

А.М. САРГСЯН

### О ПОВЕДЕНИИ СВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА

Լինեարական էլեկտրաէլաստիկության գծային տեսության առիթմերում ինտեգրալով Է. Վայցբախի սահման պայմաններում գտնվող կոորդատ կոորդատային սահմաններում սահմանային պայմաններով բացահայտված լուծումները դիտարկում ենք: Բացահայտվում են էլեկտրաէլաստիկության կոորդատային պայմաններում կոորդատային սահմանային պայմաններով լուծումները:

В рамках линейной теории электроупругости исследовано напряженное состояние находящегося в условиях продольного сдвига кусочно-однородного клина при различных граничных условиях. Получены решения для асимптотического поведения характеристик связанных полей в окрестности края поверхности контакта составного клина.

Ил. 2. Библиогр.: 13 назв.

On the limits of linear theory of electroelasticity a stressed state of a piece-homogeneous wedge, which is in the condition of a longitudinal shear with various boundary conditions is considered. The solutions for asymptotic behavior of connected field characteristics in the vicinity of the contact surface edge in a composite wedge are obtained.

Ил. 2. Ref. 13.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию особенностей электромеханических полей в однородных пьезоэлектрических средах, имеющих трещины или угловые точки [1-3]

В предлагаемой работе исследуется влияние связности электрических и механических полей на поведение упругих напряжений и напряженности электрического поля в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного призматического тела, находящегося в условиях продольного сдвига. Составное призматическое тело с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина (рис.1) изготовлено из пьезоматериалов класса 4 мм, 6 мм и т.д. с различными электроупругими свойствами [4]. Главная ось

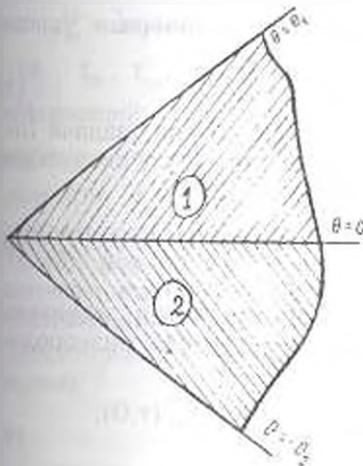


Рис. 1

симметрии пьезоматериала (ось  $z$ ) перпендикулярна поперечному сечению составного тела и проходит через вершину клина. Так как в состоянии продольного сдвига на каждой грани составного призматического тела задается только по одному механическому и электрическому граничному условию, то возможно всего десять различных электромеханических граничных условий, которые вместе с системой уравнений

$$\Delta u_j = 0, \Delta \Phi_j = 0 \quad (j=1,2), \quad (1)$$

описывающей электроупругое равновесие [4], составляют десять граничных задач электроупругости для такого тела. В (1)  $u_j(r, \theta)$  - упругое перемещение в направлении оси  $z$ ;  $\Phi_j(r, \theta)$  - потенциал электростатического поля;  $\Delta$  - двумерный оператор Лапласа в полярных координатах.

Отнесем к первой группе три крайние задачи, в которых электрические граничные условия заданы в виде потенциала

$$\Phi_1(r, \theta_1) = \psi_1(r), \quad \Phi_2(r, -\theta_2) = \psi_2(r), \quad (2)$$

а механические граничные условия следующие:

1) на гранях призматического тела заданы упругие перемещения:

$$u_1(r, \theta_1) = f_1(r), \quad u_2(r, -\theta_2) = f_2(r); \quad (3)$$

2) на гранях призматического тела заданы упругие напряжения

$$\tau_{\theta r}^{(1)}(r, \theta_1) = \varphi_1(r), \quad \tau_{\theta r}^{(2)}(r, -\theta_2) = \varphi_2(r); \quad (4)$$

3) на одной грани задано упругое перемещение, а на другой - упругое напряжение:

$$u_1(r, \theta_1) = f_1(r), \quad \tau_{\theta r}^{(2)}(r, -\theta_2) = \varphi(r). \quad (5)$$

Обозначим эти задачи через I-1, I-2, I-3 соответственно.

Ко второй группе отнесем те три задачи, в которых электрические граничные условия заданы в виде индукции:

$$D_n^{(1)}(r, \theta_1) = 0, \quad D_n^{(2)}(r, -\theta_2) = 0, \quad (6)$$

а механические условия те же, что и в первой группе (задачи II-1, II-2, II-3)

В третьей группе задач электрические граничные условия следующие:

$$\Phi_1(r, \theta_1) = \varphi_1(r), \quad D_n^{(2)}(r, -\theta_2) = 0, \quad (7)$$

а механические условия те же, что и в первой группе (задачи III-1, III-2, III-3). К этой группе отнесем еще одну задачу со следующими электромеханическими условиями (задача III-4):

$$u_1(r, \theta_1) = f_1(r), \quad D_n^{(1)}(r, \theta_1) = 0, \quad \tau_{\theta r}^{(2)}(r, -\theta_2) = \varphi_2(r), \quad (8)$$

$$\Phi_2(r, -\theta_2) = \psi_2(r).$$

Во всех перечисленных задачах принимается идеальный электромеханический контакт на поверхности раздела разнородных сред  $\theta = 0$ :

$$u_1(r, 0) = u_2(r, 0), \quad \Phi_1(r, 0) = \Phi_2(r, 0), \quad \tau_{\theta r}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta r}^{(2)}(r, 0), \quad (9)$$

$$D_n^{(1)}(r, 0) = D_n^{(2)}(r, 0).$$

Необходимость изучения эффектов взаимодействия механических и электрических полей продиктована тем, что в современной технике широко применяются функциональные элементы, изготовленные из высокоэффективных пьезоматериалов [5]. Однако методы расчета таких элементов в одномерной постановке весьма приближенны, а предложенный в [6] численно-аналитический метод расчета в двумерной постановке, применительно к пьезоэлектрическим трансформаторам, не может обеспечить необходимую точность из-за невыделенности асимптотических поведений решений вблизи края поверхности контакта секции возбуждения и генераторной секции.

Краевые задачи первой группы решены методом интегрального преобразования Мелина в [7-8]. В [9] получено асимптотическое решение задачи III-4. Показано, что связанность механических и электрических полей оказывает сильное влияние на поведение упругих напряжений и напряженности электрического поля в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела.

В данной работе с помощью местного решения исследованы задачи второй и третьей групп. Получены решения для асимптотического поведения упругих напряжений и напряженности электрического поля в окрестности угловой точки составного клина и сопоставлены некоторые результаты с уже известными.

Методом разделения переменных для решения уравнений (1) получим

$$u(r, \theta) = r^\lambda (A_1 \cos \lambda \theta + B_1 \sin \lambda \theta), \quad (10)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = r^\lambda (K_1 \cos \lambda \theta + D_1 \sin \lambda \theta).$$

где  $\lambda$  - произвольный параметр,  $A_1, B_1, K_1, D_1$  - неизвестные постоянные.

Используя уравнения состояния

$$\tau_{ij}^{(j)} = c_{ij}^{(j)} \gamma_{ij}^{(j)} - e_{ij}^{(j)} E_i^{(j)}, \quad \tau_{ii}^{(j)} = c_{ii}^{(j)} \gamma_{ii}^{(j)} - e_{ii}^{(j)} E_i^{(j)} \quad (j=1,2),$$

$$D_i^{(j)} = e_{ij}^{(j)} \gamma_{ij}^{(j)} + \epsilon_j E_i^{(j)}, \quad D_r^{(j)} = e_{rj}^{(j)} \gamma_{rj}^{(j)} + \epsilon_j E_r^{(j)}, \quad (11)$$

$$\gamma_{r\theta}^{(j)} = \partial u_1 / \partial \theta, \quad \gamma_{rr}^{(j)} = \partial u_1 / \partial r, \quad E_\theta^{(j)} = -\partial \Phi_1 / r \partial \theta, \quad E_r^{(j)} = -\partial \Phi_1 / \partial r$$

(где  $\tau_{ij}, \tau_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{ii}$  - компоненты упругих напряжений и деформаций;  $D_\theta, D_r, E_\theta, E_r$  - компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля;  $c_{ij}$  - модуль упругости,  $e_{ij}$  - пьезомодуль;  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость) и удовлетворяя гранично-контактным условиям (3)-(6), (9) и (3)-(5), (7), (9), для определения неизвестных постоянных в каждой задаче получаем систему линейных уравнений. Из условия существования нетривиальных решений этих систем вытекают следующие уравнения относительно  $\lambda$  (индекс при  $\Delta$  означает группу и номер данной задачи):

$$\Delta_{I,1} = (S_1 - y_1 S_1)(S_1 - y_2 S_1) = 0, \quad (12)$$

$$\Delta_{II,2} = (S_1 - y_1 S_1)(S_1 + y_2 S_1) = 0, \quad (13)$$

$$\Delta_{III,3} = (C_1 - y_1 C_1)(C_1 - y_2 C_1) = 0, \quad (14)$$

где  $S_{\pm} = \sin \lambda(\theta_{\pm} \pm \theta)$ ,  $C_{\pm} = \cos \lambda(\theta_{\pm} \pm \theta)$ ,  $a_{\pm} = a \pm 1$ ,  $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm 1$ ,  
 $e_{\pm} = e \pm 1$ ,  $a_{\pm} = e_{\pm}^{(1)} e_{\pm}^{(2)} / a_{\pm} \varepsilon_{\pm}$ ,  $a = e_{\pm}^{(1)} / e_{\pm}^{(2)}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{\pm} / \varepsilon_{\pm}$ ,  $e = e_{\pm}^{(1)} / e_{\pm}^{(2)}$ ,  
 $y_1$  и  $y_2$  - корни квадратного уравнения

$$(a \varepsilon_{\pm} + a_0 e_{\pm}^2) y^2 + (a_1 \varepsilon_{\pm} + a_0 \varepsilon_{\pm} - 2a_0 e_{\pm} e_{\pm}) y + (a_1 \varepsilon_{\pm} + a_0 e_{\pm}^2) = 0; \quad (15)$$

$$\Delta_{I_1} = (a_1 S_{\pm} - a_0 S_{\pm}) (\delta_1 S_{\pm} - \delta_0 S_{\pm}) + \beta_{12} (C_{\pm} - C_{\pm})^2 = 0,$$

$$\Delta_{II_1} = (\varepsilon_1 S_{\pm} - \varepsilon_0 S_{\pm}) (\bar{\delta}_1 S_{\pm} - \bar{\delta}_0 S_{\pm}) + \beta_{11} (C_{\pm} - C_{\pm})^2 = 0, \quad (16)$$

где  $\delta = a(1 + a_0) / (a \varepsilon + a_0 e^2)$ ,  $\bar{\delta} = \varepsilon(1 + a_0) / (a e + a_0 e^2)$ ,  $\delta_{\pm} = \delta \pm 1$ ,

$$\beta_{11} = a_0(e - a)^2 / (1 + a_0), \quad \beta_{12} = a_0(e - \varepsilon)^2 / (1 + a_0), \quad \bar{\delta}_{\pm} = \bar{\delta} \pm 1;$$

$$\Delta_{I_2} = (\zeta_1 S_{\pm} + \zeta_2 S_{\pm}) (C_{\pm} + C_{\pm}) + \beta_{13} (v_1 S_{\pm} + v_2 S_{\pm}) (C_{\pm} - C_{\pm}) = 0, \quad (17)$$

$$\Delta_{III_1} = (\bar{\zeta}_1 S_{\pm} + \bar{\zeta}_2 S_{\pm}) (C_{\pm} + C_{\pm}) + \beta_{14} (\bar{v}_1 S_{\pm} + \bar{v}_2 S_{\pm}) (C_{\pm} - C_{\pm}) = 0, \quad (18)$$

где  $\zeta = 1/\delta$ ,  $v = a_0 a \varepsilon + a_0 e^2 / (a^2 + a_0 e(2a - e))$ ,  $\beta_{13} = a \zeta / v$ ,

$$\bar{\zeta} = 1/\bar{\delta}, \quad \bar{v} = \varepsilon(a \varepsilon + a_0 e^2) / (\varepsilon^2 + a_0 e(2\varepsilon - e)), \quad \beta_{14} = a \bar{\zeta} / \bar{v}.$$

$$\Delta_{III_2} = (a_1 S_{\pm} - a_0 S_{\pm}) (\bar{\mu}_1 C_{\pm} - \bar{\mu}_2 C_{\pm}) + \beta_{15} (e_1 S_{\pm} + e_2 S_{\pm}) (C_{\pm} - C_{\pm}) = 0, \quad (19)$$

$$\Delta_{IV_1} = (\varepsilon_1 S_{\pm} - \varepsilon_2 S_{\pm}) (\mu_1 C_{\pm} - \mu_2 C_{\pm}) + \beta_{16} (e_1 S_{\pm} - e_2 S_{\pm}) (C_{\pm} - C_{\pm}) = 0, \quad (20)$$

где  $\mu = (a + a_0 e) / (1 + a_0)$ ,  $\bar{\mu} = (\varepsilon + a_0 e) / (1 + a_0)$ ,  $\beta_{15} = a_0(e - \varepsilon) / (1 + a_0)$ ,

$$\beta_{16} = a_0(e - a) / (1 + a_0), \quad \mu_{\pm} = \mu \pm 1, \quad \bar{\mu}_{\pm} = \bar{\mu} \pm 1.$$

Для сравнения здесь приведены также соответствующие уравнения задач первой группы [7-8]. При конкретных значениях параметров  $\theta$ ,  $a$ ,  $\varepsilon$ ,  $e$  и  $a_0$  уравнения (12)-(20) имеют бесконечное множество физически допустимых корней  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания действительных частей ( $0 < \text{Re} \lambda_1 < \text{Re} \lambda_2 < \dots$ ) [10].

Упругое перемещение и потенциал электростатического поля в окрестности края поверхности контакта представляются в виде суммы

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} (A_{nn} \cos \lambda_n \theta + B_{nn} \sin \lambda_n \theta), \quad (21)$$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} (K_{nn} \cos \lambda_n \theta + D_{nn} \sin \lambda_n \theta).$$

(где суммирование распространяется на все положительные корни уравнений (12) - (20)).

На основании (11) и (21) заключаем, что в окрестности края поверхности контакта характеристики электроупругого поля (упругие напряжения и компоненты вектора электрической индукции) обрываются в нуль при  $\text{Re} \lambda_n > 1$  (малонапряженное состояние) и в бесконечность при  $\text{Re} \lambda_n < 1$  (концентрационное состояние). В случае  $\text{Re} \lambda_n = 1$  характеристики электроупругого поля в окрестности угловой точки конечны и вообще отличны от нуля (предельное состояние). Следовательно, исследование поведения электромеханического поля у края поверхности контакта хрупкого

однородного тела приводится к отысканию корней с наименьшей действительной частью уравнений (12)-(20) в зависимости от параметров  $\theta_1$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $e$  и  $a_0$ .

Прежде всего отметим, что при отсутствии пьезоэффекта ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) рассмотренные выше связанные задачи электроупругости распадутся на две независимые задачи: упругую и электростатическую; при этом каждое уравнение из (12)-(20) принимает вид  $\Delta_{y_n} \Delta_z = 0$ , где  $\Delta_{y_n} = 0$  определяет поведение упругих напряжений в соответствующей механической задаче, а  $\Delta_z = 0$  - поведение компонентов вектора электрической индукции в электростатической задаче [10, 11].

Полагая в уравнениях (12)-(20)  $\alpha = \varepsilon = e = 1$  (случай однородного тела), легко показать, что во всех задачах действительная часть первого корня  $\lambda_1$  не зависит от материальных констант пьезоэлектрической среды и совпадает с таковой для случая изотропного линейно-упругого тела. Между тем, в [12] при рассмотрении этого же вопроса для задачи III-4 был получен неверный результат, приведший к противоположному заключению. Правильный результат для этого частного случая был получен вкратце в [3]. Из (12)-(20) следует также, что уравнение (13) получается из (12) заменой  $y_1$  на  $-y_1$ , а уравнения (16), (18) и (20) - из (15), (17) и (19) соответственно заменой  $\alpha$  на  $\varepsilon$ .

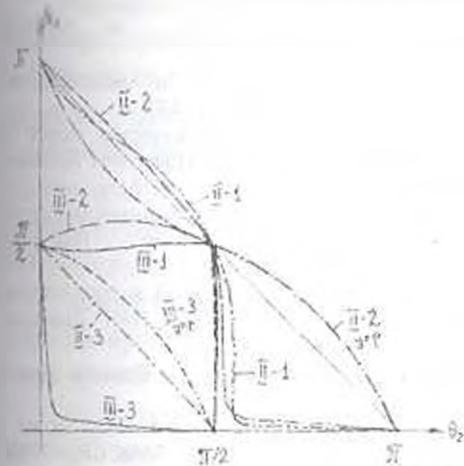


Рис. 2

С целью выявления основных закономерностей возникновения малонапряженного состояния или сильной концентрации характеристик электроупругого поля в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного призматического тела, изготовленного из пьезоматериалов ЦТС-4 и CdS [13], на ЭВМ определены первые корни уравнений (13), (14), (16), (18)-(20) в зависимости от углов растворов однородных клиньев  $\theta_1$  и

$\theta_2$ . Из условия  $\text{Re} \lambda_1 = 1$  на плоскости  $\theta_1, \theta_2$  построены предельные кривые (рис. 2), разделяющие области малонапряженности ( $\text{Re} \lambda_1 > 1$ ) и концентрационного состояния ( $\text{Re} \lambda_1 < 1$ ). Точки области малонапряженности и начало координат лежат на одной стороне соответствующей предельной кривой [10]. Для сравнения приведены также предельные кривые электроупругих напряжений для уравнений (13) и (14) в случае отсутствия пьезоэффекта (кривые II-2упр и III-3упр) (рис. 2). Из приведенных кривых следует, что связанность

электрических и механических полей оказывает существенное влияние на размеры области малонапряженности и сильной концентрации и дает возможность регулирования поведения характеристик электроупругого поля в окрестности края поверхности контакта составного тела в нужном направлении.

Таким образом, получены решения для асимптотического поведения характеристик связанных полей в окрестности угловой точки (21), которые могут быть использованы при построении более точных аналитических и численных решений. Область возможных применений результатов данной работы и предшествующих исследований достаточно обширна [4-7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Половинкина И.Б., Улитко А.Ф. К теории равновесия пьезоэлектрических тел с трещинами // Тепловые напряжения в элементах конструкции. - Киев: Наукова думка, 1978. - Вып. 18. - С. 10-17.
2. Shindo Y., Ozawa E. and Novacki J.P. Singular stress and electric fields of a cracked piezoelectric slip // Intern. J. Appl. Electromagnetics in Materials. - 1990. - Vol. 1. - No. 1. - P. 77-87.
3. Белубекян М.В., Галлчян П.В. Определение особенности связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла при продольном сдвиге // Механика твердого тела. - 1994. - № 3. - С. 102-108.
4. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988. - 472 с.
5. Лавриненко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. - М.: Энергия, 1975. - 112 с.
6. Кулиев Ю.Н. и др. Основы колебаний однослойных и многослойных пьезокерамических трансформаторов. - Баку: ЭЛМ, 1982. - 472 с.
7. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Влияние связанности физических полей на поведение их характеристик в кусочно-однородном теле // Изв. НАН Армении. Сер. ТН. - 1995. - Т. 48. - № 3. - С. 15-23.
8. Саргсян А.М. О влиянии связанности электрических и механических полей на поведение их характеристик в кусочно-однородном теле // Изв. НАН Армении. Механика. - 1997. - № 3-4. - С. 80-85.
9. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об особенностях напряжений в двух задачах электроупругости для кусочно-однородного тела // Изв. НАН Армении. Механика. - 1999. - № 1. - С. 40-45.
10. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. - 338 с.
11. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности контакта кусочно-однородного тела // Докл. АН АрмССР. - 1988. - № 4. - С. 161-165.
12. Белубекян М.В., Галлчян П.В. Об особенностях электроупругого поля в окрестности угловой точки при антиплоской задаче // Инженерно-физические проблемы новой техники: Теа. докл. - М., 1992. - С. 60-61.
13. Акустические кристаллы / Под ред. М.П. Шаскольской. - М.: Наука, 1982. - 632 с.