Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 3, 1999, с. 278-283

УДК 539.1 **МЕХАНИКА**

С.А. АМБАРЦУМЯН, М.В. БЕЛУБЕКЯН

# ТОНКАЯ ПЛАСТИНКА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Սալերի լուծման համար առաջարկվում է օգտագործել Կիրխհոֆի վարկածի ճշգրտված տարբերակը, որը միջանկյալ է Կիրխհոֆի և լայնական սահքեր հաշվի առնող տեսությունների նկատմամբ: Հաստատվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում հիմնական են հանդիսանում կա՛մ ընդհանրացված հարթ լարվածային, կա՛մ ծռման վիճակները

Предлагается уточненный вариант гипотезы Кирхгофа, который является промежуточным между теорией пластин Кирхгофа и теориями, учитывающими поперечные сдвиги. Устанавливаются условия, при которых основными являются либо обобщенное плоское напряженное, либо изгибное состояния.

Библиогр.: 4 назв.

A refined version of Kirchhoff's hypothesis is suggested. It is an intermediate model between Kirchhoff's theory and theories accounting transverse shears. The conditions under which the generalized plane stress or bending states are basic are established.

Ref. 4.

Впервые задача определения напряженно-деформированного состояния пологой цилиндрической панели при наличии касательной нагрузки на основе гипотезы Кирхгофа-Лява была исследована в [1]. Отсюда, в частности, получено решение соответствующей задачи для тонкой пластинки. В [2] обсуждены основные проблемы, возникающие в случае наличия касательных нагрузок.

Известно, что действие поверхностных касательных нагрузок, в общем случае, приводит к появлению как планарных, так и изгибных деформаций. При использовании метода гипотез, основанных на понятии тонкостенности, задачи обобщенного плоского напряженного деформированного состояния (планарная задача) и изгиба разделяются. В случаях, когда прямоугольная пластинка не имеет свободного края (края закреплены или свободно оперты), основная доля касательной нагрузки идет на появление планарных усилий. При наличии какого-нибудь свободного края возможно, что основными будут изгибающие усилия и моменты [3].

В настоящей работе предлагается уточненный вариант гипотезы Кирхгофа. По существу, указанный вариант является промежуточным между классической теорией и теориями, учитывающими поперечные сдвиги [4]. Этот вариант является также некоторым частным случаем теории С. Амбарцумяна.

Показано, что влияние уточнения гипотезы Кирхгофа имеет порядок квадрата относительной толщины в случаях, когда основными являются либо планарные, либо изгибные усилия. Для соответствующих задач изгиба и плоского напряженного состояния указанное уточнение оказывается существенным. Например, если края пластинки жестко закреплены, то планарные перемещения определятся с точностью квадрата относительной толщины. Однако при этом пластинка также изгибается, что невозможно по гипотезе Кирхгофа.

Пусть пластинка в прямоугольной декартовой координатной системе $(x,y,z)$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. На лицевой поверхности пластинки $z=h$ приложена касательная нагрузка $\tau(x,y)$ по направлению координаты $0x$. Граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{33}=0,\ \sigma_{31}=\tau(x,y),\ \sigma_{32}=0 \text{ при } z=h, \\ &\sigma_{33}=0,\ \sigma_{31}=0, \qquad \sigma_{32}=0 \text{ при } z=-h. \end{aligned} \tag{1}$$

Относительно пластинки принимаются все допущения гипотезы Кирхгофа, кроме $\varepsilon_{31}=0$. Взамен этого допущения принимается

$$\sigma_{31}=\frac{1}{4G}\left(1+\frac{z}{h}\right)\tau, \tag{2}$$

где $G$ - модуль сдвига.

Обоснованием такого уточнения гипотезы Кирхгофа можно считать:

- во-первых, касательное напряжение $\sigma_{31}$, непосредственно определенное из (2), удовлетворяет граничному условию из (1).

- во-вторых, при неограниченных размерах пластинки по $x$ и $y$ допущение (2) соответствует точному решению.

Предлагаемый вариант уточнения гипотезы Кирхгофа можно получить также как частный случай уточненной теории С. Амбарцумяна [4], если приравнять нулю введенные там дополнительные функции, учитывающие поперечные сдвиги.

Вывод основных соотношений и уравнений с учетом (2) аналогичен соответствующему выводу классической теории пластин. При этом для перемещений получаются следующие выражения:

$$u_1=u-z\frac{\partial w}{\partial x}+\underline{\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{2h}\right)\frac{\tau}{G}},\quad u_2=v-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_3=w(x,y) \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем подчеркнутые слагаемые получены в результате уточнения (2).

Уравнения равновесия в усилиях и моментах, так же, как и в классической теории пластин, имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+\tau=0,\quad \frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}+h\tau=N_1,\quad \frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}=N_2. \tag{5}$$

где

$$T_1 = C\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{h}{12G}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right),\quad T_2 = C\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu h}{12G}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right),$$

$$S = \frac{1-\nu}{2}C\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h}{12G}\frac{\partial \tau}{\partial y}\right),\quad C = \frac{2Eh}{1-\nu^2}. \tag{6}$$

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y^2} - \frac{1}{2G}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right),$$

$$M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x^2} - \frac{1}{2G}\frac{\partial \tau}{dx}\right), \tag{7}$$

$$H = -(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tau}{4G}\right),\quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}.$$

Выражения для перерезывающих усилий определяются из (5) в виде

$$N_1 = -D\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta w - \frac{1}{2G}\Delta_1\tau\right) + h\tau,$$

$$N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w,\quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{8}$$

Подстановка (6) в (4) приводит к уравнениям в перемещениях, определяющим обобщенное плоское напряженно-деформированное состояние пластинки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\tau}{C} + \frac{h}{12G}\Delta_1\tau = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)h}{24G}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = 0. \tag{9}$$

Уравнение, определяющее прогиб пластинки, получается в виде

$$D\Delta^2 w = h\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{2h^3}{3(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\Delta_1\tau. \tag{10}$$

Граничные условия, получаемые путем обычного осреднения, для края пластинки x=const записываются следующим образом:

заделка -

$$u = -\frac{h\tau}{6G},\quad v = 0,\quad w = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau}{2G}; \tag{11}$$

свободное опирание -

$$T_1 = 0,\quad v = 0,\quad w = 0,\quad M_1 = 0; \tag{12}$$

скользящий контакт -

$$u=-\frac{h\tau}{6G},\ S=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\tau}{2G},\ N_1=0. \tag{13}$$

Соответствующие условия при $y=\mathrm{const}$ имеют вид

$$v=0,\ u=-\frac{h\tau}{6G},\ w=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0, \tag{14}$$

$$T_2=0,\ u=-\frac{h\tau}{6G},\ w=0,\ M_2=0, \tag{15}$$

$$v=0,\ S=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\ N_2=0. \tag{16}$$

Граничные условия для свободного края принимаются такими же, как и в классической теории пластин. Например, при x=const имеем

$$T_1=0,\ S=0,\ M_1=0,\ \overline{N}_1=0\ \left(\overline{N}_1=N_1+\frac{\partial H}{\partial y}\right). \tag{17}$$

Нетрудно проверить, что для всех вариантов граничных условий задачи определения обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба пластинки отделяются. В качестве примера рассматривается напряженно-деформированное состояние пластинки-полосы (не зависящее от координаты $y$) в случае

$$\tau=\tau_0=\mathrm{const}. \tag{18}$$

Пусть края пластинки заделаны. Тогда планарное перемещение и прогиб определяются следующим образом:

$$u=\frac{\tau_0 a^2}{2C}\left[\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{4}{3(1-\nu)}\frac{h^2}{a^2}\right], \tag{19}$$

$$w=\frac{\tau_0}{2G}x\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{2x}{a}\right). \tag{20}$$

В этой задаче касательная нагрузка приводит в основном к планарному перемещению. Уточнение гипотезы Кирхгофа относительно перемещения имеет порядок $h^2/a^2$. Необходимо отметить, что по гипотезе Кирхгофа $w=0$.

В случае, когда край пластинки-полосы $x=0$ заделан, а край $x=a$ свободен, касательная нагрузка в основном ведет к изгибу. Решение этой задачи имеет вид

$$u=\frac{\tau_0 a^2}{C}\left[\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{2a}\right)-\frac{2}{3(1-\nu)}\frac{h^2}{a^2}\right],$$

$$w=-\frac{\tau_0 h a^2}{2D}x\left[\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{3a}\right)-\frac{4}{3(1-\nu)}\frac{h^2}{a^2}\right]. \tag{21}$$

Рассмотрим задачу, когда касательная нагрузка задана в виде

$$\tau=\tau_0 g(y) \tag{22}$$

и пластинка свободно оперта по всем четырем сторонам. Нетрудно проверить, что в этом случае пластинка не прогибается ($w \equiv 0$).

Граничные условия для плоского напряженного состояния, согласно (12) и (15), имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ v = 0 \ \text{при} \ x = 0, a, \\
&\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \ u = -\frac{h\tau}{6G} \ \text{при} \ y = 0, b.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Решение системы уравнений (9) представляется в виде рядов Фурье

$$
u = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin \lambda_n y, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi / b. \tag{24}
$$

Заданная касательная нагрузка также представляется рядом Фурье

$$
g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \lambda_n y. \tag{25}
$$

Приведенная здесь задача имеет следующее простое решение:

$$
u = \ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^2} \left( 1 - \frac{\lambda_n^2 h^2}{6} \right) \sin \lambda_n y, \quad v \equiv 0, \quad \ell = \frac{(1+\nu)\tau_0 b^2}{\pi^2 E h} \tag{26}
$$

Более сложной будет задача, для которой, в отличие от (23), края $x = 0$ и $x = a$ заделаны. В этом случае касательная нагрузка приводит также к изгибу пластинки. Решение задачи плоского напряженного состояния имеет вид

$$
\begin{aligned}
u &= -\ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^2} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \operatorname{ch} \lambda_n x + \frac{x}{a} \operatorname{ch} \lambda_n (a - x) \right] A_n + B_n \right\} \sin \lambda_n y, \\
v &= -\ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^2} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \operatorname{sh} \lambda_n x - \frac{x}{a} \operatorname{sh} \lambda_n (a - x) \right] A_n \cos \lambda_n y,
\end{aligned} \tag{27}
$$

где $A_n = 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu}{3} \right) \lambda_n^2 h^2$, $B_n = 1 - \frac{\lambda_n^2 h^2}{6}$.

Прогиб пластинки определяется по формуле

$$
w = \frac{\tau_0 b}{2\pi G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n(\alpha_n - \operatorname{sh} \alpha_n)} \left[ (\alpha_n - \zeta_n) \operatorname{sh} \zeta_n - \zeta_n \operatorname{sh} (\alpha_n - \zeta_n) \right] \sin \lambda_n y, \tag{28}
$$

где $\alpha_n = \lambda_n a$, $\zeta_n = \lambda_n x$.

Таким образом, при действии касательной нагрузки вида (22) в случае, когда края пластины $x = 0, a$ заделаны, а края $y = 0, b$ свободно оперты, уточнение гипотезы Кирхгофа приводит к появлению планарных перемещений на величину порядка $\lambda_n^2 h^2$ и поперечного перемещения $w$. По гипотезе Кирхгофа для приведенной задачи $w = 0$. Следует также отметить, что предложенный вариант уточнения гипотезы Кирхгофа позволяет определить те задачи, для которых теория Кирхгофа достаточна, а также задачи, для которых уточнения необходимы.


## ЛИТЕРАТУРА

1. **Хачатрян Т.Т.** Пологие цилиндрические оболочки // Сообщения Ин-та математики и механики. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1949. - Вып. 4. - 144 с.
2. **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
3. **Агаловян Л.А., Саакян А.В., Саркисян А.Г.** О напряженно-деформированном состоянии анизотропной полосы с переменными упругими характеристиками // Изв. НАН Армении. Механика. - 1998. - Т. 51, № 1. - С. 3-15.
4. **Амбарцумян С.А.** Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1987. - 360 с.



Ин-т механики НАН РА



10.05.1999



Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 3, 1999, с. 283-288.

УДК 539.3


**МЕХАНИКА**


Л.А. АГАЛОВЯН


# АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ БАЛОК И ПЛАСТИН


Ասիմպտոտիկ մեթոդով հաստատված են անիզոտրոպ հեծան-շերտերի և սալերի սեփական ու ստիպողական տատանումների հաճախությունները և ամպլիտուդները: Ստացված են բանաձևեր լարումների տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար: Սահմանված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

Асимптотическим методом установлены частоты и амплитуды собственных и вынужденных колебаний анизотропных балок-полос и пластин. Выведены формулы для вычисления компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены условия возникновения резонанса.

Библиогр.: 6 назв.

Frequencies and amplitudes of natural and forced vibrations in anisotropic beam-layers and plates are established by the asymptotic method. The formulas for calculating the components of the stress tensor and displacement vector are deduced. The conditions of resonance emergence are stated.

Ref. 6.


Для определения частот и форм собственных колебаний анизотропных балок-полос $\Omega=\{(x,y): x\in[0,\ell],\ |y|\le h\}$ требуется найти решение системы динамических уравнений теории упругости анизотропного тела