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n!}E_i(-\beta)+\frac{e^{-\beta}}{\beta^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\beta^k}{n(n-1)\ldots(n-k)}\right]\right\},$$

где - $E_i(-\beta)$ - экспоненциальная функция.

Для определения понижения напора в любой точке артезианского водоносного горизонта в любой момент времени при работе одиночной фонтанирующей скважины после некоторых преобразований в конечном виде получим

$$S=\frac{1}{4\pi Km}\left\{Q(t)[-E_i(-\beta)]-tQ^{(1)}(t)\left[\beta E_i(-\beta)+e^{-\beta}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{(2!)^2}t^2Q^{(2)}(t)\left[-\beta^2E_i(-\beta)+e^{-\beta}-\beta e^{-\beta}\right]-$$
$$-\frac{1}{(3!)^2}t^3Q^{(3)}(t)\left[\beta^3E_i(-\beta)+2e^{-\beta}-\beta e^{-\beta}+\beta^2e^{-\beta}\right]+\ldots+ \qquad (9)$$
$$\left.+\frac{(-1)^n}{(n!)^2}t^nQ^{(n)}(t)\left[(-1)^{n+1}\beta^nE_i(-\beta)+n!e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\beta^k}{n(n-1)\ldots(n-k)}\right]\right\}.$$

Для определения понижения напора в самой фонтанирующей скважине достаточно в (9) полагать, что $r=r_0$ (r_0- радиус скважины). В этом случае с большой точностью можно принять, что

$$\beta=\frac{r_0^2}{4at}\to 0,\ r_0<<a,\quad e^{-\beta}\to 1,\ -E_i(-\beta)=\ln\frac{2{,}25at}{r_0^2}.$$

Тогда уравнение (9) для скважины будет иметь вид

$$S_0=\frac{1}{4\pi Km}\left[\ln\frac{2{,}25at}{r_0^2}Q(t)-tQ^{(1)}(t)+\frac{1}{4}t^2Q^{(2)}(t)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{18}t^3Q^{(3)}(t)+\ldots+\frac{(-1)^n}{nn!}t^nQ^{(n)}(t)\right]. \qquad (10)$$

С целью применения уравнений (9) и (10) в расчетах в качестве непрерывной функции Q(t) (при t>0) предлагается выражение, полученное нами для определения дебита одиночной фонтанирующей скважины [4]:

$$Q(t)=\left(\sqrt{\ln^2\frac{2{,}25at}{r_0^2}+64\pi^2K^2m^2H_0\eta}-\ln\frac{2{,}25at}{r_0^2}\right)\left(8\pi Km\eta\right)^{-1}, \qquad (11)$$

где H_0 - начальный положительный напор подземных вод над устьем скважины; η-гидравлическое сопротивление водоподъемной трубы скважины, выраженное по формуле

$$\eta=\frac{2r_0+\lambda\ell}{4g\pi^2r_0^5}\ , \qquad (12)$$

ℓ - длина водоподъемной трубы; λ- коэффициент гидравлического трения.

При определении n-й производной функции Q(t), выражающейся по (11), получим многочлен в общем виде:

$$Q^n(t)=\frac{1}{t^n}f(\ln At)\,, \qquad (13)$$

где A - константа, рассчитываемая параметрами водоносного горизонта и скважины.

Численные значения $Q^{(n)}(t)$ приобретают знак $(-1)^n$, так что, подставляя их в ряды (9) и (10), знаки всех членов становятся положительными, а находящийся там t^n сокращается. Если наряду с этим иметь в виду наличие в знаменателях членов рядов n!, то сходимость этих рядов не вызывает сомнения.

С целью проверки точности (9) произведены соответствующие расчеты, причем ограничивались только первыми пятью членами ряда ввиду монотонного уменьшения значений последующих его членов и некоторых математических осложнений, возникающих при определении произведения высшего порядка производных функции Q(t).

Установлены значения понижения напора на расстояниях r_1=500 *м*, r_2=1000 *м*, r_3=1500 *м* от фонтанирующей скважины при продолжительностях его работы t_1=50 и t_2=100 *сут*. Полученные результаты сравнены с данными модельных исследований, проведенных на сеточной математической модели типа "Гидроинтегратор".

Исходные параметры напорного водоносного горизонта и фонтанирующей скважины следующие: Km=2000 *м²/сут*, H_0=18 *м*, μ^*=0,01, ℓ=60 *м*, $\eta=1{,}38\cdot10^{-8}$ *сут²/м⁵*, $\zeta_{нс}$=1,0.

Результаты расчетов приводятся в таблицах 1 - 3.

Таблица 1

Расчетные значения производных $Q^{(n)}(t)$ в различных временах

Время суток	$Q(t)$, *м³/сут*	$Q^{(1)}(t)$, *м³/сут²*	$Q^{(2)}(t)$, *м³/сут³*	$Q^{(3)}(t)$, *м³/сут⁴*	$Q^{(4)}(t)$, *м³/сут⁵*
50	15746	-9,22	$1{,}93\cdot10^{-1}$	$-8{,}0\cdot10^{-3}$	$4{,}85\cdot10^{-4}$
100	15433	$-4{,}45\cdot10^{-1}$	$4{,}67\cdot10^{-2}$	$-9{,}58\cdot10^{-4}$	$2{,}92\cdot10^{-5}$

Таблица 2

Расчетные значения $-E_i(-\beta)$ и $e^{-\beta}$

r_i, *м*	t_1=50 *сут*			t_2=100 *сут*		
	β	$-E_i(-\beta)$	$e^{-\beta}$	β	$-E_i(-\beta)$	$e^{-\beta}$
500	$6{,}25 \cdot 10^{-3}$	4,500	0,994	$3{,}125 \cdot 10^{-3}$	5,19	0,997
1000	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	3,137	0,975	$1{,}250 \cdot 10^{-5}$	3,81	0,988
1500	$5{,}624 \cdot 10^{-2}$	2,370	0,945	$2{,}812 \cdot 10^{-2}$	3,05	0,972

Таблица 3

Значения понижения пьезометрического напора
в водоносном горизонте, м

r_i, *м*	t_1 = 50 *сут*			t_2 = 100 *сут*		
	S по (9)	S по моделированию	Отклонение, %	S по (9)	S по моделированию	Отклонение, %
500	2,85	2,95	3,4	3,21	3,35	4,2
1000	1,99	2,05	2,9	2,36	2,50	5,6
1500	1,51	1,47	-2,7	1,9	1,90	0,0

Как видно из табл. 3, формула (9) дает вполне удовлетворительные данные, и ее можно рекомендовать при различных гидрогеологических расчетах, связанных с работой фонтанирующих скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Веригин Н.Н., Васильев С.В., Саркисян В.С., Шержуков Б.С.** Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. - М.: Недра, 1977.- 270 с.
2. **Казарян С.М.** Водный обмен на фоне вертикального дренажа. - Ереван: Айастан, 1988.- 270 с.
3. **Маскет М.** Течение однородных жидкостей в пористой среде. - М;-Л.: Гостоптехиздат, 1949. - 628 с.
4. **Меликян Н.Л.** О методике расчета дебита одиночных фонтанирующих скважин, заложенных в артезианском водоносном горизонте // НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 1996. - Т. 49, № 3. - С.165-169.
5. **Рыжик И.М., Градштейн И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М; - Л.: Гос.изд.тех.-теор. лит., 1951. - 464 с.
6. **Чарный И.А.** Подземная гидромеханика. - М;-Л.: ОГИЗ, 1978. - 196 с.
7. **Шестаков В.М.** Динамика подземных вод. - М.: Изд. МГУ, 1973. - 326 с.

Ин-т водных проблем и гидротехники 25.09.1998