Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2000. Т. LIII, № 1.

УДК 658.564:519.83

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.Г. КЮРЕГЯН, Н.С. КЮРЕГЯН, А.Р. АКОПЯН

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОДНОГО КЛАССА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Որոշումների ընդունմամբ ավտոմատացված կառավարման համակարգերի համար մշակված է փոփոխականների վերին և ստորին սահմանների վրա դրված սահմանափակումներով մի դասի քառակուսային ծրագրավորման խնդիրների լուծման ալգորիթմը:

Разработан и предложен алгоритм решения задачи одного класса квадратичного программирования с ограничениями на верхние и нижние пределы изменения переменных, предназначенный для оптимизационных задач в системах автоматизированного управления с принятием решений.

Табл. 2. Библиогр.: 3 назв.

An algorithm for one class problem solution of quadratic programming with upper and lower variable change limits has been elaborated and proposed. It is designated for optimization problems in computer-aided control systems followed by decision-making.

Tables 2. Ref. 3.

Возникающие оптимизационные задачи в системах управления, распределения ресурсов, проектирования объектов и т.д. часто сводятся к задачам нелинейного программирования, для решения которых применяют существующие пакеты прикладных программ, реализующие известные методы нелинейного программирования [1,2]. Однако для некоторых задач применение таких пакетов неэффективно, в особенности, если условия задачи позволяют в качестве оптимального рассматривать и близкие к ним решения, что характерно для систем с принятием решения.

В частности, в [3] рассмотрена задача одного класса нелинейного программирования с целевой функцией

$$F(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{r})\to \min_{\mathbf{x}\in X_n}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} = \{x_i\}$- n - мерный вектор переменных x_i; $f(\mathbf{x})$ - нелинейная, выпуклая, непрерывная, дифференцируемая функция переменной $\mathbf{x}$; $\varphi(\mathbf{r})$ - неотрицательная функция от чисел $\mathbf{r} = \{r_i\}$, где

$$r_i = \begin{cases} 0, \text{ если } x_i = 0, \\ c_i, \text{ если } x_i \neq 0, \end{cases}$$

причем $\varphi(\mathbf{0})=0$.

Исследуем решение задачи (1) для случая, когда функция $f(\mathbf{x})$ квадратичная:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{x}, \qquad (2)$$

а допустимая область

$$X_n = \{\mathbf{x}: y(\mathbf{x}) = 0;\ \mathbf{z}_\nu(\mathbf{x}) \geq 0, \nu = 1,2\} \qquad (3)$$

определяется линейными ограничениями типа равенства

$$y(\mathbf{x}) = \boldsymbol{a}^T\mathbf{x} - b = 0 \qquad (4)$$

и неравенств

$$\begin{aligned} &\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \geq 0, \\ &\mathbf{z}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B - \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$ - квадратичная положительно определенная матрица, $i, j = \overline{1,n}$; $\mathbf{p} = \{p_i\}$, $\boldsymbol{a} = \{a_i\}$ - матрицы-столбцы; b - положительное число;

$\mathbf{x}_B = \{x_{Bi}\}$ - вектор верхних пределов переменных: $a_i x_{Bi} - b \leq 0$; $\boldsymbol{a}^T\mathbf{x}_B - b \geq 0$.

Решим задачу условного экстремума и определим координаты экстремума функции (2) при условии (4) методом множителей Лагранжа:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}\left(\frac{b+v}{w}\boldsymbol{a} - \mathbf{p}\right), \qquad (6)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{Q}^{-1} = \{g_{ij}\}$; $v = \boldsymbol{a}^T\mathbf{G}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} g_{ij} p_j$; $w = \boldsymbol{a}^T\mathbf{G}\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} g_{ij} a_j$.

Принадлежность значения $\mathbf{x}^*$ допустимой области (3) не гарантирует минимального значения функции $F(\mathbf{x})$, так как значение функции $\varphi(\mathbf{r})$ для найденного $\mathbf{x}^*$ может оказаться больше, чем для вектора $\mathbf{r}$, содержащего нулевые компоненты.

Поэтому дальнейшее исследование заключается прежде всего в проверке граничных решений, содержащих нулевые компоненты. Поскольку допустимая область (3) представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости (4), образованный пересечением этой плоскости с гранями прямоугольного параллелепипеда (5), то граничные решения располагаются на ребрах многоугольника, и, следовательно, поиск этих решений сводится к двумерной задаче.

Выделим две составляющие в векторе $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1;\ \mathbf{x}_2]^T$: двумерный вектор $\mathbf{x}_1 = [\mathbf{x}_c;\ \mathbf{x}_d]^T$; $c,d = \overline{1,n}$; $c \neq d$ и (n-2) - мерный вектор $\mathbf{x}_2 = \{x_{гк}\}$, где $x_{гк}$ - граничное значение k-й координаты ($x_{гк}$ = {или $x_{вк}$, или 0}), $k = \overline{1,n}$; $k \neq c,d$. Тогда матрицы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{a}$ можно разбить на соответствующие клетки:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & | & \mathbf{Q}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{Q}_{21} & | & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = [\mathbf{p}_1;\ \mathbf{p}_2]^T, \quad \boldsymbol{a} = [\boldsymbol{a}_1;\ \boldsymbol{a}_2]^T,$$

и свести функцию (2) к двумерной квадратичной функции:

$$f(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1^T\mathbf{Q}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_0^T\mathbf{x}_1 + e \qquad (7)$$

с ограничением (4) в виде

$$\boldsymbol{a}_1^T\mathbf{x}_1 - b_1 = 0, \qquad (8)$$

где $\mathbf{Q}_{11} = \{q_{ij}\}$, $i, j = c, d$; $\mathbf{Q}_{21}^{T} = \mathbf{Q}_{12} = \{q_{ik}\}$; $\mathbf{Q}_{22} = \{q_{kl}\}$, $\ell = \overline{1, n}$, $\ell \neq c, d$;

$\mathbf{p}_1 = [p_c; p_d]^T$; $\mathbf{p}_2 = \{p_k\}$; $\boldsymbol{a}_1 = [a_c; a_d]^T$; $a_2 = \{a_k\}$; $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{x}_2$; $e = (\mathbf{p}_2^T + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_{22})\mathbf{x}_2$; $b_1 = b - \boldsymbol{a}_2^T \mathbf{x}_2$.

Ограничения (5) теперь определяются координатами смежных вершин u и s:

$$x_{cu} \le x_c \le x_{cs}, \qquad x_{ds} \le x_d \le x_{du}, \tag{9}$$

где смежными оказываются вершины многоугольника с одинаковыми векторами $\mathbf{x}_2$: $\mathbf{x}_{2U} = \mathbf{x}_{2S}$.

Экстремум функции (7) при условии (8) определяется аналогично (6):

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{G}_{11}\left(\frac{b_1 + v_1}{w_1}\boldsymbol{a}_1 - \mathbf{p}_0\right), \tag{10}$$

где $\mathbf{G}_{11} = \mathbf{Q}_{11}^{-1}$; $v_1 = \boldsymbol{a}_1^T \mathbf{G}_{11}\mathbf{p}_0$; $w_1 = \boldsymbol{a}_1^T \mathbf{G}_{11}\boldsymbol{a}$.

Если найденные оптимальные значения $\mathbf{x}_1^* = \left[x_c^*; x_d^*\right]^T$ не удовлетворяют условиям (9), то оптимальным решением для данного ребра является его граница, т.е. координата той вершины, в которой функция цели (1) наименьшая. Если же при граничных значениях некоторых координат вектора $\mathbf{x}$ удовлетворяются условия $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_B - b \ge 0$, то следует искать граничные решения среди полученных вариантов, которые выражаются в виде основной задачи (1)–(5) меньшей размерности, от (n-1)-мерной до трехмерной.

Обозначим все граничные решения с нулевыми и без нулевых компонент соответственно через $\mathbf{x}_\Gamma^0$ и $\mathbf{x}_\Gamma$ и введем множество $X_\Gamma^0 = \left\{\mathbf{x}_\Gamma^0 : F\left(\mathbf{x}_\Gamma^0\right) \langle F\left(\mathbf{x}^*\right)\right\}$. Тогда можно предложить следующий алгоритм поиска оптимального решения задачи (1).

1. Если множество $X_{\tilde{A}}^{\hat{I}}$ непустое, то оптимальным решением является элемент множества, для которого функция цели наименьшая: $\min F = \inf F\,(X_{\tilde{A}}^{\hat{I}})$.

2. Если множество $X_{\tilde{A}}^{\hat{I}}$ пустое, то:

2.1. $\min F = F(\mathbf{x}^*)$, если $\mathbf{x}^* \in X_n$.

2.2. $\min F = \inf F(\mathbf{x}_\Gamma)$, если $\mathbf{x}^* \notin X_n$.

В результате наряду с оптимальным решением будут определены близкие к нему и другие варианты среди элементов множеств $X_{\tilde{A}}^{\hat{I}}$ и $X_{\tilde{A}} = \{\mathbf{x}_\Gamma : F(\mathbf{x}_\Gamma)\}$, что важно для автоматизированных систем с принятием решений.

Проиллюстрируем применение описанного алгоритма на простых примерах.

Пример 1. Задана система (1)-(5) в трехмерном пространстве со следующими параметрами:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8\end{bmatrix};\ \mathbf{p}=\begin{bmatrix}0{,}2\\ 0{,}4\\ 0{,}6\end{bmatrix};\ \ \mathbf{a}=\begin{bmatrix}0{,}3\\ 0{,}8\\ 0{,}9\end{bmatrix};\ \mathbf{r}=\begin{bmatrix}0{,}05\\ 0{,}04\\ 0{,}08\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_{\text{B}}=\begin{bmatrix}0{,}5\\ 0{,}8\\ 0{,}6\end{bmatrix};\ \ \text{b}=1;\ \ \varphi(\mathbf{r})=\sum \text{r}_{\text{i}}.$$

Решение задачи приведено в табл. 1. Вначале определены координаты $\mathbf{x}_{\text{tu}}$ четырех вершин допустимого четырехугольника (пункты 1-4 табл.1). Там же вычислены значения функций f($\mathbf{x}$) и F($\mathbf{x}$) в этих вершинах.

Таблица 1

№	i	1	2	3	f($\mathbf{x}$)	F($\mathbf{x}$)
	$\mathbf{x}_{\text{B}}$	0,5	0,8	0,6	-	-
1	$\mathbf{x}_{\text{t1}}$	0,5	0,387	0,6	0,987	1,157
2	$\mathbf{x}_{\text{t2}}$	0,5	0,8	0,233	0,956	1,126
3	$\mathbf{x}_{\text{t3}}$	0	0,8	0,4	0,912	1,032
4	$\mathbf{x}_{\text{t4}}$	0	0,575	0,6	0,919	1,039
5	$\mathbf{x}^{*}$	0,022	0,716	0,467	0,908	1,078
6	$\mathbf{x}^{0}_{\Gamma(3-4)}$	0	0,718	0,473	0,909	1,029

В п.5 определены координаты $\mathbf{x}^{*}$ экстремума функции f($\mathbf{x}$) по (6), которые располагаются в допустимой области, однако не доставляют минимума функции цели F($\mathbf{x}$). Поэтому дальнейший поиск оптимума следует продолжить на ребрах допустимой области, смежные вершины которых содержат нулевые компоненты. Это вершины 3 и 4. В п.6 приведены результаты минимизации двумерной функции f($\mathbf{x}_1$) ($x_c = x_2$; $x_d = x_3$) по (10) и определены координаты оптимального решения задачи (1). Таким образом, помимо оптимального решения, представленного в п.6 табл.1, в п.п. 3 и 4 получены и близкие к оптимальному другие варианты решения.

Пример 2. Система уравнений (1)-(5) определена в трехмерном пространстве со следующими параметрами, представленными в табл. 2, где $\mathbf{Q}$ = diag{0,64; 64; 160}$\cdot 10^{-3}$; $\mathbf{p}$ = -[0,256; 40,96; 32]$^{\text{T}}\cdot 10^{-3}$; $\mathbf{a}$ = [0,08; 0,8; 2,0]^{T}; $\mathbf{r}$ = [0,3; 45,6; 92,8]$^{\text{T}}\cdot 10^{-3}$; $\mathbf{x}_{\text{B}}$ = [0,5; 0,8;0,4]^{T}; b = 1, $\varphi(\mathbf{r})=\sum_{\text{i}=1}^{3}\text{r}_{\text{i}}$.

Как показали результаты решения задачи (табл.2), координаты экстремума $\mathbf{x}^{*}$ функции f($\mathbf{x}$) выходят за пределы допустимой области. Расчет функции цели в единственной граничной точке $\mathbf{x}^{0}_{\Gamma}$ с нулевым компонентом показывает, что оптимальным является решение п.6. Для

обнаружения близких к оптимальному решений поиск продолжается и на других ребрах (п.п.7 и 8). Оптимумом на ребре (1-4) является вершина 4. Таким образом, решение задачи содержится в п.6, а близкие к нему варианты - в п.п. 7, 3, 8 и 2.

Таблица 2

№	i	1	2	3	$f(\mathbf{x})\cdot 10^{-3}$	$F(\mathbf{x})\cdot 10^{-3}$
	$\mathbf{x}_B$	0,5	0,8	0,4	-	-
1	$\mathbf{x}_{t1}$	0,5	0,2	0,4	-6,96	131,74
2	$\mathbf{x}_{t2}$	0,5	0,8	0,16	-15,41	123,29
3	$\mathbf{x}_{t3}$	0	0,8	0,18	-15,46	122,94
4	$\mathbf{x}_{t4}$	0	0,25	0,4	- 8,24	130,16
5	$\mathbf{x}^*$	0,555	0,655	0,216	-16,33	122,37
6	$\mathbf{x}^0_{\Gamma(3-4)}$	0	0,671	0,231	-16,19	122,21
7	$\mathbf{x}_{\Gamma(1-2)}$	0,5	0,66	0,216	-16,32	122,38
8	$\mathbf{x}_{\Gamma(2-3)}$	0,143	0,8	0,174	-15,46	123,24

Приведенные примеры демонстрируют возможности предлагаемого алгоритма для решения задачи квадратичного программирования класса (1)-(5) и обнаружения дополнительных решений, близких к оптимальному.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. - 534 с.
2. **Аоки М.** Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
3. **Кюрегян С.Г., Кюрегян Н.С.** Поиск граничных решений задач одного класса нелинейного программирования // Изв.НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 1998. - Т.51, № 3. - С. 342-345.

ГИУА 20.06.1998

Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2000. Т. LIII, № 1.

УДК 531.36

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В.Т. АВАНЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Ապացուցվում է երկրի արհեստական արբանյակի ծանրության կենտրոնի ստացիոնար շարժման K_{Δ}^{ω} - կայունությունը :