определить те задачи, для которых теория Кирхгофа достаточна, а также задачи, для которых уточнения необходимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачатрян Т.Т. Пологие цилиндрические оболочки // Сообщения Ин-та математики и механики. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1949. - Вып. 4. - 144 с.
2. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
3. Агаловян Л.А., Саакян А.В., Саркисян А.Г. О напряженно-деформированном состоянии анизотропной полосы с переменными упругими характеристиками // Изв. НАН Армении. Механика. - 1998. - Т. 51, № 1. - С. 3-15.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. - 360 с.

Ин-т механики НАН РА

10.05.1999

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. 1.П. № 3, 1999, с. 283-288.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л.А. АГАЛОВЯН

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ БАЛОК И ПЛАСТИН

Ասիմպտոտիկ մեթոդով հաստատված են սեփադարձ կեճան շերտերի և սալերի սեփական ու սուբարդակայան տատանումների հաճախությունները և ամպլիտուդները: Արտածված են բանաձևեր լարումների սեփարի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար: Ստեղծանված են սեփականի առաջացման պայմանները:

Асимптотическим методом установлены частоты и амплитуды собственных и вынужденных колебаний анизотропных балок-полос и пластин. Выведены формулы для вычисления компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены условия возникновения резонанса.

Библиогр.: 6 назв.

Frequencies and amplitudes of natural and forced vibrations in anisotropic beam-layers and plates are established by the asymptotic method. The formulas for calculating the components of the stress tensor and displacement vector are deduced. The conditions of resonance emergence are stated.

Ref. 6.

Для определения частот и форм собственных колебаний анизотропных балок-полос $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, l], |y| \leq h\}$ требуется найти решение системы динамических уравнений теории упругости анизотропного тела

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \sigma_{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \sigma_{xy}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \sigma_{xy},$$

где a_{ik} - коэффициенты упругости; ρ - плотность слоя,

при граничных условиях: $u(\pm h) = 0, v(\pm h) = 0,$ (2)

$$\sigma_{xy}(h) = \sigma_y(h) = 0, \quad u(-h) = v(-h) = 0. \quad (3)$$

представляющих наибольший интерес, в частности, для сейсмостойкого строительства.

Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\sigma_x = \sigma_{11}(x, y) e^{i\omega t}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{12}(x, y) e^{i\omega t}, \quad \sigma_y = \sigma_{22}(x, y) e^{i\omega t}, \quad (4)$$

$$u(x, y, t) = u_1(x, y) e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v_1(x, y) e^{i\omega t}.$$

Подставив (4) в (1) и переходя к безразмерным переменным $\xi = x/h, \zeta = y/h$ и безразмерным перемещениям $U = u_1/h, V = v_1/h$, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему [1], решение которой складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Для данного класса задач пограничный слой не влияет на частоты собственных колебаний [2]. Последние определяются из решения внутренней задачи, уравнения которой после вышеуказанных преобразований принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega^2 U = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega^2 V = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{16} \sigma_{12},$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{26} \sigma_{12},$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{11} + a_{26} \sigma_{22} + a_{66} \sigma_{12}, \quad \omega^2 = \rho \omega^2 h^2. \quad (5)$$

Решение системы (5) имеет асимптотику

$$Q_{ik} = \varepsilon^{\chi_{ik}} Q_{ik,s}, \quad s = \overline{0, N}, \quad (6)$$

где Q_{ik} - любая из искомым величин.

Для напряжений $\chi_{ik} = -1$, а для перемещений $\chi_{ik} = 0$. После подстановки (6) в (5) получаем систему относительно неизвестных коэффициентов разложения $Q_{ik,s}$. Для ортотропной полосы

($a_{10} = a_{26} = 0$) решение этой системы можно выразить через компоненты вектора перемещения $U_{(s)}$, $V_{(s)}$ по формулам

$$\sigma_{12s} = \frac{1}{a_{26}} \left(\frac{\partial U_{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22s} = \frac{1}{A_{11}} \left(\frac{\partial V_{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial U_{(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$\sigma_{11s} = -\frac{1}{A_{22}} \left(\frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial V_{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial U_{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad (7)$$

$$A_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / a_{11}, \quad A_{22} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / a_{22}.$$

Функции же $U_{(s)}$, $V_{(s)}$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66} \omega^2 U_{(s)} = R_{u,s-1}, \quad \frac{\partial^2 V_{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{11} \omega^2 V_{(s)} = R_{v,s-1}, \quad (8)$$

где $R_{u,s-1}$, $R_{v,s-1}$ - известные функции, отличные от нуля, при $s \geq 1$.

Частоты собственных колебаний определяются из уравнений для исходного приближения $s=0$. Решив уравнения (8), по (7) вычисляются напряжения. Удовлетворив условиям (2) или (3), вычисляем частоты и формы собственных колебаний. Первому из уравнений (8) соответствуют сдвиговые, а второму - продольные собственные колебания. Условиям (2) соответствуют частоты

$$\omega_n^{ca} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}} = \frac{\pi n}{2h} v_s, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_n^r = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{E_1}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}} = \frac{\pi n}{2h} v_p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

где v_s - известная скорость распространения сейсмических сдвиговых волн; v_p - скорость распространения продольных волн в пластине.

Условиям (3) соответствуют следующие частоты собственных колебаний:

$$\omega_n^{ca} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) v_s, \quad \omega_n^r = \frac{\pi}{4h} (2n+1) v_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Для полосы с общей в своей плоскости анизотропией ($a_{16} \neq 0$, $a_{26} \neq 0$) решение системы относительно $Q_{(s)}$ при $s=0$ можно выразить через функцию перемещений Φ_0 по формулам

$$U_{(0)} = A_{16} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \zeta^2}, \quad V_{(0)} = \left[A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (A_{11}A_{66} - A_{16}^2) \omega^2 \right] \Phi_0, \quad (11)$$

$$A_{16} = (a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16}) / a_{11}, \quad A_{66} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2) / a_{11}.$$

Функция Φ_0 определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \omega_0^2 (A_{11} + A_{33}) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \zeta^2} + \omega_0^2 (A_{11} A_{33} - A_{13}^2) \Phi_0 = 0 \quad (12)$$

Решив уравнение (12), вычислив компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, а также удовлетворив граничным условиям (2) или (3), получим уравнения частот. Выясняется, что хотя в полосе возникает два типа собственных колебаний, они не являются чисто сдвиговыми и чисто продольными. Например, условиям (3) соответствуют частоты [3]

$$\omega_0^I = \frac{\pi(2n+1)}{4h\beta_1\sqrt{\rho}}, \quad \omega_0^{II} = \frac{\pi(2n+1)}{4h\beta_2\sqrt{\rho}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{11} + A_{33} - \sqrt{(A_{11} - A_{33})^2 + 4A_{13}^2}}, \quad (14)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{11} + A_{33} + \sqrt{(A_{11} - A_{33})^2 + 4A_{13}^2}}.$$

Асимптотика (4), (6) остается в силе также для слоистых полос. В ортотропных двухслойных полосах-балках также возникают сдвиговые и продольные собственные колебания, однако, в отличие от однослойной полосы, нет явной связи между частотами и скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн [4].

В ортотропных пластинах толщиной $2h$ смешанными граничными условиями

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \text{ при } z=h, \quad u=v=w=0 \text{ при } z=-h \quad (15)$$

порождаются две группы собственных сдвиговых колебаний с частотами

$$\omega_0^{xy} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) \sqrt{\frac{G_{11}}{\rho}}, \quad \omega_0^{yz} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) \sqrt{\frac{G_{21}}{\rho}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

и продольные колебания с частотами

$$\omega_0^p = \frac{\pi}{4h} (2n+1) \sqrt{\frac{E_2}{\rho} \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{11}(\nu_{12}\nu_{22} + \nu_{11}) - \nu_{22}(\nu_{21}\nu_{11} + \nu_{21})}}. \quad (17)$$

Рассмотрим вынужденные колебания ортотропной полосы, вызванные сообщаемыми кромке $y=-h$ перемещениями, гармонически меняющимися во времени:

$$u(-h) = u_0(\xi) \exp(i\Omega t), \quad v(-h) = v_0(\xi) \exp(i\Omega t). \quad (18)$$

Решение динамических уравнений (1) для ортотропной полосы будем искать в виде (4) с той лишь разницей, что вместо ω следует положить Ω . Снова получим систему типа (5), где $\omega_0^2 = \rho \Omega^2 h^2$. Решение этой системы будем искать в виде (6). Оно выражается через функции U_{0n} , V_{0n} по формулам (7). Функции U_{0n} , V_{0n} определяются из уравнений (8), где

$$R_{s,s-1} = \frac{A_{26}}{A_{11}} \frac{\partial^2 V_{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{a_{66}}{A_{22}} \frac{\partial^2 U_{(s-1)}}{\partial \xi^2},$$

$$R_{s,s-1} = \frac{1}{a_{66}} \left(A_{26} \frac{\partial^2 U_{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{11} \frac{\partial^2 V_{(s-1)}}{\partial \xi^2} \right), \quad (19)$$

$$A_{26} = (a_{11}A_{11} - a_{12}a_{66})/a_{11}.$$

Решением неоднородной системы (8) является

$$U_{(s)} = U_0^{(s)}(\xi, \zeta) - U_1^{(s)}, \quad V_{(s)} = V_0^{(s)}(\xi, \zeta) + V_1^{(s)}, \quad (20)$$

где $U_0^{(s)}$, $V_0^{(s)}$ - общие решения однородных, а $U_1^{(s)}$, $V_1^{(s)}$ - частные решения неоднородных уравнений (8).

После определения решения (20) по формулам (7) вычисляются компоненты тензора напряжений, затем удовлетворяются условия (18) и граничные условия при $y=h$. Пусть поверхность $y=h$ свободна:

$$\sigma_y(h) = 0, \quad \sigma_y(h) = 0. \quad (21)$$

Решением задачи является

$$U_{(s)} = \frac{1}{\cos 2\omega \cdot \sqrt{a_{66}}} \left[(u_0^{(s)} - U_1^{(s)}(\xi, -1)) \cos \omega \cdot \sqrt{a_{66}} (1 - \zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{a_{66}}}{\omega} f_1^{(s)}(\xi, 1) \sin \omega \cdot \sqrt{a_{66}} (1 + \zeta) \right] + U_1^{(s)}(\xi, \zeta),$$

$$V_{(s)} = \frac{1}{\cos 2\omega \cdot \sqrt{A_{11}}} \left[(v_0^{(s)} - V_1^{(s)}(\xi, -1)) \cos \omega \cdot \sqrt{A_{11}} (1 - \zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{A_{11}}}{\omega} \psi_0^{(s)}(\xi, 1) \sin \omega \cdot \sqrt{A_{11}} (1 + \zeta) \right] + V_1^{(s)}(\xi, \zeta). \quad (22)$$

где

$$f_1^{(s)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{a_{16}} \frac{\partial U_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{66}} \frac{\partial V_{(s-1)}}{\partial \xi},$$

$$\psi_0^{(s)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{A_{11}} \left[\frac{\partial V_0^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial U_{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad (23)$$

$$u_0^{(s)} = u_0^{(s)}(\xi), \quad v_0^{(s)} = v_0^{(s)}(\xi), \quad u_0^{(0)} = v_0^{(0)} = 0, \quad s > 0.$$

Входящие в решение (22) частные решения $U_1^{(s)}$, $V_1^{(s)}$ уравнений (8) несложно найти, поскольку в правые части этих уравнений будут входить линейные комбинации тригонометрических функций.

Решение (6), (22) будет конечным, если $\cos 2\omega \cdot \sqrt{A_{11}} \neq 0$, $\cos 2\omega \cdot \sqrt{A_{11}} \neq 0$, т.е.

$$\Omega \neq \frac{\pi}{4h} (2n+1) \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) v_{12} \quad (24)$$

$$\Omega \neq \frac{\pi}{4h} (2n+1) \frac{1}{\sqrt{\rho A_{11}}} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) \sqrt{\frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) v_{r1}$$

Правые части соотношений (24), согласно (10), совпадают со значениями частот собственных колебаний полосы. Следовательно, при совпадении частоты Ω вынуждающего воздействия с частотами собственных колебаний произойдет резонанс. Диапазон изменения частот сейсмических воздействий при сильных землетрясениях известен [5], поэтому необходимо таким образом подобрать параметры полосы (основания, фундамента), чтобы избежать резонанса. Отправным пунктом для этого могут служить формулы (10), (24) для частот.

В заключение отметим, что асимптотическим методом, изложенным выше и в [6], могут быть рассмотрены собственные и вынужденные колебания и при иных граничных условиях, а также пространственные колебания анизотропных пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы // Сб. тр. юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. - Гюмри: Высшая школа, 1994. - С. 23-25.
2. Агаловян М.Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем: Сб. конф. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. - С. 132-135.
3. Агаловян М.Л. О собственных значениях и собственных функциях одного дифференциального оператора // Ученые записки ЕГУ - 1997. - № 2(187). - С. 8-14.
4. Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы // Сб. тр. XVIII межд. конф. по теории оболочек и пластин. - Саратов - 1997. - Т.1. - С.30-38.
5. Касахара К. Механика землетрясений. - М.: Мир, 1985. - 264 с.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. - М.: Наука. Физматлит, 1997. - 414 с.

Ин-т механики НАН РА

14.05.1999