Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 3, 1999, с. 379-388.

УДК 621.397:681.3.01

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

С.Е. ПЕТРОСЯН

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА И ИЗОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПО ПОЛОСЕ СПЕКТРОМ В БАЗИСЕ SLANT

Դիտարկվում են վերջավոր սպեկտրով ազդանշանները և ուսումնասիրվում է սահմանափակ սպեկտրով ազդանշանների վերականգնման խնդիրը Slant համակարգի բազիսի համար: Բերված են կոնստրուկտիվ ալգորիթմներ ինտերպոլյացիոն կետերի ընտրության եղանակով: Նմանատիպ խնդիրը լուծված է նաև $f(t_1,t_2)$ ֆունկցիա-պատկերի համար:

Рассматриваются сигналы и изображения с финитным спектром. Ставится задача восстановления сигнала и изображения с ограниченным по полосе спектром. Для базиса Slant приводятся конструктивные алгоритмы выбора базисных точек в задаче экстраполяции, что позволяет получить точное восстановление сигнала и изображения с финитным в любом базисе спектром.

Библиогр.: 8 назв.

Signals and images with a finite spectrum are considered. The problem of signal and image restoration with a band-limited spectrum is established. Constructive algorithms for base point selection in the extrapolation problem is given for Slant base and this permits to obtain the precise recovery of signals and images with a finite spectrum in any basis.

Ref. 8.

При передаче произвольного сигнала f(t) дискретными отсчетами невозможно приближенно восстановить функцию f(t), так как в промежутках между моментами отсчета такая функция может вести себя как угодно, принимая любые значения. Однако спектральные компоненты передаваемых по каналам электро- или радиосвязи сигналов, лежащие вне некоторой конечной полосы частот, не попадают в приемную аппаратуру. Таким образом, вместо всего разнообразия функций-сигналов можно рассматривать лишь сигналы с финитным спектром. При этом оказывается, что если отсчеты сигнала $f(k\Delta)$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$; Δ - определенный интервал времени) брать не слишком редко, то возможно абсолютно точное восстановление сигнала на приемном конце. Этот фундаментальный для теории передачи сигналов факт был обнаружен В.А. Котельниковым в 1933 году.

Непрерывная, ограниченная по полосе функция y(t), заданная на финитном интервале [-T,T], может быть экстраполирована без ошибки вне этого интервала, поскольку такой сигнал аналитический и разложение в ряд Тейлора $y(T+\Delta) = y(T) + \Delta y'(T) + \frac{\Delta^2}{2} y''(T) + \ldots$ может быть использовано для установления y(t) вне [-T,T]. Поэтому все производные на [-T,T] могут быть вычислены. Данное восстановление называется аналитическим. Однако на практике его невозможно применять, так как наблюдаемые числа содержат в себе некоторый шум, а оценка производных - чувствительный к шумам процесс.

В [1, 2] разработаны альтернативные алгоритмы. Для сигналов дискретного времени аналитические свойства исчезают, и для них разработаны алгоритмы [3, 4]. В [8] показано, что функцию с ограниченным в некотором ортогональном базисе спектром можно восстановить при помощи базисных точек. Получен аналитический вид функции в произвольной точке, не принадлежащей множеству базисных точек. Предложен метод выбора базисных точек для восстановления функций с финитным спектром в базисе Уолша [6].

В настоящей статье приводятся конструктивные алгоритмы выбора множества информативных или базисных точек для базиса Slant: сначала для функций от одной переменной, затем для функций от двух переменных.

1. Метод выбора базисных точек для восстановления функций от одной переменной с финитным спектром в базисе Slant. Пусть $f(t)\in R$, $N=2^k$, обозначим через $\hat{f}=[s]f$, где $[s]$ - унитарная наклонная матрица, определенная в [7].

$f=[s]^{-1}\hat{f}$. Так как $[s]^{-1}=[s]^T$ в силу ортогональности $[s]$, то $f=[s]^T\hat{f}$. Отображение $f\to\hat{f}$ назовем наклонным преобразованием на множестве $Z^N=\{0,1,\dots,N-1\}$, $t\in N$.

Зафиксируем подмножество Ω такое, что $\Omega\subset N$, $|\Omega|=N'$, $N'<N$. Рассмотрим множество: $B_\Omega=\{f(t)\colon f=[s]^T_{\Omega\times N}\hat{f}_{N'}\}$.

Построим рекуррентный метод определения информативных точек. Предположим, что в матрице $[s]_{N/2\times N'}$ можно по выбранным строкам выбрать столбцы, т.е. в матрице $[s]_{N/2\times N'}$ можно выбрать N' линейно независимых столбцов, $1\le N'\le 2^{k-1}-1$. Выберем теперь N' линейно независимых столбцов в матрице порядка $N'\times 2^k$, полученной из матрицы $[s]_{N/2\times N'}$:

$N=2^k$,

$$[s]_N=\frac{1}{2^{1/2}}\left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_N & b_N & & -a_N & b_N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} & \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -b_N & a_N & & b_N & a_N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} & \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} s_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & s_{N/2} \end{array}\right]$$

$a_2=1$, $b_N=[1+4(a_{N/2})^2]^{-1/2}$, $a_N=2b_Na_{N/2}$.

Рассмотрим

$$[s]_N = \frac{1}{2^{1/2}} \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ a_N & b_N & \\ \hline 0 & & I_{N/2-2} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{N/2} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -b_N & a_N & \\ \hline 0 & & I_{N/2-2} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{N/2} \end{bmatrix} \end{array}\right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -a_N & b_N & \\ \hline 0 & & I_{N/2-2} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{N/2} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -b_N & a_N & \\ \hline 0 & & I_{N/2-2} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_{N/2} \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

Случай 1. Если $1 \le i_1,\dots,i_{N'} \le N/2$, то по зафиксированным N' строкам невырожденной матрицы

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ a_N & b_N & \\ \hline 0 & & I_{N/2-2} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{N/2} \end{bmatrix}, \quad a_N \ne 0, \quad b_N \ne 0$$

выбираем N' столбцов. Покажем, что это то же самое, если по N' строкам матрицы $[s]_{N/2}$ выбрать N'столбцов.

Если в зафиксированных строках не присутствует вторая строка, то в обеих матрицах строки совпадают. Рассмотрим случай, когда $2 \in \Omega$:

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ a_N & b_N & \\ \hline 0 & & I_{N/2-2} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N/2} \\ a_N c_{11} + b_N c_{21} & \cdots & a_N c_{1N/2} + b_N c_{2N/2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{N/21} & \cdots & c_{N/2N/2} \end{bmatrix}$$

Здесь могут быть два варианта:

Вариант 1. $1 \in \Omega$:

$$\begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & \ldots & c_{i_1 j_{N'}} \\ a_N c_{1 j_1} + b_N c_{2 j_1} & \ldots & a_N c_{1 j_{N'}} + b_N c_{2 j_{N'}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i_{N'} j_1} & \ldots & c_{i_{N'} j_{N'}} \end{bmatrix}$$ - выбранная подматрица.

Покажем, что строки этой подматрицы линейно независимые. Приравняем линейную комбинацию этих строк нулю:

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{i_1 j_1} + \alpha_2 (a_N c_{1 j_1} + b_N c_{2 j_1}) + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_1} = 0, \\ \alpha_1 c_{i_1 j_2} + \alpha_2 (a_N c_{1 j_2} + b_N c_{2 j_2}) + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 c_{i_1 j_{N'}} + \alpha_2 (a_N c_{1 j_{N'}} + b_N c_{2 j_{N'}}) + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_{N'}} = 0 \end{cases}$$

Раскрыв скобки, получим линейную комбинацию строк подматрицы матрицы $[s]_{N(2)}$, строки которой линейно независимые, т.е. коэффициенты равны нулю. Следовательно, строки преобразованной подматрицы также линейно независимые.

Вариант 2. $1 \notin \Omega$:

$$\begin{bmatrix} a_N c_{1 j_2} + b_N c_{2 j_2} & \ldots & a_N c_{1 j_{N'}} + b_N c_{2 j_{N'}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i_{N'} j_1} & \ldots & c_{i_{N'} j_{N'}} \end{bmatrix}$$ - выбранная подматрица.

Строки следующей подматрицы линейно независимые:

$$\begin{bmatrix} c_{2 j_1} & \ldots & c_{2 j_{N'}} \\ c_{i_2 j_1} & \ldots & c_{i_2 j_{N'}} \\ c_{i_{N'} j_1} & \ldots & c_{i_{N'} j_{N'}} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим линейную комбинацию строк выбранной подматрицы

$$\begin{cases} \alpha_1 (c_{1 j_1} a_N + c_{2 j_1} b_N) + \alpha_2 c_{i_2 j_1} + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_1} = 0, \\ \alpha_1 (c_{1 j_2} a_N + c_{2 j_2} b_N) + \alpha_2 c_{i_2 j_2} + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 (c_{1 j_{N'}} a_N + c_{2 j_{N'}} b_N) + \alpha_2 c_{i_2 j_{N'}} + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_{N'}} = 0 \end{cases}$$

Представим строку $c_{i j_1}, c_{i j_2}, \ldots, c_{i j_N}$ в виде линейной комбинации строк матрицы

$$
\begin{bmatrix}
c_{2j_1} & \cdots & c_{2j_{N'}} \\
c_{i_2 j_1} & \cdots & c_{i_2 j_{N'}} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i_{N'} j_1} & \cdots & c_{i_{N'} j_{N'}}
\end{bmatrix},
\quad
\begin{cases}
c_{1j_1} = \beta_1 c_{2j_1} + \beta_2 c_{i_2 j_1} + \ldots + \beta_{N'} c_{i_{N'} j_1}, \\
c_{1j_2} = \beta_1 c_{2j_2} + \beta_2 c_{i_2 j_2} + \ldots + \beta_{N'} c_{i_{N'} j_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{1j_{N'}} = \beta_1 c_{2j_{N'}} + \beta_2 c_{i_2 j_{N'}} + \ldots + \beta_{N'} c_{i_{N'} j_{N'}}.
\end{cases}
$$

Подставим это представление в систему уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N'}$:

$$
\begin{cases}
(\alpha_1 a_N \beta_1 + \alpha_1 b_N) c_{2j_1} + (\alpha_2 + \alpha_1 a_N \beta_2) c_{i_2 j_1} + (\alpha_{N'} + \alpha_1 a_N \beta_{N'}) c_{i_{N'} j_1} = 0, \\
(\alpha_1 a_N \beta_1 + \alpha_1 b_N) c_{2j_2} + (\alpha_2 + \alpha_1 a_N \beta_2) c_{i_2 j_2} + (\alpha_{N'} + \alpha_1 a_N \beta_{N'}) c_{i_{N'} j_2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\alpha_1 a_N \beta_1 + \alpha_1 b_N) c_{2j_{N'}} + (\alpha_2 + \alpha_1 a_N \beta_2) c_{i_2 j_{N'}} + (\alpha_{N'} + \alpha_1 a_N \beta_{N'}) c_{i_{N'} j_{N'}} = 0
\end{cases}
$$

Из условия линейной независимости строк подматрицы

$$
\begin{bmatrix}
c_{2j_1} & \cdots & c_{2j_{N'}} \\
c_{i_2 j_1} & \cdots & c_{i_2 j_{N'}} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i_{N'} j_1} & \cdots & c_{i_{N'} j_{N'}}
\end{bmatrix}
$$

следует равенство нулю коэффициентов:

$$
\begin{cases}
\alpha_1 (a_N \beta_1 + b_N) = 0, \\
\alpha_2 + \alpha_1 a_N \beta_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{N'} + \alpha_1 a_N \beta_{N'} = 0.
\end{cases}
$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_{N'} = 0$. Следовательно, строки подматрицы

$$
\begin{bmatrix}
a_N c_{1j_2} + b_N c_{2j_2} & \cdots & a_N c_{1j_{N'}} + b_N c_{2j_{N'}} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i_{N'} j_2} & \cdots & c_{i_{N'} j_{N'}}
\end{bmatrix}
$$

линейно независимые. Если же $\alpha_1 \neq 0$, но $a_N \beta_1 + b_N = 0$, т.е. $\beta_1 = -b_N / a_N$, то

$$
\begin{cases}
c_{1j_1} = \dfrac{-b_N}{a_N} c_{2j_1} + \beta_2 c_{i_2 j_1} + \ldots + \beta_{N'} c_{i_{N'} j_1}, \\
c_{1j_2} = \dfrac{-b_N}{a_N} c_{2j_2} + \beta_2 c_{i_2 j_2} + \ldots + \beta_{N'} c_{i_{N'} j_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{1j_{N'}} = \dfrac{-b_N}{a_N} c_{2j_{N'}} + \beta_2 c_{i_2 j_{N'}} + \ldots + \beta_{N'} c_{i_{N'} j_{N'}}.
\end{cases}
$$

Следовательно, строки выбранной подматрицы линейно независимые. В случае, если $\beta_i = -b_N / a_N$, выбираем по N' строкам матрицы

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -a_N & b_N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \\ s_{N/2} \\ \\ \end{array}\right], \quad a_N \neq 0, \quad b_N \neq 0
$$

N' столбцов так же, как и в $[s]_{N/2}$.

Случай 2. Если $N/2+1 \le i_1, \ldots, i_{N'} \le N$, то по зафиксированным строкам матрицы

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -b_N & -a_N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \\ -s_{N/2} \\ \\ \end{array}\right], \quad a_N \neq 0, \quad b_N \neq 0
$$

выбираем N' столбцов. Покажем, что это то же самое, если по N' строкам матрицы $[s]_{N/2}$ выбрать N' столбцов, но первой строке соответствует вторая строка матрицы $[s]_{N/2}$ и наоборот. Если в зафиксированных строках не присутствует вторая строка, то в обеих матрицах строки совпадают. Рассмотрим случай, когда вторая строка также зафиксирована

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -b_N & -a_N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N/2-2} \end{array}\right] \left[-s_{N/2} \right] = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N/2} \\ -b_N c_{11} - a_N c_{21} & \cdots & -b_N c_{1N/2} - a_N c_{2N/2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{N/2} & \cdots & c_{N/2N/2} \end{bmatrix}
$$

Здесь могут быть 2 варианта.

Вариант 1. Если первая строка зафиксирована:

$$\begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & \dots & c_{i_1 j_{N'}} \\ -b_N c_{1j_1} - a_N c_{2j_1} & \dots & -b_N c_{1j_{N'}} - a_N c_{2j_{N'}} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i_{N'} j_1} & \dots & c_{i_{N'} j_{N'}} \end{bmatrix}$$ - выбранная подматрица.

Покажем, что строки этой подматрицы линейно независимые. Рассмотрим их линейную комбинацию, которая равна нулю:

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{i_1 j_1} + \alpha_2(-b_N c_{1j_1} - a_N c_{2j_1}) + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_1} = 0, \\ \alpha_1 c_{i_1 j_2} + \alpha_2(-b_N c_{1j_2} - a_N c_{2j_2}) + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 c_{i_1 j_{N'}} + \alpha_2(-b_N c_{1j_{N'}} - a_N c_{2j_{N'}}) + \ldots + \alpha_{N'} c_{i_{N'} j_{N'}} = 0. \end{cases}$$

Раскрыв скобки, получим линейную комбинацию строк подматрицы $[s]_{N'}$, строки которой линейно независимые. Следовательно, коэффициенты равны нулю. Откуда следует, что строки преобразованной матрицы также линейно независимые.

Вариант 2. Если первая строка не зафиксирована:

$$\begin{bmatrix} -b_N c_{1j_1} - a_N c_{2j_1} & \dots & -a_N c_{1j_{N'}} - b_N c_{2j_{N'}} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i_{N'} j_1} & \dots & c_{i_{N'} j_{N'}} \end{bmatrix}$$ - выбранная подматрица.

Далее все рассуждения совпадают с доказательством, приведенным для случая 1 варианта 2. Если $\beta_i = -a_N / b_N$, то выбираем по N' строкам матрицы

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -b_N & a_N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{N'-2} \end{array}\right] \left[\; s_{N'} \;\right], \quad a_N \neq 0, \quad b_N \neq 0$$

N' столбцов так же, как и в $[s]_{N'}$.

Случай 3. Если $1 \le i_1, \ldots, i_p \le N/2$; $N/2+1 \le i_{p+1}, \ldots, i_{N'} \le N$, то первые p столбцов выбираем, как и в случае 1. Затем выбираем остальные $(N'-p)$ столбцов таким образом, чтобы строке $(N/2+i) \in \Omega$ соответствовал столбец с номером, равным номеру столбца, который соответствовал бы i-й строке, плюс N/2. Если при выборе первых p столбцов оказывается, что $\beta_i = -b_N / a_N$, то остальные $(N'-p)$ столбцов выбираем таким образом, чтобы строке $(N/2+i)$ соответствовал столбец с номером, равным номеру столбца, соответствующего i-й строке, минус N/2. Причем $i=3,\dots,N/2$. Если $i=1$, то строке с номером $(N/2+i+1)$ соответствует столбец с номером, равным (N−1), минус номер столбца, соответствующего первой строке. Если $i=2$, то строке с номером $(N/2+i-1)$ соответствует столбец с номером, равным $(N+1)$, минус номер столбца, соответствующего второй строке. Аналогично выбираем, если $\beta_i=-b_N/a_N$ при $i=1,2$. Покажем, что выбранные таким образом столбцы линейно независимые. Пусть $i=3,\dots,N/2$. Рассмотрим линейную комбинацию столбцов, которую приравняем нулю:

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{i_1 j_1}+\dots+\alpha_p c_{i_1 j_p}+\alpha_{p+1} c_{i_1 j_{p+1}}+\dots+\alpha_{N'} c_{i_1 j_{N'}}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 c_{i_p j_1}+\dots+\alpha_p c_{i_p j_p}+\alpha_{p+1} c_{i_p j_{p+1}}+\dots+\alpha_{N'} c_{i_p j_{N'}}=0, \\ \alpha_1 c_{i_{p+1} j_1}+\dots+\alpha_p c_{i_{p+1} j_p}+\alpha_{p+1} c_{i_{p+1} j_{p+1}}+\dots+\alpha_{N'} c_{i_{p+1} j_{N'}}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 c_{i_{N'} j_1}+\dots+\alpha_p c_{i_{N'} j_p}+\alpha_{p+1} c_{i_{N'} j_{p+1}}+\dots+\alpha_{N'} c_{i_{N'} j_{N'}}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha_1+\alpha_2) c_{i_1 j_1}+\dots+(\alpha_{N'-1}+\alpha_{N'}) c_{i_1 j_{N'-1}}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\alpha_1+\alpha_2) c_{i_p j_1}+\dots+(\alpha_{N'-1}+\alpha_{N'}) c_{i_p j_{N'-1}}=0, \\ (\alpha_1+\alpha_2) c_{i_{p+1} j_1}+\dots+(\alpha_{N'-1}+\alpha_{N'}) c_{i_{p+1} j_{N'-1}}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\alpha_1+\alpha_2) c_{i_{N'} j_1}+\dots+(\alpha_{N'-1}+\alpha_{N'}) c_{i_{N'} j_{N'-1}}=0. \end{cases}$$

Из первых p уравнений имеем $(\alpha_1+\alpha_2)=0,\dots,(\alpha_{N'-1}+\alpha_{N'})=0$. Из остальных $(N'-p)$ уравнений имеем $(\alpha_1-\alpha_2)=0,\dots,(\alpha_{N'-1}-\alpha_{N'})=0$. Следовательно, $\alpha_1=0,\dots,\alpha_{N'}=0$. Пусть $i=1,2$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{1j_1} + \alpha_2 c_{1j_2} + \alpha_3 c_{1_{(N+1)-j_1}} + \alpha_4 c_{1_{(N+1)-j_2}} = 0, \\ \alpha_1 c_{2j_1} + \alpha_2 c_{2j_2} + \alpha_3 c_{2_{(N+1)-j_1}} + \alpha_4 c_{2_{(N+1)-j_2}} = 0, \\ \alpha_1 c_{N/2+1j_1} + \alpha_2 c_{N/2+1j_2} + \alpha_3 c_{N/2+1_{(N+1)-j_1}} + \alpha_4 c_{N/2+1_{(N+1)-j_2}} = 0, \\ \alpha_1 c_{N/2+2j_1} + \alpha_2 c_{N/2+2j_2} + \alpha_3 c_{N/2+2_{(N+1)-j_1}} + \alpha_4 c_{N/2+2_{(N+1)-j_2}} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_3) c_{1j_1} + (\alpha_2 + \alpha_4) c_{1j_2} = 0, \\ (\alpha_1 - \alpha_3) c_{2j_1} + (\alpha_2 - \alpha_4) c_{2j_2} = 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_3) c_{N/2+1j_1} + (\alpha_2 + \alpha_4) c_{N/2+1j_2} = 0, \\ (\alpha_1 - \alpha_3) c_{N/2+2j_1} + (\alpha_2 - \alpha_4) c_{N/2+2j_2} = 0 \end{cases}$$

Из первых двух уравнений имеем $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ и $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$

Если же $i = 1$, то система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_3) c_{1j_1} = 0, \\ (\alpha_1 - \alpha_3) c_{N/2+2j_1} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$.

Если же $i = 2$, то система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (\alpha_2 - \alpha_4) c_{2j_2} = 0, \\ (\alpha_2 + \alpha_4) c_{N/2+1j_2} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$.

2. Метод выбора базисных точек для восстановления функций от двух переменных с финитным в базисе Slant спектром. Система функций наклонного преобразования является базисом для R^N, так как состоит из N ортогональных функций. Для произвольной функции $f(t_1,t_2) \in R^{N\times N}$ рассмотрим $\hat{f} = [s] f [s]$. Так как $[s]^{-1} = [s]^T$ в силу ортогональности [s], то $f = [s]^{-1} \hat{f} [s]^{-1} = [s]^T \hat{f} [s]^T$. Отображение $f \to \hat{f}$ назовем наклонным преобразованием на множестве $Z^N = \{0,1,\ldots,N-1\}$, $t \in Z^N$. Зафиксируем подмножество $\Omega \subset Z^N \times Z^N$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_1 \subset Z^N$, $\Omega_2 \subset Z^N$, $|\Omega_1| = N'$, $|\Omega_2| = N''$, $N = 2^k$. Для этого множества Ω рассмотрим следующее множество

$$B_\Omega = \{f(t_1,t_2):\ f(t_1,t_2) = [s]^T_{N\times N} \hat{f}_{N\times N} [s]^T_{N\times N} = \hat{f}_{\Omega} [s]^T_{N\times N}\}.$$

Как показано в предыдущем пункте, функцию $f(t_1,t_2) \in B_\Omega$ можно восстановить, имея только $N' \times N''$ ее значений в базисных точках. Базисные точки выбираются по номерам столбцов матрицы $(s)_{mt_1}$, $m \in \Omega_1$, $t_1 \in T_{b_1}$, $\left|T_{b_1}\right| = N'$ и номерам строк матрицы $(s)_{t_2 n}$, $t_2 \in T_{b_2}$, $\left|T_{b_2}\right| = N''$, $n \in \Omega_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Slepian D.S.** et al. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty Principle // Bell Syst. Tech. J. - 1961. - V. 40, № 1. - P. 43-84.
2. **Papoulis A.** A new Algorithm in Spectral Analysis and Band-limited Extrapolation // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1975. - V. CAS-25. - P. 735-742.
3. **Sabri M.S. and Steenart W.** An Approach to Band-Limited Signal Extrapolation: The Extrapolation Matrix // IEEE Trans. Circuits Syst.- February 1978. - V. CAS-25. - P 74-78.
4. **Cadzow J.A.** Improved Spectral Estimation from Incomplete Sampled Data Observations // Presented at the RADC Spectrum Estimation Workshop, Rome, NY. May 24-26, 1978; Also see Trans., Acoust., Speech, Signal Processing. - Feb. 1979. - V. ASSP-27. - P. 4-12.
5. **Jain A.K. and Ranganath S.** Extrapolation Algorithms for Discrete Signals with Application in Spectra Estimation // IEEE Trans. On Acoust., Speech, Signal Processing. - August 1981. - V. ASSP-29. - P. 830-845.
6. **Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.** Ряды и преобразования Уолша. - М.: Наука, 1987. - 344 с.
7. **Pratt W.K.** Slant Transform Image Coding // IEEE Trans. on Communications. - August 1974. - V. Com-22, №. 8. - P. 1075-1093.
8. **Петросян С.Е.** Восстановление сигнала и изображения с ограниченным по полосе спектром в базисе Уолша // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 1999. - Т. 52, № 2. - С. 218-224.

ЕГУ 03.09.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 3, 1999, с. 388-392

УДК 621.317.791

НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Р.А. СИМОНЯН, Э.Г. ВЕЗИРЯН, О.А. МАРТИРОСЯН

БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ СИГНАЛА

Առաջարկված է անընդհատ գործող սարք, որը հնարավորություն է ընձեռում հետևել մուտքային ազդանշանի ծայրագույն արժեքին՝ վերջիններիս հայտնվելու մեծ հաճախության դեպքում: