

результаты [2, 4], доказывается, что существует решение рассматриваемой краевой задачи в виде (19) (или (30) для второй задачи), причем при $\delta < \delta_0$ (δ_0 - некоторая известная постоянная) ряд (19) и ряды производных по γ и φ (или по x и y для второй задачи) до вторых порядков сходятся равномерно в замкнутой Ω области, ряды третьих производных (19) по γ и φ (или по x и y) сходятся в любом пространстве $L_p(\Omega)$ ($p > 1$), а ряды четвертых производных сходятся в $L_2(\Omega)$. При решении конкретных практических задач обычно ограничиваются вторым или третьим приближением решения рассматриваемых краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. - 415 с.
2. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976. - 534 с.
3. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит. - Ереван. Айастан, 1975. - 435 с.
4. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. - 241 с.
5. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж., Овсепян Д.Л. Об одной задаче изгиба цилиндрически анизотропной пластинки в виде прямоугольника // Сб. науч. тр. конф., посвященной 90-летию со дня рождения проф. Т.Т.Хачатряна и проф. О.М.Сапонджяна / ЕрАСИ. - Ереван, 1999. - С. 176-181.

ЕГУ

10.05.1999

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 3, 1999, с. 295-301.

УДК 539.214

МЕХАНИКА

Г.Л. ПЕТРОСЯН

О РАБОТЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Իրական ծակոտիկեն նյութերի պլաստիկության մեխանիկա և սրղևկի փոշուց արտաբաժանված հասկայված գլանաձև նմուշների սեղմմանը փորձարկման օվեպմենտի կիրառումը մշակված է ծակոտիկեն նյութերի պլաստիկ դեֆորմացիան լրիվ աշխատանքի և նրա քաղաղդիկների որոշման մեթոդիկան: Պլաստիկ դեֆորմացիան հետափոխման և ծավալի փոփոխության աշխատանքները, ինչպես նաև որակագին գնահատվել են նրանց մեծությունները:

На основе зависимостей теории пластичности реальных пористых материалов и данных испытания на сжатие спеченных цилиндрических образцов из медного порошка разработана методика определения полной работы пластических деформаций пористых материалов и ее составляющих -

работ пластических деформаций формоизменения и изменения объема. Дана качественная оценка их величин.

Ил. 2 Табл. 1 Библиогр.: 5 назв.

On the basis of plasticity theory dependencies of real porous materials and test data on compression of sintered cylindrical specimens made of copper powder, a complete operation determination method for plastic deformations of porous materials and their components, i.e. plastic deformation operations for shape and volume changing, is established. The quality of their values is estimated.

Ил. 2. Табл. 1. Ref. 5.

Спеченные материалы и изделия, полученные методами порошковой металлургии, нашли широкое применение в различных отраслях промышленности. В зависимости от условий эксплуатации они могут иметь различную начальную пористость θ_0 . Известно, что как в беспористых, так и в литых материалах имеются микropopы и источники появления новых пор - трещины и неметаллические включения различного происхождения. Под действием внешних нагрузок пористость материала изменяется, что может привести к его разрушению.

Исследования показывают, что пористость материала оказывает существенное влияние на его физико-механические свойства [1]. Известны различные модели теории пластичности, учитывающие пористость материала [2-4]. Однако при их использовании возникают трудности точного учета действительных механических свойств различных пористых материалов. Анализ этих и других моделей теории пластичности показывает, что основным их отличием является использование разных функций пористости α и β . При этом в них не учитываются особенности каждого материала, так как в уравнениях этих теорий вне зависимости от типа материала используются одни и те же функции пористости α и β .

Можно предложить и другие функции пористости, обеспечивающие переход к уравнениям теории пластичности беспористых материалов и подтвержденные экспериментами. Так как особенности конфигурации пор зависят не только от свойств порошков материала, но и от параметров технологического процесса их получения, то зависимости функции пористости каждый раз могут меняться. В [1] эта проблема была решена следующим образом. Сначала выбираются известные и наиболее простые для использования функции пористости, для учета особенностей пористости реальных материалов в уравнения теории пластичности вводятся постоянные для данного материала параметры m и n , далее их величины находятся на основании экспериментальных данных.

В данной работе предлагается методика определения работы пластических деформаций пористых материалов. С этой целью используются следующие зависимости теории течения пористых материалов [1].

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{\beta^{m+n}} \left(\frac{3}{2} S_1 S_2 + 9\alpha^n \sigma_1^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

$$\overline{d\varepsilon}_{\text{экв}} = \beta^{2n-1} \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_3^2}{\alpha^n} \right)^{1/2} \quad (2)$$

$$d\theta = \frac{9\alpha^n (1-\theta) \sigma_0 \overline{d\varepsilon}_{\text{экв}}}{\beta^{2n} \sigma_{\text{экв}}} \quad (3)$$

$$d\varepsilon_0 = \frac{3\overline{d\varepsilon}_{\text{экв}}}{2\beta^{2n} \sigma_{\text{экв}}} \left[\sigma_0 - (1-2\alpha^n) \delta_{ij} \sigma_{ij} \right] \quad (4)$$

где $\sigma_{\text{экв}}$ и $\overline{d\varepsilon}_{\text{экв}}$ - эквивалентные напряжение и приращение пластических деформаций; $d\varepsilon_{ij}$ и $d\varepsilon_{ij}$, S_{ij} и σ_{ij} - компоненты девиатора и тензора приращений пластических деформаций и напряжений; $d\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\delta_{ij} d\varepsilon_{ij})$ - приращение средней деформации;

$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\delta_{ij} \sigma_{ij})$ - среднее напряжение; $d\theta$ - приращение пористости; δ_{ij} - символ Кронекера.

В пределах $0 \leq \theta \leq 0.25$ сложные функции пористости α и β [2] представлены в аппроксимированном виде

$$\alpha = 0.15\theta^{0.6}, \quad \beta = 1 - 1.8\theta^{0.6}.$$

Известно, что работа пластических деформации в главных напряжениях $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и приращениях главных деформаций $(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ имеет вид

$$A^p = \int (\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3). \quad (5)$$

Учитывая уравнение (4), имеем

$$A^p = \int \left[(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_0 + 2\alpha^n \sigma_1 \sigma_0 + \sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_0 + 2\alpha^n \sigma_2 \sigma_0 + \right. \\ \left. + \sigma_3^2 - \sigma_3 \sigma_0 + 2\alpha^n \sigma_3 \sigma_0 \right) \frac{3\overline{d\varepsilon}_{\text{экв}}}{2\beta^{2n} \sigma_{\text{экв}}}.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$A^p = \int \left[\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 9\alpha^n \sigma_0 \right) \frac{\overline{d\varepsilon}_{\text{экв}}}{\beta^{2n} \sigma_{\text{экв}}}. \quad (6)$$

Окончательно, с учетом (1), получим

$$A^p = \int \frac{\sigma_{\text{экв}} \overline{d\varepsilon}_{\text{экв}}}{\beta^{2n-1}} \quad (6)$$

Теперь преобразуем уравнение (5) с учетом зависимостей разложения тензора напряжения на сумму шарового тензора и девиатора напряжения:

$$\sigma_1 = S_1 + \sigma_0, \quad \sigma_2 = S_2 + \sigma_0, \quad \sigma_3 = S_3 + \sigma_0$$

где

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0 \quad (7)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} A^p &= \int [(S_1 - \sigma_0) d\varepsilon_1 + (S_1 + \sigma_0) d\varepsilon_2 + (S_1 + \sigma_0) d\varepsilon_3] = \\ &= \int (S_1 d\varepsilon_1 + S_2 d\varepsilon_2 + S_3 d\varepsilon_3 + \sigma_0 (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3)). \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = d\varepsilon_v, \quad (9)$$

где $d\varepsilon_v$ является объемной деформацией пористого материала

$$\text{Учитывая, что в (4) } d\varepsilon_v = \frac{3\overline{d\varepsilon}_{\text{жн}}}{2\beta^{0.5}\sigma_{\text{жн}}}(S_0 + 2\alpha^m \delta_0 \sigma_0), \text{ из (8)}$$

получим

$$A^p = \int \left\{ S_1 S_1 + S_2 S_2 + S_3 S_3 + 2\alpha^m \sigma_0 (S_1 + S_2 + S_3) \right\} \frac{3\overline{d\varepsilon}_{\text{жн}}}{2\beta^{0.5}\sigma_{\text{жн}}} + \int \sigma_0 d\varepsilon_v.$$

где $S_1 + S_2 + S_3 = 0$, $\sqrt{\frac{3}{2}(S_1 S_1 + S_2 S_2 + S_3 S_3)} = \sigma$ - интенсивность напряжений.

Следовательно, имеем

$$A^p = \int \frac{\sigma^2 \overline{d\varepsilon}_{\text{жн}}}{\beta^{0.5} \sigma_{\text{жн}}} + \int \sigma_0 d\varepsilon_v. \quad (10)$$

Таким образом, работа пластических деформаций пористых материалов, подобно работе упругих деформаций беспористых материалов, разделяется на две части - работу пластических

деформаций формоизменения $A_{\text{ф}}^p = \int \frac{\sigma^2 \overline{d\varepsilon}_{\text{жн}}}{\beta^{0.5} \sigma_{\text{жн}}}$ и работу пластических

деформаций изменения объема $A_{\text{об}}^p = \int \sigma_0 d\varepsilon_v$.

С учетом зависимостей (1) и (2) преобразуем $A_{\text{ф}}^p$ к виду

$$\begin{aligned} A_{\text{ф}}^p &= \int \frac{\sigma^2 \overline{d\varepsilon}_{\text{жн}}}{\beta^{0.5} \sigma_{\text{жн}}} = \int \frac{\sigma^2 \beta^{2\alpha-0.5} \left(\overline{d\varepsilon_1^2} + \frac{d\varepsilon_v^2}{9\alpha^m} \right)^{0.5}}{\beta^{0.5} \frac{1}{\beta^{0.5-0.5}} (\sigma^2 + 9\alpha^m \sigma_0^2)^{0.5}} = \\ &= \int \frac{\sigma^2 \left(1 + \left(\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right)^2 \frac{1}{9\alpha^m} \right)^{0.5} \overline{d\varepsilon_1}}{\sigma \left(1 + 9\alpha^m \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2 \right)^{0.5}} = \int f(\theta, \varepsilon) \sigma \overline{d\varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$f(\theta, \varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{9\alpha^m} \left(\frac{d\varepsilon_r}{d\varepsilon_1} \right)^2 \right)^{0.5} \left(1 + \alpha^m \left(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_1} \right)^2 \right)^{-0.5} \quad (12)$$

$\overline{d\varepsilon_1} = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_r d\varepsilon_{\theta} \right)^{0.5}$ - интенсивность приращений пластических деформаций.

Из (6) и (10) с учетом (11) устанавливаем

$$\int \frac{\sigma_{\theta} \overline{d\varepsilon_{\theta\theta}}}{\beta^{n-1}} = \int f(\theta, \varepsilon) \sigma \overline{d\varepsilon_1} + \int \sigma_{\theta} d\varepsilon_{\theta} \quad (13)$$

Приведем численные расчеты. С этой целью используем экспериментальные данные [3], где испытанию на сжатие подверглись цилиндрические спеченные образцы из меди, имеющие различную начальную пористость θ_0 (рис. 1, 2).

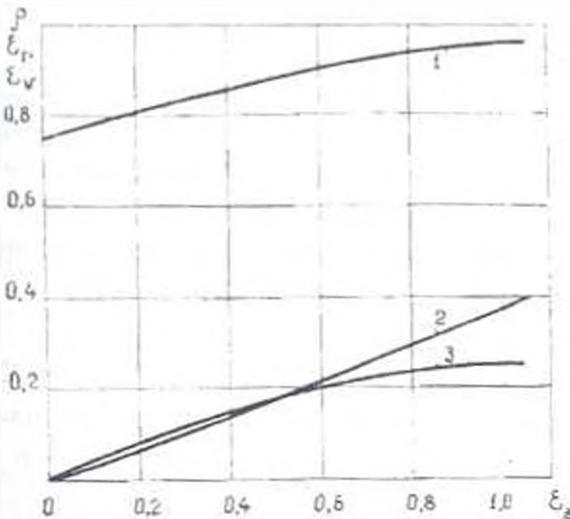


Рис. 1. Кривые изменения относительной плотности пористого материала $\rho = 1 - \theta$ (кр.1) радиальной ε_r (кр.2) и объемной ε_{θ} (кр.3) логарифмических деформаций в зависимости от осевой логарифмической деформации сжатия ε_2 при $\theta_0 = 0.255$.

Так как в [3] все расчеты, в том числе определение функций пористости α и β , осуществлялись для данного материала, то диаграмма его деформирования (кр.2 на рис.2) является действительной. Поэтому в настоящей работе дополнительно не будут определяться параметры пористости материала m и n , а вместо (12) и (13) будут применены формулы, полученные при использовании зависимостей теории пластичности пористых материалов [3]:

$$f(\theta, \varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{6.25\theta} \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} \right) \right) \left(1 + 6.25\theta \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right) \right) \quad (14)$$

$$\int \rho \sigma_{\text{акт}} d\varepsilon_{\text{акт}} = \int f(\theta, \varepsilon) \sigma d\varepsilon + \int \sigma_0 d\varepsilon_{\text{акт}} \quad (15)$$

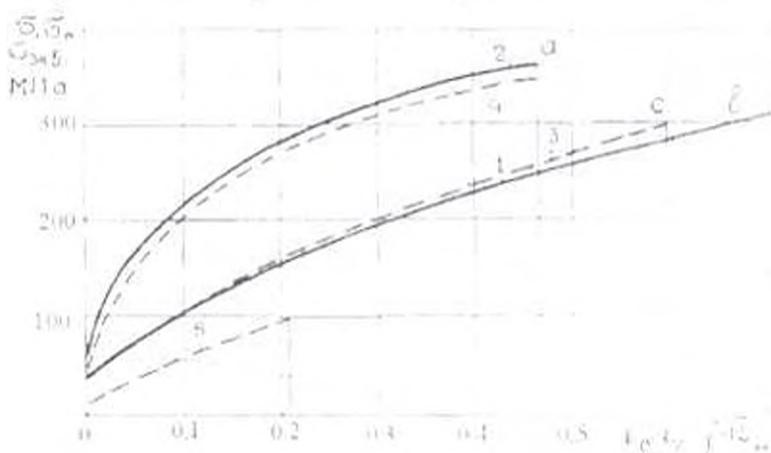


Рис. 2 Кривые изменения осевого напряжения σ_0 (МПа) и диаграмма деформирования материала $\sigma_0 = f(\varepsilon_{\text{акт}})$ (рис. 2) при $\theta_0 = 0,125$, рассчитанная на основании зависимостей теории пластичности листовых материалов, полученных в [3]

Используя экспериментальные данные рис. 1 и кривые 1 и рис. 2 для различных значений ε ($\Delta\varepsilon = -0,125$) установлены величины $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon_1$ и σ_1 и определены приращения окружной деформации (по формуле (9)) - $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2$, $\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_0/3$, $\int d\varepsilon = \sum \Delta\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon}$ (см. табл.)

Таблица

ε	$\Delta\varepsilon$	$\Delta\varepsilon_1$	$\Delta\varepsilon_2$	$\Delta\varepsilon_3$	$\sigma_0 - \sigma_1$ МПа	$\sigma_0 - \sigma_2$ МПа	ε_0	$\Delta\varepsilon_1$	$\int d\varepsilon$	σ	σ_1
0	0	0	0	0	40	13,3	0	0	0	0	0
0,125	0,125	0,05	0,04	0,035	115	38,3	0,05	0,11	0,11	0,455	0,21
0,25	0,125	0,05	0,04	0,035	175	58,3	0,10	0,11	0,22	0,455	0,21
0,375	0,125	0,04	0,045	0,04	220	73,3	0,14	0,113	0,333	0,354	0,125
0,50	0,125	0,03	0,05	0,045	260	86,7	0,17	0,117	0,45	0,256	0,065
0,625	0,125	0,03	0,05	0,045	290	96,7	0,20	0,117	0,567	0,256	0,065
0,65	0,025	0,005	0,01	0,01	300	100,0	0,205	0,023	0,59	0,217	0,047

Данные таблицы позволяют оценить поведение функции $f(\theta, \varepsilon)_1$ для различных степеней деформирования заготовки и величин составляющих уравнения (15).

С учетом обозначений, приведенных в таблице, уравнение (14) представим в виде

$$f(\theta, \varepsilon)_1 = \left(1 + \frac{c^2}{6,25\theta} \right)^{0,5} (1 + 0,7\theta)^{-0,5}.$$

Как видно, значения функции $f(\theta, \varepsilon)_1$ незначительно отличаются от единицы. Это позволяет с большой точностью принять следующее равенство:

$$\int f(\theta, \varepsilon)_1 \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_1 = \int \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_1. \quad (16)$$

Таким образом, работа пластических деформаций формоизменения пористых и беспористых материалов определяется одной и той же формулой

$$A_{\phi}^p = \int \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_1. \quad (17)$$

Однако для пористого материала ее значение будет меньше, чем для беспористого, т.к. с увеличением пористости величины $\sigma_1 = \sigma$ уменьшаются.

Из (15) с учетом (16) получим

$$\int \rho \sigma_{жкп} d\bar{\varepsilon}_{жкп} = \int \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_1 + \int \sigma_{II} d\varepsilon_{II}. \quad (18)$$

Для оценки величин работ полной пластической деформации $A^p = \int \rho \sigma_{жкп} d\bar{\varepsilon}_{жкп}$, пластических деформаций формоизменения

$A_{\phi}^p = \int \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_1$ и объема $\Lambda_{жкп}^v = \int \sigma_{II} d\varepsilon_{II}$, необходимо иметь диаграммы $\rho \sigma_{жкп} - \int d\bar{\varepsilon}_{жкп}$ (кр.4), $\sigma_1 - \int d\bar{\varepsilon}_1$ (кр.3) и $\sigma_{II} - \int d\varepsilon_{II}$ (кр.5) (рис.2), так как величины энергий определяются как площади под соответствующими кривыми.

Отметим, что из диаграмм $\sigma - \varepsilon$, (кр.1) и $\sigma_{жкп} - \int d\bar{\varepsilon}_{жкп}$, (кр.2) можно получить $\sigma_1 - \int d\bar{\varepsilon}_1$ (кр.3) и $\rho \sigma_{жкп} - \int d\bar{\varepsilon}_{жкп}$, (кр.4), если точки кривой 1 перемещать налево (кр.3), так как $\sigma_1 = \sigma$ и уменьшается только $\int d\bar{\varepsilon}_1$, и точки кривой 2 - вниз (кр.4). Причем с увеличением плотности материала расхождение этих кривых незначительно. Что касается кривой 5, то она легко строится по данным таблицы.

Определенный интерес представляет построение кривой $\sigma_1 - \int d\bar{\varepsilon}_1$ (кр. 3). С этой целью по формулам [3] на кривой 1 была найдена точка b ($\varepsilon_{жкп} = 0,65$), соответствующая максимальной величине $\int d\bar{\varepsilon}_{жкп}$, равной 0,475 (абсцисса точки a на кривой 2 из

рис. 2). Далее определяется предельная точка c на диаграмме $\sigma_1 - \int d\varepsilon_1$. При этом $(\int d\varepsilon_1)_{\text{max}} = 0.59$ (табл.).

Конкретные числовые данные величин составляющих работ пластических деформаций не были получены по двум причинам: во-первых, из-за низкой точности определения физико-механических характеристик из кривых [3], во-вторых, ввиду некоторого различия начальных пористостей материала образцов, при испытании которых были построены базовые (сплошные) кривые рис. 1 и 2 [3]. Однако эти кривые позволяют качественно оценить величины работ пластических деформаций и проанализировать их. Как уже было отмечено, величинами составляющих работ пластических деформаций являются площади под пунктирными кривыми (рис.2) 4 - (A^p - общая), 3 - ($A_{\text{ф}}^p$ - изменение формы) и 5 - ($A_{\text{об}}^p$ - изменение объема). Из рис. 2 следует, что $A_{\text{об}}^p$ - в 10 раз $< A_{\text{ф}}^p$ и $A^p > A_{\text{ф}}^p$. С другой стороны, полученные формулы показывают, что с уменьшением начальной пористости материала θ_0 , кривая 5 укорачивается и в случае беспористого материала ($\theta_0 = 0$) приравняется к нулю. При этом кривые 1 и 3 поднимаются вверх, приближаясь к кривой 2, и сливаются друг с другом. Что касается кривой 4, то она также поднимается вверх и сливается с кривой 2, которая, являясь единственной диаграммой деформирования вещества пористого материала, лишь удлиняется и становится диаграммой деформирования беспористого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. - М.: Металлургия, 1988 - 153 с.
2. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci., 14(1972). - 215 p.
3. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals // Int. J. Mech. Sci., 18 (1976) - 285 p.
4. Мартынова И.Ф., Штерн М.Б. Уравнение пластичности пористого тела, учитывающее истинные деформации материала основы // Порошковая металлургия. - 1978 - №1 - С. 23-29.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. - 599 с.

ГИУА

05.05.1999