

в смену), что, в свою очередь, приводит к изменению производительности переработки руды. Поэтому технологические времена обработки руды на разных операциях задаются с определенными допущениями:

$$e_{i, \min} \leq e_i \leq e_{i, \max}$$

Для случая варьируемых параметров  $e_i$ :

$$(k_i^{(n)} - k_i^{(1)})_{\min} \leq (k_i^{(n)} - k_i^{(1)}) \leq (k_i^{(n)} - k_i^{(1)})_{\max}$$

Предложенный подход позволяет определить момент запусков переходов, исследовать и оценить состояние сети в любой момент времени, а также условия совместной обработки руды различными приборами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М.: Мир, 1984. - 264 с.
2. Котов В.Е. Сети Петри - М.: Наука, 1984 - 158 с.
3. Технологическая инструкция Каджаранской обогатительной фабрики. - Ереван, 1990 - С. 6-11.

ГИУА

30.01.1998

Изв. НАН и ГНУ Армении (сер. ТН), т. III, № 2, 1999, с. 218-224.

УДК 517.587

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

С.Е. ПЕТРОСЯН

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА И ИЗОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПО ПОЛОСЕ СПЕКТРОМ В БАЗИСЕ УОЛША

Հնդրված վերականգնվում են վերջավոր ազդանշանները կամայական բազիսում: Վերջի հատվածների բազիսի համար բերվում են կոմպոզիցիան ազդորիմներ՝ տեղեկատվության կետերի ընտրության իրարար հասանելի խնդիր լուծված է եսակ (1), (2) հավելված առաջները համար:

Рассматриваются сигналы с финитным спектром. Показано, что выбор множества информативных точек в задаче экстраполяции в зависимости от характера "протяженности" спектра позволяет получить точное восстановление сигнала с финитным в любом базисе спектром. Для базиса системы Уолша приводятся конструктивные алгоритмы выбора множества информативных точек в задаче экстраполяции. Аналогичная задача решена и для функции изображения  $f(t, \tau)$ .

Библиогр. 6 назв.

We prove that the choice of informative points in the extrapolation problem depending on the "extension" character of the spectrum allows to get the exact signal recovery provided that the signals are finite in any base. Constructive algorithms of informative choice points in the extrapolation problem are presented for Walsh system base. An analogous problem is also solved for the function  $f(t_1, t_2)$ .

Ref.6.

Для одномерного случая теория восстановления сигнала с ограниченным спектром по некоторому подмножеству значений разработана Котельниковым. Оказывается, если отсчеты сигнала  $f(k\Delta)$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $\Delta$  - определенный интервал времени) брать не слишком редко, то возможно абсолютно точное восстановление сигнала на приемном конце, когда передаются лишь отсчеты  $f(k\Delta)$ . Впоследствии был найден ряд методов восстановления одномерного сигнала [1-5]. Однако все отмеченные методы имеют основной недостаток - наличие большого объема вычислений и чувствительность к шумам. В последние годы наряду с базисом Фурье широкое применение находят несинусоидальные базисы, в частности, базис Уолша [6]. Указанные методы, приведенные для одномерных сигналов, применимы при обработке изображений.

В данной работе приведены конструктивные алгоритмы нахождения базисного множества, необходимые для точного восстановления одномерных сигналов, а также двумерных изображений с финитным в базисе Уолша спектром.

1. *Восстановление функции от одной переменной с ограниченным в некотором ортогональном базисе спектром.* Пусть задан некоторый ортогональный базис

$$\varphi_0(t), \dots, \varphi_{N-1}(t), t \in Z^N, Z^N = \{0, 1, \dots, N-1\}, |Z^N| = N.$$

$n$ -ю функцию которого обозначим через  $\varphi_n(t)$ . Для произвольной функции  $f(t) \in R^N$  рассмотрим коэффициенты

$$\tilde{f}_n = \sum_{t \in Z^N} f(t) \varphi_n(t), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  называется преобразованием в базисе  $\varphi$  на множестве  $Z^N$ . Зафиксируем подмножество  $\Omega \subset Z^N$ ,  $|\Omega| = N'$ ,  $N' < N$  и рассмотрим следующее множество функций:  $B_{\Omega} = \{f(t); f(t) = \sum_{n \in \Omega} \tilde{f}_n \varphi_n(t)\}$ . Исследуем вопрос восстановления функций  $f \in B_{\Omega}$  через их значения в  $N'$  точках.

**Определение.** Множество  $T_{\Omega} = \{t_i\}_{i=0}^{N'-1}$ ,  $0 \leq i \leq N'-1$  назовем множеством базисных или информативных точек, если  $\exists \alpha(t_i, t_j)$

так что  $\forall t_i \in Z^N \setminus T_{\Omega}, f(t_i) = \sum_{j=0}^{N'-1} \alpha(t_i, t_j) f(t_j)$ .

Теперь покажем, что функцию  $f(t) \in B_{N'}$  можно восстановить, имея только  $N'$  ее значений. Для этого рассмотрим матрицу  $(\varphi_{in})$  порядка  $N \times N'$ . Так как функции  $\varphi_{in}$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$  линейно независимы, то ранг матрицы порядка  $N \times N'$  равен  $N'$ . Следовательно, можно выбрать  $N'$  линейно независимых строк с номерами из некоторого множества  $T_{N'}$ .

Записав условие  $f \in B_{N'}$  в этих точках, получим систему из  $N'$  уравнений и  $N$  неизвестных:

$$f(t) = \sum_{n \in \Omega} \tilde{f}_n \varphi_n(t), \quad t \in T_{N'}.$$

Из этой системы уравнений определим коэффициенты  $\tilde{f}_n$ ,  $n \in \Omega$ .  $\tilde{f}_n = \sum_{t \in T_{N'}} f(t) c_{nt}$ , где  $(c_{nt})$  - матрица, обратная  $(\varphi_{in})$ ,  $n \in \Omega$ ,  $t \in T_{N'}$ . В результате получаем представление функции  $f(t)$  в произвольной точке  $t \in Z^N \setminus T_{N'}$ :

$$f(t) = \sum_{n \in \Omega} \tilde{f}_n \varphi_n(t) = \sum_{n \in \Omega} \sum_{t \in T_{N'}} f(t) c_{nt} \varphi_n(t).$$

$$f(t) = \sum_{t \in T_{N'}} f(t) \sum_{n \in \Omega} c_{nt} \varphi_n(t), \quad t \in Z^N \setminus T_{N'}, \quad \text{где} \quad \sum_{n \in \Omega} c_{nt} \varphi_n(t) = \alpha(t, t_1).$$

2. Метод выбора базисных точек для восстановления функций от одной переменной с финитным в базисе Уолша спектром. Система функций Уолша  $\{w_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$  является базисом для  $R^N$ , так как состоит из  $N$  ортогональных функций. Система функций Уолша является полной. Для произвольной функции  $f(t) \in R^N$  рассмотрим коэффициенты Уолша

$$\tilde{f}_n = \sum_{t \in \Omega} f(t) w_n(t); \quad N=2^k; \quad 0 \leq n \leq 2^k - 1.$$

Отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  назовем преобразованием Уолша на множестве  $Z^N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $t \in Z^N$ . Зафиксируем подмножество  $\Omega$  из  $Z^N$  такое, что  $\Omega \subset Z^N$ ;  $|\Omega| = N'$ ;  $N' < N$ . Для этого рассмотрим следующее множество:  $B_{N'} = \{f(t); f(t) = \sum_{n \in \Omega} \tilde{f}_n w_n(t)\}$ .

Функцию  $f(t) \in B_{N'}$  можно восстановить, имея только  $N'$  ее значений в базисных точках, поскольку функции Уолша являются ортогональными и система  $\{w_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$  является базисом в  $R^N$ .

✓ Утверждение.  $\forall N$  и  $N' = N-1$  при помощи  $N-1$  точек можно восстановить функцию  $f \in B_{N'}$ .

Для  $N' < N-1$  предлагается выбрать базисные точки следующим рекуррентным методом. Рассмотрим  $N=2$  и  $N'=1$ . Тогда, если зафиксирована первая строка, то выбираем первый столбец, если зафиксирована вторая строка, выбираем второй столбец. Аналогично, если зафиксирована первая строка, то выбираем второй столбец и если зафиксирована вторая строка, выбираем первый столбец.

Предположим, что в матрице  $w_{n,m}^{(k-1)}$  можно выбрать базисные точки, то есть по произвольным  $N'$  строкам можно выбрать соответствующие столбцы. Из определения функций Уолша имеем

$$(w_{n,m}^k) = \begin{bmatrix} w_{n,m}^{(k-1)} \otimes [++] \\ w_{n,m}^{(k-1)} \otimes [+-] \end{bmatrix}$$

Если зафиксированные  $N'$  строк таковы, что  $0 \leq i_1, \dots, i_{N'} \leq N/2-1$ , то выбираем эти  $N'$  столбцов либо из столбцов с номерами  $0, 2, 4, \dots, N-2$ , либо из столбцов с номерами  $1, 3, 5, \dots, N-1$ . Это возможно, так как на пересечении строк  $0, 1, 2, \dots, N/2-1$  и столбцов  $0, 2, 4, \dots, N-2$  находится матрица  $(w_{n,m}^{(1)})$ . Точно так же на пересечении строк  $0, 1, 2, \dots, N/2-1$  и столбцов  $1, 3, 5, \dots, N-1$  находится матрица  $(w_{n,m}^{(1)})$ . Аналогично доказывается возможность выбора базисных точек в случае, если зафиксированные  $N'$  строк таковы, что  $N/2 \leq i_1, \dots, i_{N'} < N-1$ .

Если зафиксированные  $N'$  строк таковы, что  $0 \leq i_1, \dots, i_p \leq N/2-1$  и  $N/2 \leq i_{p+1}, \dots, i_{N'} < N-1$ , то первыми выбираем  $p$  столбцов из столбцов с номерами  $0, 2, 4, \dots, N-2$ , как было указано выше. Затем выбираем  $(N'-p)$  столбцов из столбцов с номерами  $1, 3, 5, \dots, N-1$  так, чтобы  $(N/2+1)$ -й строке соответствовал столбец с номером, равным номеру столбца, соответствующего  $(N/2-1)$ -й строке  $+1$ ,  $i=0, 1, \dots, N/2-1$ .

Покажем, что выбранные таким образом столбцы линейно независимы. Для этого приравняем нулю их линейную комбинацию и покажем, что коэффициенты также равны нулю.

$$\begin{cases} \alpha_0 w_{i_1, j_1} + \dots + \alpha_{N'} w_{i_{N'}, j_{N'}} = 0, \\ \dots \\ \alpha_1 w_{i_1, j_1} + \dots + \alpha_{N'} w_{i_{N'}, j_{N'}} = 0, \\ \dots \\ \alpha_p w_{i_p, j_p} + \dots + \alpha_{N'} w_{i_{N'}, j_{N'}} = 0, \\ (\alpha_0 + \alpha_{N'}) w_{i_1, j_1} + (\alpha_1 + \alpha_{N'-1}) w_{i_2, j_2} + \dots + (\alpha_{N'-1} + \alpha_{N'}) w_{i_{N'}, j_{N'}} = 0, \\ \dots \\ (\alpha_1 + \alpha_{N'}) w_{i_1, j_1} + (\alpha_2 + \alpha_{N'-1}) w_{i_2, j_2} + \dots + (\alpha_{N'-1} + \alpha_{N'}) w_{i_{N'}, j_{N'}} = 0. \end{cases}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)w_{1,1} + (\alpha_2 - \alpha_3)w_{1,2} + \dots + (\alpha_{N-1} - \alpha_N)w_{1,N-1} = 0,$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)w_{2,1} + (\alpha_2 - \alpha_3)w_{2,2} + \dots + (\alpha_{N-1} - \alpha_N)w_{2,N-1} = 0.$$

Из первых  $r$  уравнений имеем  $(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \dots, (\alpha_{r-1} - \alpha_r) = 0$ . Из остальных  $(N-r)$  уравнений имеем  $(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \dots, (\alpha_{N-1} - \alpha_N) = 0$ . Следовательно,  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_N = 0$ , т.е. доказана справедливость построенного рекуррентного метода выбора информативных точек в базисе Уолша. Подсчитаем количество действий для нахождения базисных точек. При выборе базисных точек всего выполняем порядка  $2N$  действий.

Таким образом, получим следующую теорему: для функций  $f \in B_1$  существует множество базисных точек.

3. Восстановление функции от двух переменных с ограниченным в некотором ортогональном базисе спектром. Пусть задан некоторый ортогональный базис  $\varphi_0(1), \dots, \varphi_{N-1}(1)$ ,  $Z^* = \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $|Z^*| = N$ .

Обозначим через  $\varphi_n(1)$   $n$ -ю функцию этого ортогонального базиса. Для произвольной функции  $f(t_1, t_2) \in R^{N \times N}$  рассмотрим коэффициенты

$$\tilde{f}_{nm} = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_n(t_1) \sum_{j=0}^{N-1} f(t_1, t_2) \varphi_j(m), \quad N = 2^L,$$

$$0 \leq n \leq 2^L - 1, \quad 0 \leq m \leq 2^L - 1.$$

Отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  называется преобразованием в базисе  $\varphi$  на множестве  $Z^* \times Z^*$ . Зафиксируем подмножество  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \subset Z^* \times Z^*$ ,  $\Omega_2 \subset Z^*$ ,  $|\Omega_1| = N'$ ,  $N' < N$ ,  $|\Omega_2| = N''$ ,  $N'' < N$ .

Рассмотрим следующее множество функций:

$$B_\Omega = \{f(t_1, t_2) \in R^{N \times N} : f(t_1, t_2) = \sum_{n \in \Omega_1} \varphi_n(t_1) \sum_{m \in \Omega_2} \tilde{f}_{nm} \varphi_m(t_2) = \sum_{n \in \Omega} \varphi_n(t_1) \tilde{f}_n(t_2)\}.$$

Исследуем вопрос восстановления функций  $f \in B_\Omega$  через их значения в  $N' \times N''$  точках. Теперь покажем, что функцию  $f(t_1, t_2) \in B_\Omega$  можно восстановить, имея только  $N' \times N''$  ее значений. Рассмотрим матрицу  $(\varphi_{nm})$  порядка  $N'' \times N$ . Так как функции  $\varphi_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N''-1$  линейно независимы, то ранг матрицы порядка  $N'' \times N$  равен  $N''$ . Следовательно, можно выбрать  $N''$  линейно независимых столбцов с номерами из некоторого множества  $T$ .

$$\hat{f}_n(t_2) = \sum_{m \in \Omega_2} \hat{f}_{n,m} \varphi_m(t_2), \quad t_2 \in T_{h_2}.$$

Из этой системы уравнений определим  $\hat{f}_{n,m}, m \in \Omega_2$ :

$$\hat{f}_{n,m} = \sum_{t_1 \in T_{h_1}} \hat{f}_n(t_1) c_{t_1, m},$$

где  $(c_{t_1, m})$  - матрица, обратная матрице  $(\varphi_{n, m_2}), m \in \Omega_2, t_1 \in T_{h_1}$ .

Таким образом, получаем представление функции  $\hat{f}_{n,1}$  в произвольной точке  $t_2 \in Z^N \setminus T_{h_2}$ :

$$\hat{f}_n(t_2) = \sum_{m \in \Omega_2} \hat{f}_{n,m} \varphi_m(t_2) = \sum_{m \in \Omega_2} \sum_{t_1 \in T_{h_1}} \hat{f}_n(t_1) c_{t_1, m} \varphi_m(t_2).$$

$$\hat{f}_n(t_2) = \sum_{t_1 \in T_{h_1}} \hat{f}_n(t_1) \sum_{m \in \Omega_2} c_{t_1, m} \varphi_m(t_2), \quad t_2 \in N \setminus T_{h_2}.$$

Рассмотрим теперь матрицу  $(\varphi_{n,1}(t_1))$ . Так как функции  $\varphi_{n,1}, n=0,1,\dots,N'-1$  линейно независимые, то ранг матрицы порядка  $N \times N'$  равен  $N'$ . Следовательно, можно выбрать  $N'$  линейно независимых строк с номерами из некоторого множества  $T_{n,1}$ :

$$f(t_1, t_2) = \sum_{n \in T_{n,1}} \varphi_{n,1}(t_1) \hat{f}_n(t_2), \quad t_1 \in T_{h_1}.$$

Из этой системы уравнений определим коэффициенты  $\hat{f}_n(t_2), n \in \Omega_1$ :

$$\hat{f}_n(t_2) = \sum_{t_1 \in T_{n,1}} c_{n, t_1} f(t_1, t_2),$$

где  $(c_{n, t_1})$  - матрица, обратная матрице  $(\varphi_{n,1}(t_1)), n \in \Omega_1, t_1 \in T_{h_1}$ .

В результате получаем представление функции  $f(t_1, t_2) \in B_{\Omega}$  в произвольной точке  $(t_1, t_2) \in Z^N \times Z^N \setminus T_{h_1} \times T_{h_2}$ :

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \sum_{n \in \Omega_1} \varphi_{n,1}(t_1) \hat{f}_n(t_2) = \sum_{n \in \Omega_1} \varphi_{n,1}(t_1) \sum_{t_1 \in T_{n,1}} \hat{f}_n(t_2) \sum_{m \in \Omega_2} c_{t_1, m} \varphi_m(t_2) = \\ &= \sum_{n \in \Omega_1} \varphi_{n,1}(t_1) \sum_{t_1 \in T_{n,1}} \sum_{m \in \Omega_2} c_{n, t_1} f(t_1, t_2) \sum_{m \in \Omega_2} c_{t_1, m} \varphi_m(t_2), (t_1, t_2) \in N \times N \setminus T_{h_1} \times T_{h_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, функцию  $f(t_1, t_2) \in B_{\Omega}$  можно восстановить, имея только  $N' \times N''$  ее значений в точках множества  $T_{h_1} \times T_{h_2}$ , которые назовем базисными.

**4. Метод выбора базисных точек для восстановления функций от двух переменных с финитным в базисе Уолша спектром.** Система функций Уолша  $\{w_{n,1}^{(1)}\}_{n=0}^{N'-1}$  является базисом для  $R^{N'}$ , так как состоит из  $N$  ортогональных функций. Для произвольной функции  $f(t_1, t_2) \in R^{N \times N}$  рассмотрим коэффициенты Уолша

$$\hat{f}_{n,m} = \sum_{l_1=0}^{N-1} w_{n,l_1} \sum_{l_2=0}^{N'-1} f(l_1, l_2) w_{m,l_2}, \quad N=2^k, \quad 0 \leq n \leq 2^k - 1, 0 \leq m \leq 2^k - 1$$

Отображение  $f \rightarrow \hat{f}$  назовем преобразованием Уолша на множестве  $Z^N = \{0, \dots, N-1\}$ ,  $l \in Z^N$ . Зафиксируем подмножество  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \subset Z^N \times Z^N$ ,  $\Omega_2 \subset Z^{N'}$ ,  $|\Omega_1| = N'N'' < N$ ,  $|\Omega_2| = N''$ ,  $N'' < N$ .

Для этого рассмотрим следующее множество:

$$B_\Omega = \{f(l_1, l_2); f(l_1, l_2) = \sum_{n \in \Omega_1} w_{n,l_1} \sum_{m \in \Omega_2} \hat{f}_{n,m} w_{m,l_2} = \sum_{n \in \Omega_1} w_{n,l_1} \hat{f}_n(l_2)\}.$$

Функцию  $f(l_1, l_2) \in B_\Omega$  можно восстановить, имея только  $N' \times N''$  ее значений в базисных точках. Базисные точки выбираются по номерам столбцов матрицы  $(W_{n,l_1})$ ,  $n_1 = 0, \dots, N''-1$ ,  $l_1 \in T_{n_1}$  и строк матрицы  $(W_{m,l_2})$ ,  $m = 0, \dots, N'-1$ ,  $l_2 \in T_m$  или, что то же самое, ввиду симметричности матрицы Уолша, по номерам столбцов матрицы  $(W_{m,l_1})$ ,  $m = 0, \dots, N'-1$ ,  $l_1 \in T_m$  (см. п.2). Таким образом, справедлива следующая теорема: для функций  $f(l_1, l_2) \in B_\Omega$  существует множество базисных точек.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stepan D.S. et Al. Prolate Spheroidal Wave Functions. Fourier Analysis and Uncertainty Principle // Bell Syst. Tech. J. - 1961. - V.40, №1. - P. 43-84.
2. Papoulis A. A New Algorithm in Spectral Analysis and Band-Limited Extrapolation // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1975. - V.CAS - 25. - P.735-742.
3. Sabri M.S. and Steenart W. An Approach to Band-Limited Signal Extrapolation, the Extrapolation Matrix // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1978. -V. CAS-25. - P. 74-78.
4. Cadzow J.A. Improved Spectral Estimation from Incomplete Sampled Data Observations // Presented at the RADC Spectrum Estimation Workshop, Rome, NY May 24-26, 1978. Also see Trans., Acoust., Speech, Signal Processing - Feb '979 - V.ASSP-27. -P. 4-12.
5. Jain A.K. and Ranganath S. Extrapolation Algorithms for Discrete Signals with Application in Spectral Estimation // IEEE Trans. On Acoust., Speech, Signal Processing - 1981 - ASSP-29 - P. 830-845.
6. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. - М. Наука, 1987. - 344 с.

РГУ

03.09.1997