

В.С. САРКИСЯН, В.Ж. АЙРАПЕТЯН

К РЕШЕНИЮ ДВУХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Պատարկվել են ուղղադձափև անիզոտրոպիաով օժտված օղակային սեկտորի տեսք ունեցող և դավալին անիզոտրոպիայով օժտված ուղղանկյուն տեսք ունեցող սալերի առաձգականության տեսուչքան իտրյո խնդիրներ, երբ սալերը դասվում են հավասարակշռության փնճակով՝ եզրերի վրա ազդող ուժերի ազդեցության տակ էփոխների հասար ստացված են դիֆերենցիալ հավասարումներ և անհրաժեշտ պայմաններ, լուծումները կառուցված են ըստ ներմուծված ֆիզիկական փորը պարամետրերի, ըսյց են տրված մի շարք խնդիրների լուծման սոյիներ:

Приводится способ решения плоских задач теории упругости для прямолинейной ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора и цилиндрически ортотропной пластинки в виде прямоугольника, находящихся в равновесии под действием сил, расположенных по краю. Введен малый физический параметр. Функция напряжений рассматриваемых задач построена по степеням этого параметра. Получены необходимые условия и рекуррентные уравнения задач.

Библиогр.: 5 назв.

A plane problem solving method for theory of elasticity is proposed for rectilinear orthotropic plate in the form of a ring sector and cylindric orthotropic plate as a rectangle being in the equilibrium by the actions of forces located at the edge. A small physical parameter is introduced. The stress function of problems to be considered is stated according to degrees of this parameter. Necessary conditions and recurrent equations of problems are obtained.

Ref. 5.

1. Рассмотрим упругую анизотропную плоскую пластинку постоянной толщины в виде кольцевого сектора ($a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$), находящуюся в равновесии под действием сил, расположенных по краю: при этом объемные силы отсутствуют [1]. Предположим, что материал обладает прямолинейной ортотропией, т.е. имеет три плоскости упругой симметрии. Совместим направления осей x и y с главными направлениями анизотропии. Тогда в рассматриваемой задаче обобщенный закон Гука будет

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_y, \quad \epsilon_y = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (1)$$

где E_1, E_2 - модули Юнга для растяжения (сжатия) по главным направлениям x и y ; $G = G_{12}$ - модуль сдвига, характеризующий угол между главными направлениями x и y ; $\nu_1 = \nu_{12}$ - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении (сжатии) в направлении x .

Известно, что составляющие напряжения определяются через функцию Эри $\psi(x, y)$ по формулам



$$\sigma_x = \partial^2 \psi / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \psi / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = \partial^2 \psi / \partial x \partial y. \quad (2)$$

Здесь функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Для определенности далее предположим, что $E_1 > E_2$. Теперь легко заметить, что при этом всегда присутствует малый физический параметр δ [2]:

$$\delta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \quad (0 \leq \delta < 1). \quad (4)$$

Для решения этой задачи целесообразно представить дифференциальное уравнение (3) и соответствующие граничные условия в полярной координатной системе [4]:

$$\Delta[\Phi] + \delta(B_0[\Phi] + B_1[\Phi] \cos 2\varphi + B_2[\Phi] \cos 4\varphi + B_3[\Phi] \sin 2\varphi + B_4[\Phi] \sin 4\varphi) = 0, \quad (5)$$

или в более удобном виде:

$$\Pi[F] \equiv T[F] + \delta(T_0[F] + T_1[F] \cos 2\varphi + T_2[F] \cos 4\varphi + T_3[F] \sin 2\varphi + T_4[F] \sin 4\varphi) = 0. \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Phi(r, \varphi) = \psi(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad r = ae^t, \quad \Phi(r, \varphi) = e^t F(t, \varphi). \quad (7)$$

$$T[F] \equiv \beta \frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \beta \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1, \quad (8)$$

$$T_0[F] \equiv k \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 1 \right), \quad (9)$$

$$T_1[F] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - 6 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 3, \quad (10)$$

$$T_2[F] \equiv k \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} - 8 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 14 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 8 \frac{\partial}{\partial t} - 13 - 6 \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + -20 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2 \partial t} - \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - 14 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (11)$$

$$T_3[F] \equiv -2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial \varphi} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 6 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} + 4 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

$$T_4[F] \equiv 2k \left(-2 \frac{\partial^4}{\partial \varphi \partial t^2} + 12 \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial \varphi} + 2 \frac{\partial^4}{\partial t \partial \varphi^2} - 4 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 14 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi^2} - 4 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (13)$$

а для α , β и k :

$$\alpha = \frac{E_2(E_1 - 2Gv_1)}{G(E_1 + E_2)}, \quad 1 - \alpha = 4k\delta, \quad \beta = \frac{3 + \alpha}{4} \quad (14)$$

Тогда напряжения можно представить через новую функцию $F(t, \varphi)$ в виде

$$\sigma_r = \frac{e^{-\alpha t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right), \quad (15)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{e^{-\alpha t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{e^{-\alpha t}}{a^2} \frac{\partial F}{\partial t \partial \varphi}$$

а перемещения в виде

$$u = \frac{E_1 + E_2}{2aE_1E_2} \left\{ k_1 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + F \right) + \beta F + \beta \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + \right. \\ \left. + \delta \left[-\frac{\cos 4\varphi}{4} \frac{\partial F}{\partial t} - F \cos 2\varphi - (\sin 2\varphi - 2k \sin 4\varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \right. \right. \quad (16)$$

$$\left. \left. - (\cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt \right] \right\},$$

$$v = \frac{E_1 + E_2}{2aE_1E_2} \left\{ \beta \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) d\varphi - \beta \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt + k_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \right.$$

$$\left. - \beta \int \int F dt d\varphi + \delta \left[\int ((\cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) - k \cos 4\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \right. \right.$$

$$\left. - (\sin 2\varphi + 2k \sin 4\varphi) \frac{\partial F}{\partial t \partial \varphi} + (\cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) F + \right.$$

$$\left. + (\sin 2\varphi + 2k \sin 4\varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] dt + (1 - \cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) \times \quad (17)$$

$$\left. \left. \int \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt d\varphi \right] \right\},$$

где

$$k_1 = \frac{1}{4} \frac{E_1(E_1 + 6Gv_1)}{4G(E_1 + E_2)} \quad (18)$$

При помощи (15) и (16)-(18) можно написать соответствующие граничные условия $0 \leq t \leq t_1$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ для конкретных задач [3].

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению дифференциального уравнения (5) или (6) в частных производных с переменными коэффициентами при соответствующих заданных граничных условиях.

В общем случае решение рассматриваемой задачи представляет математически почти непреодолимые трудности.

Способ решения задачи. Решение дифференциального уравнения (6) представим в виде ряда, по степеням малого физического параметра δ :

$$F(t, \varphi) = F_0(t, \varphi) + \delta F_1(t, \varphi) + \delta^2 F_2(t, \varphi) + \dots \quad (19)$$

Тогда для определения неизвестных $F_i(t, \varphi)$ получаются следующие рекуррентные уравнения:

$$T[F_0] = 0. \quad (20)$$

$$T[F_i] = -T_0[F_{i-1}] - T_1[F_{i-1}] \cos 2\varphi - T_2[F_{i-1}] \cos 4\varphi - T_3[F_{i-1}] \sin 2\varphi - T_4[F_{i-1}] \sin 4\varphi \quad (i \geq 1). \quad (21)$$

Принимая во внимание (19), из (15)-(17) имеем

$$\langle \sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, u, v \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \sigma_r^{(i)}, \sigma_\varphi^{(i)}, \tau_{r\varphi}^{(i)}, u^{(i)}, v^{(i)} \rangle \delta^i, \quad (22)$$

где

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{e^{-i}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F_i}{\partial t} + F_i \right), \quad \tau_{r\varphi}^{(i)} = -\frac{e^{-i}}{a^2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \varphi}, \quad (23)$$

$$\sigma_\varphi^{(i)} = \frac{e^{-i}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} + \frac{\partial F_i}{\partial t} \right), \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

$$u^{(i)} = \frac{E_1 + E_2}{2aE_1E_2} \left\{ k_1 \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} + F_i \right) + \beta F_i + \beta \int \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi^2} + F_i \right) dt + \left[-\frac{\cos 4\varphi}{4} \frac{\partial F_{i-1}}{\partial t} - F \cos 2\varphi - (\sin 2\varphi - 2k \sin 4\varphi) \frac{\partial F_{i-1}}{\partial \varphi} - (\cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) \int \left(\frac{\partial^2 F_{i-1}}{\partial \varphi^2} + F_{i-1} \right) dt \right] \right\}, \quad (24)$$

$$v^{(i)} = \frac{E_1 + E_2}{2aE_1E_2} \left\{ \beta \int \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} + \frac{\partial F_i}{\partial t} \right) \partial \varphi - \beta \int \frac{\partial F_i}{\partial \varphi} dt + k_1 \frac{\partial F_i}{\partial \varphi} - \beta \int \int F_i dt d\varphi + \left[(\cos 2\varphi + k \cos 4\varphi) \left(\frac{\partial^2 F_{i-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial t} \right) - k \cos 4\varphi \frac{\partial^2 F_{i-1}}{\partial \varphi} - (\sin 2\varphi + 2k \sin 4\varphi) \frac{\partial^2 F_{i-1}}{\partial t \partial \varphi} \right] \right\}, \quad (25)$$

* Уравнение (20) при $\beta=1$ соответствует дифференциальному уравнению плоской задачи изотропной однородной пластинки, находящейся в равновесии под действием сил

$$+ (\cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) F_{,r-1} + (\sin 2\varphi + 2k \sin 4\varphi) \frac{\partial F_{,r-1}}{\partial \varphi} \Big|_{r=1} + \\ + (\cos 2\varphi - k \cos 4\varphi) \int \int \left(\frac{\partial^2 F_{,r-1}}{\partial \varphi^2} + F_{,r-1} \right) dt d\varphi \Big|_{r=1}, \quad (j=0,1,2,\dots),$$

причем $F_{,r-1} = 0$.

Таким образом решение плоской задачи теории упругости для прямолинейной ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора, находящейся в равновесии под действием сил, сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений (20)-(21) с учетом (22)-(25) при соответствующих простых граничных условиях.

2. Рассмотрим упругую анизотропную плоскую пластинку постоянной толщины в виде прямоугольника с размерами (a,b) , находящуюся в равновесии под действием сил, расположенных по краю. Предположим, что пластинка обладает цилиндрической ортотропией, причем ось анизотропии в нормальна к срединной плоскости пластинки. В каждой точке имеются три плоскости упругой симметрии, перпендикулярные оси анизотропии, все радиальные плоскости, проходящие через ось анизотропии, и тангенциальные плоскости. Примем полюс анизотропии за начало цилиндрической системы координат r, φ, z , направив полярную ось z произвольно в срединной плоскости [1],[2].

Тогда обобщенный закон Гука будет

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\varphi r}}{E_r} \sigma_{\varphi}, \\ \varepsilon_{\varphi} = -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_{\varphi}} \sigma_{\varphi}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G_{r\varphi}} \tau_{r\varphi}, \quad (G_{r\varphi} = G),$$

причем

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right),$$

где функция напряжения определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{1}{E_r} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_r}{E_r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{E_r} \frac{1}{r} \frac{\partial^4 F}{\partial r \partial \varphi^2} - \\ - \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_r}{E_r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{E_r} + \frac{1}{G} - \frac{2\nu_r}{E_r} \right) \times \\ \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2} = 0.$$

Для решения поставленной задачи удобно представить уравнение (28) в прямоугольных декартовых координатах:

$$\epsilon \nabla^2 [\Phi] + \delta H[\Phi] = 0, \quad \left(\delta = \frac{E_r - E_\varphi}{E_r + E_\varphi}, 0 \leq \delta < 1 \right) \quad (29)$$

Выражения для операторов $\nabla^2[\]$ и $H[\]$ известны [5].

Затем представим (29) в виде ряда по степеням малого параметра:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \delta \Phi_1(x, y) + \delta^2 \Phi_2(x, y) + \dots \quad (30)$$

Тогда для определения неизвестных $\Phi_j(x, y)$ получим следующие рекуррентные уравнения:

$$\epsilon \nabla^2 [\Phi_j] = -H[\Phi_{j-1}], \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (\Phi_0 = 0, H[\Phi_0] = 0). \quad (31)$$

Далее, принимая во внимание (30), можно установить, что

$$\langle \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \tau_{xy}^{(j)}, u^{(j)}, v^{(j)} \rangle \delta^j, \quad (32)$$

где

$$\sigma_x^{(j)} = \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{(j)} = -\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial y}, \quad (j \geq 0), \quad (33)$$

$$u^{(j)} = -\frac{v_\varphi}{E_\varphi} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{1}{E_r} \int \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} dx +$$

$$+ \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \int \left[\frac{x y^2 (1 - k_1)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x^2} + \frac{y^2 (y^2 + k_1 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial y^2} + \right. \quad (34)$$

$$\left. + \frac{xy(2y^2 + k_1 x^2 - k_1 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x \partial y} \right] dx + f(y),$$

$$v^{(j)} = -\frac{v_r}{E_r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{1}{E_\varphi} \int \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} dy +$$

$$+ \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \int \left[\frac{y^2 (kx^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2 (1+k)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial y^2} + \right. \quad (35)$$

$$\left. + \frac{xy(2y^2 - kx^2 + ky^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x \partial y} \right] dy + \varphi(x), \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

причем $\delta k_1 = \frac{E_\varphi (E_r - 2\nu_r G - 2G)}{G(E_r + E_\varphi)}$, $\Phi_{-1} = 0$.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости для цилиндрически ортотропной пластинки в виде прямоугольника, находящейся в равновесии под действием сил, также сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений (31) с учетом (32)-(35) при соответствующих граничных условиях.

Необходимо отметить, что, принимая во внимание теоремы вложения С.Л. Соболева, а также некоторые априорные оценки и

результаты [2, 4], доказывается, что существует решение рассматриваемой краевой задачи в виде (19) (или (30) для второй задачи), причем при $\delta < \delta_0$ (δ_0 - некоторая известная постоянная) ряд (19) и ряды производных по γ и φ (или по x и y для второй задачи) до вторых порядков сходятся равномерно в замкнутой Ω области, ряды третьих производных (19) по γ и φ (или по x и y) сходятся в любом пространстве $L_p(\Omega)$ ($p > 1$), а ряды четвертых производных сходятся в $L_2(\Omega)$. При решении конкретных практических задач обычно ограничиваются вторым или третьим приближением решения рассматриваемых краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. - 415 с.
2. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976. - 534 с.
3. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит. - Ереван. Айастан, 1975. - 435 с.
4. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. - 241 с.
5. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж., Овсепян Д.Л. Об одной задаче изгиба цилиндрически анизотропной пластинки в виде прямоугольника // Сб. науч. тр. конф., посвященной 90-летию со дня рождения проф. Т.Т.Хачатряна и проф. О.М.Сапонджяна / ЕрАСИ. - Ереван, 1999. - С. 176-181.

ЕГУ

10.05.1999

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 3, 1999, с. 295-301.

УДК 539.214

МЕХАНИКА

Г.Л. ПЕТРОСЯН

О РАБОТЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Իրական ծակոտիկեն նյութերի պլաստիկության մեխանիկա և սրղևկի փուլացի պրոբլեմատիվաբ հասկարված գլանաձև նմուշների սեղմմանը փորձարկման օվթարները կիրառելիս և նրա քաղաղրիկների որոշման մեթոդիկան: Պլաստիկ դեֆորմացիան հաստատման և ծավալի փոփոխության աշխատանքները, ինչպես նաև որակագին գնահատվել են նրանց մեծությունները:

На основе зависимостей теории пластичности реальных пористых материалов и данных испытания на сжатие спеченных цилиндрических образцов из медного порошка разработана методика определения полной работы пластических деформаций пористых материалов и ее составляющих -