пары, составленные из элементов i и $\ell R(S)$ $\left(i,\ell=\overline{1,k_1},k_1\right.$ - число элементов R(S)). Из этих пар выбирается та, объединение компонентов которой не нарушает условий 1 и 2 и максимизирует целевую функцию. Далее процедура поисков и объединения компонентов новых подходящих пар возобновляется. Процесс прекращается тогда, когда объединение компонентов любых пар нарушает условия разбиения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бозоян Ш.Е.** Язык описания функциональных схем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.- 1978.-№ 6.- С.158-166.
2. **Zukasiewicz J**.Sur la Formalisation des Theorie Mathematiques // Coll. Intern. Ceentre Nat. Rech. Sei.-1950. - Vol. 36. - S.
3. **Харари Ф**. Теория графов: Пер. с англ.- М.: Мир, 1973.-317 с.

ЕГУ 15.12.1997

Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2000. Т. LIII, № 1.

УДК 622.7:50/52 **АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Г.Т. КИРАКОСЯН

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССОВ УТИЛИЗАЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО ОТХОДА

Մշակված են արդյունաբերական թափոնից ստացված արտադրանքների թողարկման դինամիկայի խնդրի մաթեմատիկական մոդելը և լուծման մեթոդը: Առաջարկվում են ալգորիթմ և ծրագրային փաթեթներ, կատարված է թվային հաշվարկ:

Разработаны математическая модель и метод решения задачи определения динамики выпуска продукции из промышленного отхода. Предложены алгоритм и пакет программ, произведен численный расчет.

Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

A mathematical model and a problem solving method for waste production output specification dynamics have been elaborated and optimization conditions have been proved. An algorithm and a program package have been proposed and numerical calculation has been performed.

Table 1. Ref. 3.

В данной статье на основе использования теории оптимальности [1] и принципа максимума Понтрягина [2] предложены математическая модель и метод решения, реализованы условия оптимальности задачи динамики процессов утилизации промышленного отхода для организации выпуска новых видов продукции.

Рассмотрим случай, когда не наблюдается поступления нового объема промышленного отхода. Опишем параметры модели задачи: z_0 - первоначальный объем промышленного отхода при $t=0$; $z(t)$ - объем промышленного отхода в момент времени t; n - количество разнотипных продуктов утилизации отходов; $q_i(t)$ - объем производства i-й продукции при утилизации промышленного отхода в момент времени t; $\underline{q}_i, \overline{q}_i$ - минимальный и максимальный объем выпуска i-й продукции при утилизации промышленного отхода для всех $i \in [1, n]$; D_i - доля промышленного отхода в единице объема выпуска i-й продукции; $C_i(q_i)$ - себестоимость единицы объема выпуска i-й продукции для всех $i \in [0, n]$; P_i - стоимость реализации единицы объема i-й продукции; r - постоянная скидка объема выпуска продукции; T - значение конечного времени, в течение которого завершается производство продукции.

С учетом описанных параметров модели решаемая задача формулируется следующим образом:

целевая функция -

$$\max_{q_1,\ldots,q_n,T} \int_0^T e^{-rt} \sum_{i=1}^{n} \left[P_i - C_i(q_i(t))\right] q_i(t)\,dt\,; \qquad (1)$$

ограничения -

$$\dot{z}(t) = -\sum_{i=1}^{n} D_i q_i(t)\,, \qquad (2)$$

$$\underline{q}_i \le q_i(t) \le \overline{q}_i\,,\ \ i = \overline{1,n}\,, \qquad (3)$$

$$z(0) = z_0\,,\quad z(T) \ge 0\,, \qquad (4)$$

где (1) - максимум суммарной прибыли за весь промежуток времени [0,T] от объемов выпуска $q_i(t)$ для всех $i \in [1, n]$; (2) - ограничения на скорость объема использования промышленного отхода при производстве всех n продуктов утилизации во времени; (3) - ограничения на объемы выпуска продукций от утилизации промышленного отхода; (4) - ограничения на объемы промышленного отхода в начальный и конечный моменты выпуска продукции.

Для рассматриваемой задачи при оптимальном предельном времени T имеем $z(T)=0$ [3].

Чтобы сформулировать условия оптимальности для (1)-(4), определим текущее значение функции Гамильтона:

$$H = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \left[P_i - C_i(q_i)\right] q_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} D_i q_i\,. \qquad (5)$$

Выражение (5) может быть записано в виде $H = \sum_{i=1}^{n} H_i$, причем

$$H_i = \lambda_0 q_i \left[P_i - C_i(q_i)\right] - \lambda D_i q_i, \tag{6}$$

где λ_0, λ - начальное и текущее значения присоединяемых переменных.

Итак, q_i максимизирует H. Это эквивалентно тому, что q_i максимизирует H_i, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} q_i = \underline{q}_i, \\ \underline{q}_i < q_i < \overline{q}_i, \\ q_i = \overline{q}_i, \end{array}\right\} \text{если} \begin{cases} \lambda \geq \lambda_0 g_i(\underline{q}_i)/D_i, \\ \lambda_0 g_i(\overline{q}_i)/D_i < \lambda < \lambda_0 g_i(\underline{q}_i)/D_i, \\ \lambda \leq \lambda_0 g_i(\overline{q}_i)/D_i \end{cases} \tag{7}$$

для $i = \overline{1,n}$, где g_i - предельная прибыль от i-го продукта выпуска, т.е.

$$g_i(q_i) = \frac{d}{dq_i}\left\{\left[P_i - C_i(q_i)\right]q_i\right\} = P_i - C_i(q_i) - C_i'(q_i)q_i, \tag{8}$$

$i = \overline{1,n}$.

При этом выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = r\lambda(t), \tag{9}$$

$$\lambda(T) \geq 0,\ \lambda(T)\, z(T) = 0. \tag{10}$$

Оптимальное предельное время T определяется из условия

$$H\big|_{t=T} = \sum_{i=1}^{n} H_i\big|_{t=T} = 0. \tag{11}$$

Для того чтобы функция Гамильтона H действительно была максимальной, обложим ее условием второго порядка:

$$H_{qq_i} < 0,\ \text{т.е.}\ C_i'' > -2C_i / q_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Условие (12), как видно, удовлетворяет значениям следующей функции класса

$$C(q(t)) = C_0 + C_1 q(t) + C_2 / q(t), \tag{13}$$

где C_0, C_1, C_2 - положительные коэффициенты регрессионного анализа.

Определим условия, при которых объемы выпуска продукции конечного времени производства $q_i(T)$ $(i \in [1,n])$ минимизируют себестоимость единицы выпускаемой продукции. С этой целью запишем:

$$\widetilde{q}_i = \arg\min_{\underline{q}_i \leq q_i \leq \overline{q}_i} C_i(q_i) \quad (\text{т.е.}\ C_i'(\widetilde{q}_i) = 0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Покажем следующий результат.

Теорема 1. Объемы выпуска продукции конечного времени производства $q_i(T)$ минимизируют себестоимость единицы выпускаемой продукции $q_i(T) = \widetilde{q}_i$ для $i = \overline{1,n}$, если выполняется условие $\dfrac{P_i - C_i(\widetilde{q}_i)}{D_i} = \dfrac{P_j - C_j(\widetilde{q}_j)}{D_j}$ для всех $i \neq j$.

Доказательство. Этот результат вытекает из выражения $\sum_{i=1}^{n}\left[P_i - C_i(q_i) - D_i\lambda\right]q_i = 0$ и условия $C_i'(\tilde{q}_i) = 0$.

В приложении к теореме 1 для случая, когда количество выпускаемых продуктов равно двум, покажем следующий результат.

Теорема 2. Если $n=2$ и $\frac{P_1 - C_1(\tilde{q}_1)}{D_1} > \frac{P_2 - C_2(\tilde{q}_2)}{D_2}$, тогда $q_1(T) > \tilde{q}_1$, $q_2(T) < \tilde{q}_2$.

Доказательство. Утверждение данной теоремы очевидно для случая $\underline{q}_i \le \tilde{q}_i \le \overline{q}_i$, т.к. вероятно, что если прибыль на единицу использованного промышленного отхода будет больше для одного продукта утилизации, то объем конечного выпуска продукции будет больше, чем $\tilde{q}_i$ для другого продукта.

Теперь рассмотрим свойства монотонности изменения объемов оптимального производства.

Теорема 3. Траектории оптимальных объемов выпуска всех n продуктов утилизации промышленного отхода в течение времени ($q_i(t)$, $i = \overline{1,n}$) монотонно убывают и вогнуты.

Доказательство. Продифференцировав $\lambda_0 g_i(q_i) = D_i\lambda,\ i = \overline{1,n}$ по времени, получаем

$$-[2C_i'(q_i) + C_i''(q_i)\, q_i]\,\dot{q}_i = \dot{\lambda}\, D_i,\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (15)$$

Из (9) и (10) вытекает, что $\dot{\lambda} > 0$. Заметим также, что $\lambda \ne 0$, т.к. из (7) $q_i = \overline{q}_i$ для всех $i \in [1, n]$. Таким образом, если $\underline{q}_i < q_i < \overline{q}$ $(i = \overline{1,n})$, то выражения (12) и (15) можно представить в виде

$$\dot{q}_i < 0,\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (16)$$

Продифференцировав (15) по времени, получаем

$$-\left[3C_i''(q_i) + C_i'''(q_i)q_i\right]\dot{q}_i - [2C_i'(q_i) + C_i''(q_i)q_i]\,\ddot{q}_i = D_i\ddot{\lambda}, \qquad (17)$$

$i = \overline{1,n}$.

Учитывая, что $D_i\ddot{\lambda} > 0$, т.к. $\ddot{\lambda} = r\dot{\lambda} > 0$, $\dot{\lambda} > 0$, $r > 0$, $H_{qq} = -\left[2C_i'(q_i) + C_i''(q_i)q_i\right] < 0$ и $3C_i''(q_i) + C_i'''(q_i)q_i = 0$ для всех $i \in [1,n]$, для функций класса (13) можно записать

$$\ddot{q}_i < 0,\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (18)$$

Итак, исходя из (16) и (18), следует, что для всех выпускаемых продуктов утилизации отхода $i\,(i = \overline{1,n})$ справедливо утверждение: траектория оптимального объема выпуска продукции во времени монотонно падает и вогнутая.

В частном случае (при очень большом z) возможно, что некоторые q_i достигают своих верхних границ объемов выпуска $\overline{q}_i$ на каком-то начальном интервале времени. Конечная точка прогнозируемого производства может быть подсчитана из $\sum_{i=1}^{n}\left[P_i - C_i(q_i) - D_i\lambda\right]q_i = 0$ и $q_1(T),\ q_2(T), ...,\ q_n(T)$:

$$\lambda(T) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i - C_i(q_i)\right]q_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} D_i q_i \ . \qquad (19)$$

Оптимальное конечное время T^* определяется из уравнения

$$\int_0^{T^*} \sum_{i=1}^{n} D_i q_i(t)dt = z_0 \ . \qquad (20)$$

На основе описанной математической модели и метода решения алгоритма задачи разработан алгоритм и пакет decntl на алгоритмическом языке высокого уровня Turbo-Pascal, который работает в среде Windows. Апробация пакета decntl проведена на числовом примере, где в качестве направлений использования промышленного отхода принято производство портландцемента, силикатного кирпича, щебня, песка и извести.

Результаты расчетов показали, что оптимальное конечное время (T^*) равно 30 годам. В момент времени T^* значения $\tilde{Q}_{i,}$, $i = \overline{1,n}$ больше соответствующих ограничений на значения $\underline{Q}_i$, $i = \overline{1,n}$ (табл.).

Таблица

Значения объемов выпуска стройматериалов в оптимальное конечное время T^*

Наименование продукции	Единица измерения	Объем выпуска $\tilde{Q}$
Портландцемент	*тыс.т*	85,0
Силикатный кирпич	*млн.шт*	42,0
Щебень	*тыс.м^3*	118,0
Песок	*тыс.м^3*	134,0
Известь	*тыс.т*	71,0

ЛИТЕРАТУРА

1. **Feichtinger G., Hartl R.F.** Optimale Kontrolle oekonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften. - Berlin: de Gruyter, 1986. - 631s.
2. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976. - 392 с.
3. **Hartl R.F., Kirakossian G.T.** Optimale Nutzung von Bergbauabfaellen zur Produktion von Baumaterialien // Optimization. - 1989. - V. 20, № 3. - S. 355-362.

ГИУА 03.11.1998