

Г.Г. ШЕКЯН, М.Н. ХАЧАТРЯН

## КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ МАССАМИ

Դիտարկված է առավելակի կապերով տարանջատվող սիստեմայի սեփական և կամակարգելի տատանումների խնդիրը Շարժման դիֆերենցիալ ճախարակաբանական համակարգի լուծումը ներկայացված է գործնական կարգի Ֆուրիե ձևակերպման միջոցով: Ցույն է արված, որ առավելակի կապերի տարանջատումը գծայինն ոչ գծային կրկնակի տատանման անսոլիտոնի մեծությունն է առանձնահատկապես սկզբնական անցումները:

Рассмотрены колебания пластинчатых механических систем с присоединенными массами и с переключающимися в зависимости от амплитуды колебания упругими связями. Решение дифференциальных уравнений движения системы представлено через функции Бесселя нулевого порядка. Показано, что переключение упругих связей с линейных на нелинейные в зависимости от амплитуды колебания приводит к появлению неустойчивых зон колебаний.

Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. 4 назв.

The vibrations of plate-like mechanical systems with apparent additional masses and with switching depending on the amplitude of the vibration, elastic connections are considered. The solution of differential equations of the motion is represented by Bessel's function of zero the order. It is shown that the switching of the elastic connections from linear vibrations into nonlinear depending on the amplitude, vibrations reduced the appearance of unstable zones of vibrations.

Ил. 3. Table 1. Ref. 4.

Рассмотрим пластинчатую механическую систему (рис.1), состоящую из двух параллельных кольцевых пластин 1,2 и двух присоединенных масс 3 и 4. Пусть система нижней пластиной на радиусе  $R_0$  опирается на основании 5. Обе кольцевые пластины по наружному и внутреннему контурам жестко зашпелены в радиальном направлении и с помощью упругих элементов  $C_{1v}, C_{2v}, C_{1w}, C_{2w}$  упруго зашпелены в осевом направлении к массам 3 и 4. Упругие элементы, расположенные по внутренним контурам верхней и нижней пластин, соответственно могут переключаться с линейной жесткости  $C_{1v}, C_{2v}$  на нелинейную  $C_{1v}^*, C_{2v}^*$ , если перемещение массы  $m_1$  относительно внутреннего контура одной из пластин превышает заранее заданную величину  $\delta$ . При этом упруго-восстанавливающие силы нелинейных элементов выражаются зависимостями

$$F_{1w} = \alpha C_{1w}^* [W(a_w, t) - X_1(t)] [W(a_w, t) - X_1(t)]^{p-1},$$

$$F_{1v} = \alpha C_{1v}^* [V(a_v, t) - X_1(t)] [V(a_v, t) - X_1(t)]^{p-1},$$
(1)

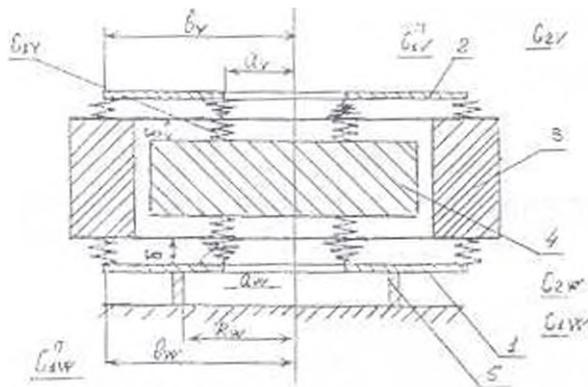


Рис. 1. Динамическая модель пластинчатой системы с присоединенными массами: 1,2 - кольцевые пластины; 3,4 - присоединенные массы; 5 - опора;  $C_{1v}, C_{2v}, C_{1w}, C_{2w}, C_{1v}^n, C_{1w}^n, C_{1v}^n, C_{1w}^n$  - упругие связи

Вынужденные колебания можно описать системой дифференциальных уравнений вида [1]

$$\begin{cases} \Delta^2 V - \frac{q_v}{D_v} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta^2 W + \frac{q_w}{D_w} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \\ m_1 X_1 + F_v(t) + F_{1v}(t) = f(t), \\ m_2 X_2 + F_v'(t) + F_w'(t) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $f(t)$  - функция возмущения;  $F_v = -2\pi a_v Q_v(a_v, t)$ ,  $F_v' = -2\pi b_v Q_v(b_v, t)$ ,  $F_w = -2\pi a_w Q_w(a_w, t)$ ,  $F_w' = -2\pi b_w Q_w(b_w, t)$ ,

$$Q_v = D_v \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta V), \quad Q_w = D_w \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta W), \quad F_w = -2\pi a_w Q_w(a_w, t),$$

$$F_w' = -2\pi b_w Q_w(b_w, t), \quad Q_v = D_v \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta V), \quad Q_w = D_w \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta W),$$

$\Delta$  - дифференциальный оператор Лапласа в полярных координатах;  $W, q_w, D_w, Q_w, a_w, b_w$  и  $V, q_v, D_v, Q_v, a_v, b_v$  - прогиб, удельный вес, цилиндрическая жесткость, интенсивность перерезывающей силы, внешние и внутренние радиусы верхней и нижней пластин соответственно;  $X_1, X_2$  - перемещения масс 4 и 3,  $r, Q$  - полярные координаты,  $t$  - время.

Введение нелинейных членов в граничные условия немного усложняет решение поставленных задач, но дает возможность точно оценить положение резонансных зон в общем диапазоне частот.

Из граничных условий следует, что колебания системы при малых возмущениях будут происходить с нулевыми узловыми

линиями [2]. Поэтому решение системы дифференциальных уравнений можно представить через функцию Бесселя нулевого порядка [3-4]:

$$V(r,t) = [A_1 J_0(\chi_1, r) + B_1 N_0(\chi_1, r) + C_1 I_0(\chi_1, r) + D_1 K_0(\chi_1, r)] \cos \omega t. \quad (3)$$

$$W(r,t) = [A_2 J_0(\chi_2, r) + B_2 N_0(\chi_2, r) + C_2 I_0(\chi_2, r) + D_2 K_0(\chi_2, r)] \cos \omega t. \quad (4)$$

где  $\chi_1^4 = \frac{q_V \omega^2}{D_V}$ ,  $\chi_2^4 = \frac{q_W \omega^2}{D_W}$ .

Тогда массы  $m_1$  и  $m_2$  будут двигаться по закону

$$\dot{X}_1 = X_{10} \cos \omega t, \quad (5)$$

$$\dot{X}_2 = X_{20} \cos \omega t. \quad (6)$$

Подставив (3-6) и граничные условия в (2), получим частотные уравнения, представленные в матричной форме

$$|a_{ij}| = 0, \quad (7)$$

где  $a_{ij}$  - элементы матрицы, составленные из коэффициентов системы, при неизвестных амплитудах.

Из (7) могут быть найдены неизвестные собственные частоты системы. Решение векового уравнения производится при помощи ЭВМ методом проб. Для определения неизвестных амплитуд колебаний наиболее удобным является метод преобразования Лапласа, т.к. в исследуемой задаче нет ограничений на внешнюю нагрузку  $f(t)$ .

Процесс программирования и решение на ЭВМ производится следующим образом. Выбираются некоторые дискретные значения  $\{t_n\}$ , равностоящие и входящие в интервал периода функции (11). Далее решение задачи производится при помощи метода проб относительно максимальных значений  $|W(a_w, t) - X_1(t)|$  и  $|V(a_v, t) - X_1(t)|$ .

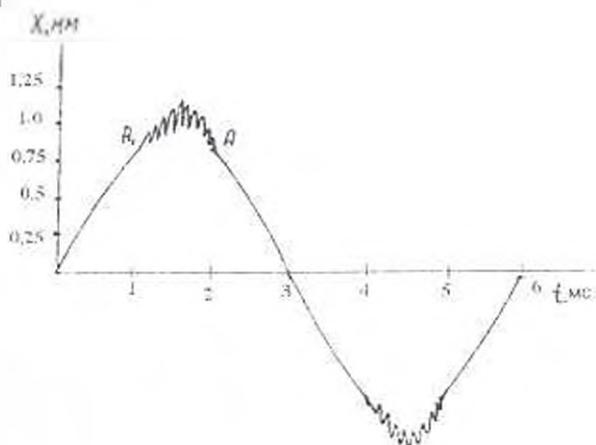


Рис.2. Зависимость перемещения массы  $m_1$  от времени

На основании результатов решения системы построен график зависимости перемещения элемента 1 от времени (рис.2). В интервале  $OA$ , функционируют линейные пружины по внутреннему контуру пластины. В промежутке  $A_1A_2$  одна из линейных пружин не функционирует, в связи с чем возникают колебания с более высокой частотой, с вырожденными пиками, что объясняется резким, почти ударным переходом линейной системы в нелинейную. В промежутке  $A_2A_3$  обе линейные пружины снова функционируют. В следующем полупериоде аналогичный процесс повторяется, только в промежутке времени, когда не функционирует другая линейная пружина.

В промежутке  $A_1A_3$  (рис.3) появление зоны неустойчивости в виде амплитудного "срыва" соответствует интервалу времени, когда линейная пружина не функционирует, т.е.  $|W(a_w, t) - X_1(t)| > \delta$  или  $|V(a_v, t) - X_1(t)| > \delta$ . При увеличении амплитуды колебания в зоне  $A_1A_3$  (рис.3) изменение относительного перемещения происходит по стрелкам, расположенным ниже линии графика, а при уменьшении - по стрелкам, расположенным выше линии графика. "Срыв" колебания происходит при увеличении амплитуды внешней нагрузки в точках  $A_1, A_2$ , а при понижении - в точках  $A_3, A_4$ .

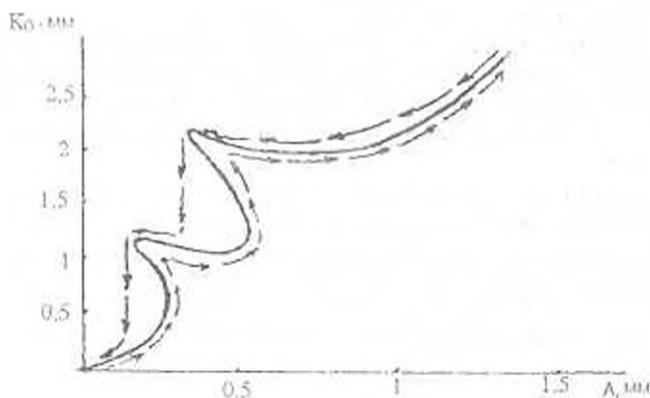


Рис. 3 Зависимость амплитуды относительного перемещения  $K_1 = W(a_w, t) - X_1(t)$  от амплитуды возбуждения при фиксированной частоте колебания

Указанные явления обнаружены также при экспериментальных исследованиях.

Таким образом, предложенная методика исследования колебательных процессов систем позволила изучить переходные процессы линейно-упругих пластинчатых систем с переключающимися нелинейными элементами и выявить зоны неустойчивости в виде амплитудных срывов.

Решение частотных уравнений (7) методом проб производилось на ЭВМ, что дало возможность определить резонансные частоты малых роторных машин. В таблице приведены сравнительные результаты расчетов и измерений габаритов 50...65 мм.

Таблица

Расчетные и экспериментальные значения резонансных частот  
малых роторных машин

Габа- рнты двигат- еля	Гармоники, Гц									
	I		II		III		IV		V	
	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.
50	83	85	426	440	992	1050	1800	1910	3270	3320
56	78	80	397	410	963	1000	1750	1800	3150	3250
65	70	78	348	460	936	980	1520	1610	3070	3150

Как видно из таблицы, предложенный метод расчета собственных частот роторных машин дает результаты, достаточно близкие к экспериментальным данным.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Л. Колебания деформируемых систем - М.: Машиностроение, 1970. - 136 с.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. - М.: Высшая школа, 1972. - 416 с.
3. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича и Н. Стигона. - М.: Наука, 1979. - 830 с.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа - М.: Наука, 1971. - 288 с.

Ин-т механики НАН РА

19.02.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 2, 1999, с. 145-152

УДК 621.9.01

МАШИНОСТРОЕНИЕ

С.Ш. ХРИСТАФОРЯН

### О ПРОЦЕССЕ РЕЗАНИЯ МАТЕРИАЛОВ КАК САМООРГАНИЗУЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРЕ ПО ПЕРЕРАБОТКЕ ВЕЩЕСТВА

Ինքնակազմակերպման և կառուցվածքների զարգացման դիրքերից ղիտարվում են կտրման տեխոլոգիան հարցերը՝ տաշվագոյություն գործընթացին համանման ֆիզիկական մոդելի մշակման ենթատեքստով:

Рассматриваются вопросы теории резания с позиции науки о самоорганизации и эволюции структур в контексте разработки адекватной физической модели процесса образования стружки.

Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.