

Г.Т. КИРАКОСЯН

**АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКОЙ СХЕМЫ УТИЛИЗАЦИИ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ОТХОДОВ**

Պատարված է արդյունաբերական բաֆոնների օգտագանման դինամիկ սխեմաների
ավտոմատիզացիայի և արդյունաբերական խնդիրը Առաջարկված են մաթեմատիկական մոդելը,
մաթեմատիկական և ստացված են օպտիմալության պայմանները, Մշակված են ալգորիթի և
ֆորմատը, կատարված է բալանի կաշվարկ:

Рассмотрена задача автоматизации проектирования динамической
схемы утилизации промышленных отходов региона. Предложены
математическая модель, метод решения и получены условия оптимальности
Разработаны алгоритм и пакет программ. Произведен численный расчет.

Ил. 2 Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

The problem of automated dynamic circuit design for the industrial waste
utilization in the region is considered. A mathematical model and its method of solution is
proposed. The optimality conditions are obtained. The algorithm and software package
are elaborated. The numerical calculations are performed.

Ил. 2. Table 1. Ref. 3.

Потребление отходов перерабатывающих предприятий
возрастает с вовлечением большого числа предприятий,
удовлетворением спроса потребителей промышленных отходов и
т.д. Наиболее реальным на первом этапе является решение задачи
автоматизированного проектирования динамической схемы
утилизации промышленных отходов региона, при котором полная
или частичная замена первичного сырья на отходы не влечет за
собой выполнительных капитальных вложений и ухудшения качества
выпускаемой продукции [1, 2].

Задача автоматизированного проектирования динамической
схемы утилизации промышленных отходов на региональном уровне
требует проектирования оптимальной структуры взаимосвязей
«поставщик-потребитель» промышленных отходов (подзадача 1);
оптимального синтеза структуры распределения промышленных
отходов поставщиков по предприятиям-потребителям (подзадача 2).

Для математической формализации подзадачи 1 опишем
параметры модели: z_i^0 - первоначальный объем i -го промышленного
отхода; $z_i(t)$ - скорость изменения объема i -го промышленного
отхода во времени; n - количество разнотипных промышленных
отходов; m - количество потенциальных предприятий-потребителей
промышленных отходов; N - множество $\{1, \dots, n\}$, определяющее

количество предприятий-поставщиков промышленных отходов. M - множество $\{1, \dots, m\}$, определяющее количество предприятий-потребителей промышленных отходов; $\bar{Q}_{ij}(t)$ - долевое участие i -го промышленного отхода в единице объема сырья на j -ом предприятии-потребителе; $\bar{D}_j(t)$ - доля заменяемого компонента в единице объема сырья j -го предприятия-потребителя; $G_j(t)$ - объем потребляемого сырья на j -ом предприятии-потребителе в каждый момент времени; C_j - затраты на единицу объема сырья для каждого момента времени при использовании на j -ом предприятии-потребителе традиционного сырья; $\bar{C}_2(t)$ - затраты на единицу объема i -го промышленного отхода для j -го предприятия-потребителя в каждый момент времени; γ - постоянная скидка объема выпуска продукции; $S_i(t)$ - скорость поступления i -го объема промышленного отхода во времени.

Для того чтобы упростить систему обозначений модели, примем $Q_{ij}(t) = G_j(t)\bar{Q}_{ij}(t)$, $C_{ij}(t) = C_j(t) - \bar{C}_2(t)$, $D_j(t) = G_j(t)\bar{D}_j(t)$.

Таким образом, динамическая математическая модель подзадачи 1 представляет собой проблему максимизации без учета и выполняет только роль смещения значения целевой функции $\bar{C}_2(t)$ по вертикальной константе, если $\bar{C}_2(t) = \text{const}$, $t \in [0, \infty)$:

целевая функция -

$$\max_{Q_{ij}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n C_{ij}(t) Q_{ij}(t) dt; \quad (1)$$

ограничения -

$$z_i(t) = S_i(t) - \sum_{j=1}^m Q_{ij}(t), \quad i \in N, \quad (2)$$

$$z_i(0) = z_i^0, \quad i \in N, \quad (3)$$

$$z_i(t) \geq 0, \quad i \in N, \quad (4)$$

$$Q_{ij}(t) \geq 0, \quad (i, j) \in N \times M, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_{ij}(t) \leq D_j(t), \quad j \in M. \quad (6)$$

Окончательный синтез структуры "поставщики-потребители" промышленных отходов производится по неотрицательной величине δC :

$$\delta C = \sum_{j=1}^m C_j - K \geq 0, \quad (7)$$

где $K = \min_{Q_{ij}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sum_{i=1}^n \left[C_j(t) \left(1 - \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{ij}(t) \right) + \sum_{i=1}^n \bar{C}_2(t) \bar{Q}_{ij}(t) \right] G_j(t) dt$.

Прежде чем решить модель (1)-(5) посредством принципа максимума Понтрягина и определить условия оптимальности [1, 3], исключим тривиальные и частные случаи следующим простым утверждением.

Лемма 1 Если для какой-то пары $(i, j) \in N \times M$ выполняется неравенство $C_{ij} \leq 0$, то оптимальное решение $(Q_{11}(t), Q_{12}(t), \dots, Q_{nm}(t))$ будет $Q_{ij}(t) = 0$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Допустим, $\bar{Q} = (\bar{Q}_{11}(t), \bar{Q}_{12}(t), \dots, \bar{Q}_{nm}(t))$ есть какое-то оптимальное решение, где $\bar{Q}_{ij} \neq 0$. Структура ограничений (2)-(4) и (6) показывает, что решение $Q = (Q_{11}(t), Q_{12}(t), \dots, Q_{nm}(t))$, определенное как

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } (i, j) = (i, j), \\ \bar{Q}_{ij} & \text{для других пар,} \end{cases}$$

для всех t допустимо. Кроме того, разница между величинами этих решений представлена в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n C_{ij} [Q_{ij}(t) - \bar{Q}_{ij}(t)] dt = - \int_0^{\infty} C_{ij} \bar{Q}_{ij}(t) \lambda dt \geq 0$$

Так как решение Q доминирует над \bar{Q} , то оно оптимально, что и требовалось доказать.

Исключая эти тривиальные случаи, примем следующие две гипотезы:

Гипотеза 1. Для каждого $j \in M$ существует хотя бы одно $i \in N$, когда $C_{ij} > 0$.

Гипотеза 2. Для каждого $i \in N$ существует хотя бы одно $j \in M$, когда $C_{ij} > 0$.

Гипотеза 3. Для каждого $j \in M$ существует хотя бы одна пара (i, k) с $(i, k) \in N$ и $i \neq k$, когда $C_{ij} \neq C_{kj}$.

Из принципа максимума Понтрягина [3] следует, что оптимальное решение должно удовлетворять как ограничениям (2)-(6), так и следующим условиям:

$$(\partial / \partial Q_{ij}) L = C_{ij} - \lambda_i(t) + \mu_{ij}(t) - v_j(t) = 0, \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = r\lambda_i - \eta_i(t) \text{ для всех } t, \text{ где } \lambda_i \text{ непрерывна,} \quad (9)$$

$$\lambda_i(t) - \lambda_i(t') \geq 0 \text{ для непрерывных точек } \lambda_i, \quad (10)$$

$$\eta_i(t) \geq 0, \mu_{ij}(t) \geq 0, v_j(t) \geq 0, \quad (11)$$

$$\eta_i(t)\lambda_i(t) = \mu_{ij}(t)Q_{ij}(t) = v_j(t) \left[D_j - \sum_{i=1}^n Q_{ij}(t) \right] = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что функция Лагранжа линейная для переменных состояний $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и контроля (Q_{11}, \dots, Q_{nm}) , выражения

(8)-(12) также достаточны для оптимальности, если выполняется гранично-поперечное условие [3]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \lambda_i(t) = 0. \quad (13)$$

Покажем справедливость утверждения, что для каждого потребителя $j \in M$ существует только один поставщик отходов, если скорость поступления i -го промышленного отхода во времени для всех i равна нулю ($S_i(t) = 0, i \in N$).

Лемма 2. Если для всех $i \in N$ действительно $\lambda_i^0 > 0$, то множество $I_i(t, \lambda_i^0)$ для всего ограниченного промежутка временного интервала $t \geq 0$ одноэлементное.

Доказательство. Предположим, что существуют хотя бы два поставщика i и k (где $i \neq k$), для которых выполняется $f_{ij}(t, \lambda_i^0) = f_{kj}(t, \lambda_k^0)$, т.е. $\lambda_i^0 e^{-\rho t} - C_{ij} = \lambda_k^0 e^{-\rho t} - C_{kj}$. Отсюда

$$(\lambda_i^0 - \lambda_k^0) e^{-\rho t} = C_{ij} - C_{kj}. \quad (14)$$

Если $i \neq 0, k \neq 0$, то левая сторона (14) или равняется нулю, или непостоянная, а правая сторона, наоборот, с учетом гипотезы 3, постоянная величина, отличная от нуля. Если $i \neq 0, k = 0$ (или $i = 0, k \neq 0$), то $\lambda_i^0 e^{-\rho t} = C_{ij}$ (или $\lambda_k^0 e^{-\rho t} = C_{kj}$). А т.к. $\lambda_i^0 > 0$ ($\lambda_k^0 > 0$), то левая сторона полученного уравнения непостоянная, а правая - постоянная. В обоих случаях имеется противоречие. Отсюда следует, что множество $I_i(t, \lambda_i^0)$ для всего $t \geq 0$ одноэлементное, т.е. лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что для $j \in M$ и всего ограниченного промежутка временного интервала $t \geq 0$ существует единственный поставщик с индексом i^* , который определяется в виде $i^* = i^*(j, t, \lambda^0)$ и для которого справедливо $f_{i^*j}(t, \lambda_{i^*}^0) = g_j(t, \lambda^0)$. Если $\lambda_i^0 > 0$ для $i \in N$, то $f_{ij}(t, \lambda_i^0) \rightarrow \infty$, поскольку $(i, j) \in N \times M$. Если $f_{i^*j} = 0$ и поскольку $i \in N$, то $T_i(\lambda^0) = \sup\{t / \exists j \in M: i = i^*(j, t, \lambda^0), t \geq 0\}$.

На графике (рис.1) оптимальные значения f_{ij} показаны жирными линиями.

Из гипотезы 2 имеем $C_i > 0$ для всех $i \in N$. Поэтому значение $T_i(\lambda^0)$ определено и положительно. Для каждого момента времени $t \in [0, \infty)$ в результате решения (1)-(6) синтезируется оптимальная структура взаимосвязей "поставщики-потребители" промышленных отходов на региональном уровне с определением оптимального объема технологически пригодного i^* -го отхода на j -ом предприятии-потребителе. Для окончательного принятия синтезированной структуры взаимосвязей "поставщики-потребители" отходов (подзадача 2) на всем промежутке времени производства

применяется критерий суммарной экономии затрат производства на сырье δC выпускаемой продукции предприятий-потребителей (7). Если, при прочих равных условиях, суммарная экономия затрат производства на сырье выпускаемой продукции предприятий-потребителей отходов отрицательная ($\delta C < 0$), то замена отходов на региональном уровне нецелесообразна, и полученная структура "поставщика-потребители" отвергается. Если же $\delta C \geq 0$, то принимается структура связей "поставщики-потребители" промышленных отходов, синтезированная при помощи (1)-(6).

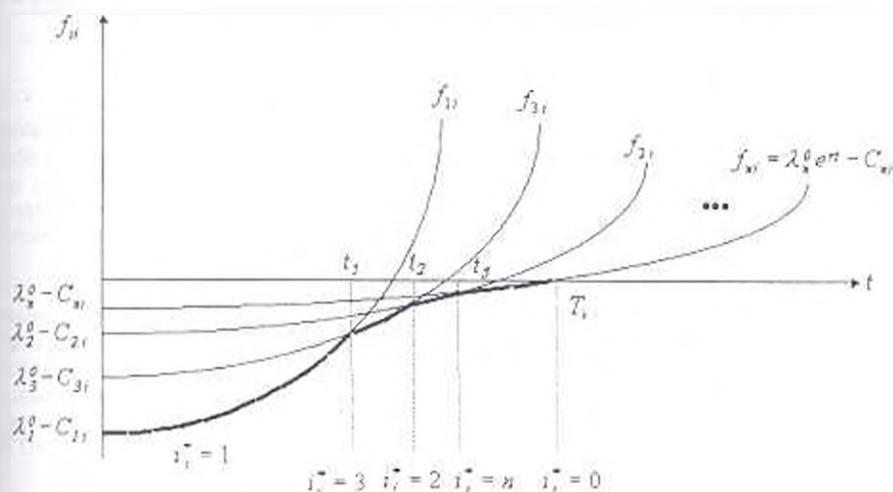


Рис. 1. График зависимости $f_{ij}(t, \lambda_{ij}^0)$ от времени t для фиксированного λ_{ij}^0 и разных C_{ij} , $C_{ij} = \overline{1, n}$

На основе описанного алгоритма задачи разработан пакет программ **dpospotl**, который работает в среде Windows. Апробация пакета **dpospotl** проведена на числовом примере, где в качестве предприятий-потребителей промышленных отходов производства приняты предприятия цементной промышленности.

Результаты расчетов (табл.) показали, что имеющиеся промышленные отходы исчерпываются за 8 лет. Представлена динамика использования объемов отходов по потребителям (Q_{ij}) (рис. 2), где кривая 1 соответствует взаимосвязи потребителя 1 с отходом 2; кривая 2 - потребителя 2 с отходом 1; кривая 2' - потребителя 2 с отходом 2; кривая 3 - потребителя 3 с отходом 4; кривая 4 - потребителя 4 с отходом 1; кривая 5 - потребителя 5 с отходом 3; кривая 6 - потребителя 6 с отходом 3; кривая 6' - потребителя 6 с отходом 2.

Значения разностей затрат C_{II}

Отходы производства	Предприятия-потребители					
	1	2	3	4	5	6
1	900,0	1170,0	1110,0	860,0	1110,0	860,0
2	1030,0	1140,0	1160,0	830,0	1200,0	960,0
3	950,0	1110,0	1140,0	780,0	1270,0	990,0
4	970,0	1090,0	1210,0	740,0	1240,0	850,0

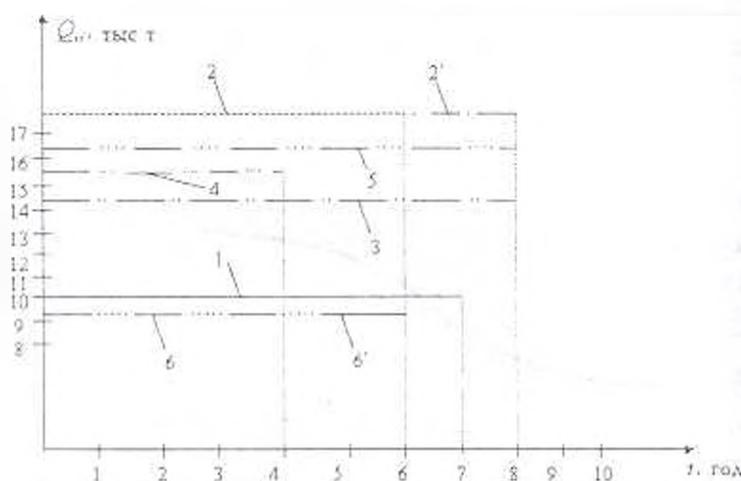


Рис. 2 Динамика использования объемов промышленных отходов по потребителям

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Г.Т., Зоргер Г. Оптимальная утилизация отходов производства на региональном уровне // Изв. вузов Горный журнал - 1991. - № 2. - С. 52-56
2. Ласкорин Б.Н., Барский Л.А., Персиц В.З. Безотходная технология переработки минерального сырья: Системный анализ. - М.: Недра, 1984. - 332с.
3. Feichtinger G., Hartl R.F. Optimale Kontrolle oekonomischer Prozesse. Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften. - Berlin: de Gruyter, 1986. - 631 p.