незначительны даже тогда, когда в приближенном законе управления количество элементов ограничено.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами. -М.: Наука, 1976. - 424 с.
2. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. -М.: Наука, 1965. - 476 с.
3. **Брутян В.К.** Об одной задаче корректировки критерия оптимальности в марковских автоматических системах // Уч. записки ЕрГУ. Сер. "ЕН". - 1976.- Т. 131, № 1. - С. 3-11.
4. **Брутян В.К.** Основные аспекты теории непрерывных марковских управляемых систем и ее приложение. -Ереван: Айастан, 1984. - 298 с.
5. **Брутян В.К.** Синтез нелинейных марковских управляемых систем методом статистической аппроксимации // Изв. АН АрмССР. Сер.ТН. - 1982. - Т. 35, №5. - С. 29-36.
6. **Брутян В.К.** Об одной задаче синтеза нелинейных марковских управляемых систем методом полиномиальной аппроксимации // Автоматика и телемеханика. - 1980. - № 7. - С. 51-61.
7. **Брутян В.К.** К задаче синтеза оптимальных линейных марковских управляемых систем методом канонических разложений // ДАН, АрмССР. - 1981. -Т. 72, № 4. - С. 224-231.
8. **Ройтенберг Я.Н.** Автоматическое управление. -М.: Наука, 1971. - 552 с.
9. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемое уравнениями с частными производными. -М.: Мир, 1972. - 414 с.
10. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. -М.: Мир, 1971.- 400 с.
11. **Габасов Р., Кирилова ф.** Качественная теория оптимальных процессов. -М.: Наука, 1971.- 396 с.
12. **Мальцев А.И.** Основы линейной алгебры. -М.: Наука, 1970. - 412 с.
13. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. -М.: Наука, 1969. - 368 с.
14. **Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н.** Оптимальное управление нагревом металла. -М.: Металлургия, 1972. - 312 с.

Военный институт МО РА

22.11.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 1, 1999, с. 88-94.

УДК 681.3+505:519.95

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, А.Г. АВЕТИСЯН

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ НЕАВТОНОМНЫХ МАТРИЦ НА ОСНОВЕ ДТ-ФОРМАЛИЗМА

Առաջարկված է ոչ ավտոնոմ մատրիցների որոշիչների հաշվման արդյունավետ մեթոդ՝ հիմնված սիմվոլային տարրական թվային ընթացակարգերի վրա: Դիտարկված է օրինակ:

Предложен эффективный метод вычисления определителей неавтономных матриц, базирующийся на однотипных элементарных численных процедурах. Рассмотрен пример.
Библиогр.: 2 назв.

An effective method of nonautonomous matrix determinant computation based on similar elementary numerical procedures is proposed. An example is considered.
Ref.2.

1. *Введение*. Пусть задана матрица

$$A(t) = (a_{ij}(t)) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Вычисление определителей таких матриц аналитическим путем возможно лишь при малых n и весьма простых соотношениях $a_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$. Решению этой задачи для общего случая в литературе почти не уделяется внимания, по-видимому, из-за ее кажущейся тривиальности и реализации на основе выполнения следующей процедуры:

- выбора некоторого множества изолированных точек t_k, $k=\overline{1,k_{fix}}$ (где k_{fix}- некоторое выбираемое из определенных соображений произвольное число, указывающее на количество узлов аппроксимации) и вычисления определителей соответствующих автономных матриц в этих точках;

- использования полученных при этом значений определителей и любого из известных интерполяционных методов с целью построения функции detA(t).

Реализация этой процедуры связана, с одной стороны, с громоздкими вычислениями, с другой - выбором значения величины k_{fix}, никак не поддающимся регулярному правилу.

Целью настоящей работы является разработка нового эффективного аналитического метода решения отмеченной проблемы, полностью базирующегося на однотипных элементарных численных процедурах нахождения определителей некоторого множества автономных матриц.

2. *Математический аппарат*. Итак, пусть $a_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$ представимы рядами Тейлора вокруг точки t_v, т.е.

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}(K)\left(\frac{t-t_v}{H}\right)^K,$$

где H - некоторая постоянная, а

$$a_{ij}(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{\partial^k a_{ij}(t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=t_v}, \quad K=\overline{0,\infty} \quad —$$

ДТ- изображения (дискреты) оригинала $a_{ij}(t)$ в точке $t = t_v$ [1].

Тогда, по аналогии, матричные дискреты имеют вид

$$A(K) = \frac{H^K}{K!}\begin{bmatrix} a_{11}(K) & a_{12}(K) & \cdots & a_{1n}(K) \\ a_{21}(K) & a_{22}(K) & \cdots & a_{2n}(K) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(K) & a_{n2}(K) & \cdots & a_{nn}(K) \end{bmatrix} = [a_{ij}(K)] =$$

$$= [a_1(K) \vdots a_2(K) \vdots \cdots \vdots a_n(K)], \quad K = \overline{0, \infty},$$

где $a_j(K) = (a_{1j}(K), a_{2j}(K), \ldots, a_{nj}(K))^T$, $j = \overline{1, n}$ - K-е векторы-изображения векторов-столбцов матрицы $A(t)$ (естественно, можно оперировать и векторами-строками-изображениями векторов-строк матрицы $A(t)$).

Следовательно, для матрицы $A(t)$ будем иметь тейлоровское представление:

$$A(t) = \sum_{K=0}^{\infty} A(K)\left(\frac{t - t_v}{H}\right)^K$$

Известно [2], что определитель любой квадратной $(n \times n)$ - матрицы является алгебраической суммой $n!$ слагаемых, состоящих из произведения n сомножителей - элементов матрицы, находящихся в различных строках и столбцах. Поэтому ДТ-изображение определителя матрицы $A(t)$ будет состоять из суммы ДТ-изображений таких $n!$ слагаемых.

Рассмотрим как образуется ДТ-изображение одной из таких слагаемых. Для простоты предположим, что $n=3$, и в качестве такой слагаемой возьмем $a_{11}(t) \cdot a_{22}(t) \cdot a_{33}(t)$, т.е. произведение диагональных элементов матрицы $A(t)$. Имеем следующие представления:

при $K = 0$:

$$(a_{11}(t) \cdot a_{22}(t) \cdot a_{33}(t))_{t=t_v} = a_{11}(0) \cdot a_{22}(0) \cdot a_{33}(0);$$

при $K = 1$:

$$\frac{H_v}{1!} \cdot \frac{\partial(a_{11}(t) \cdot a_{22}(t) \cdot a_{33}(t))}{\partial t}\bigg|_{t=t_v} = H \cdot \left[\frac{\partial(a_{11}(t))}{\partial t}\bigg|_{t=t_v} \cdot a_{22}(t)\big|_{t=t_v} \cdot a_{33}(t)\big|_{t=t_v} + \right.$$

$$\left. + a_{11}(t)\big|_{t=t_v} \cdot \frac{\partial(a_{22}(t))}{\partial t}\bigg|_{t=t_v} \cdot a_{33}(t)\big|_{t=t_v} + a_{11}(t)\big|_{t=t_v} \cdot a_{22}(t)\big|_{t=t_v} \cdot \frac{\partial(a_{33}(t))}{\partial t}\bigg|_{t=t_v}\right] =$$

$$= H \cdot [a_{11}(1) \cdot a_{22}(0) \cdot a_{33}(0) + a_{11}(0) \cdot a_{22}(1) \cdot a_{33}(0) + a_{11}(0) \cdot a_{22}(0) \cdot a_{33}(1)].$$

Аналогично, при $K=2$, опустив вычисления и представив лишь окончательный результат, имеем

$$\frac{H^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2(a_{11}(t)\cdot a_{22}(t)\cdot a_{33}(t))}{\partial t^2}\bigg|_{t=t_v} = \frac{H^2}{2!}[a_{11}(2)\cdot a_{22}(0)\cdot a_{33}(0)+$$

$$+a_{11}(0)\cdot a_{22}(2)\cdot a_{33}(0)+a_{11}(0)\cdot a_{22}(0)\cdot a_{33}(2)+a_{11}(1)\cdot a_{22}(1)\cdot a_{33}(0)+$$

$$+a_{11}(1)\cdot a_{22}(0)\cdot a_{33}(1)+a_{11}(0)\cdot a_{22}(1)\cdot a_{33}(1)]$$

и т. д.

Такие ДТ-преобразования без каких-либо сложных вычислений легко можно получить и для любых слагаемых, порождаемых матрицами любого порядка, имея при этом в виду, что сумма номеров дискрет в каждом слагаемом в К-ом ДТ-изображении обязательно должна равняться К.

В результате проведения таких вычислений решение рассматриваемой задачи можно представить в виде тейлоровского разложения

$$\det[A(t)] = \sum_{K=0}^{\infty} \det(K)\cdot\left(\frac{t-t_v}{H}\right)^K,$$

где коэффициенты $\det(K)$ определяются соотношениями

$$\det(K) \doteq \det[A(t)] = \sum_{K=0}^{M_{k,n}} \det[a_1(K)\vdots a_2(K)\vdots\cdots\vdots a_n(K)], \quad K=\overline{0,\infty}.$$

Величина $M_{k,n}$ в последнем выражении указывает на количество числовых матриц порядка n, используемых для вычисления величины $\det(K)$, причем здесь имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$M_{k,n} = M_{k-1,n} + M_{k,n-1}$$

или

$$M_{k,n} = \sum_{i=0}^{K} M_{i,n-1}.$$

При этом очевидно, что

а) $M_{0,n} = 1, \ \forall n = \overline{2,\infty}$,

б) $M_{k,2} = K+1, \ \forall K = \overline{0,\infty}$,

в) $M_{k,n} = M_{n-1,K+1}, \ \forall n = \overline{2,\infty}, \ \forall K = \overline{1,\infty}$ (условие симметричности элементов матрицы относительно нижней главной поддиагонали при K≥1).

Кроме того, если $a_j(P) = 0, \ \forall P = \overline{0,K}, \ j = \overline{1,n}$, то $M_{k,n} = \bar{M}_{k,n} - \sum_{i=0}^{m-1} M_{k-p-i,n-1}$, где m- количество нулевых столбцов, а $\bar{M}_{k,n}$ - количество числовых матриц порядка n, не обладающих нулевыми столбцами.

Что касается необходимого количества дискрет P, обеспечивающего заранее заданную точность вычислений ε на заданном отрезке [a, b], то в соответствии с известными оценками [2] будем иметь

$$\varepsilon = \max_{[a,b]} R_p(t) \le \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|\dfrac{\partial^{p+1}\det[A(t)]}{\partial t^{p+1}}\right|}{(P+1)!}\,\ell^{p+1},$$

где

$$R_n(t) \le \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|\dfrac{\partial^{p+1}\det[A(t)]}{\partial t^{p+1}}\right|}{(P+1)!}\cdot\left|t-t_v\right|^{p+1}, \quad \ell = \max\{t_v - a, b - t_v\},$$

или, с учетом обозначения $\det(K) \;\overline{\underline{\bullet}}\; \det A(t)$,

$$\varepsilon \le \max_{[a,b]}\left|\det(P+1)\right|\cdot \ell^{p+1}.$$

3. *Пример.* Рассмотрим матрицу

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ -t & 0 & t^2 \end{bmatrix},$$

для которой

$$\det[A(t)] = t\cdot(1 - t + t^2).$$

В соответствии с вышеизложенным имеем

$$A(0) = [a_1(0) \vdots a_2(0) \vdots a_3(0)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(1) = [a_1(1) \vdots a_2(1) \vdots a_3(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot H,$$

$$A(2) = [a_1(2) \vdots a_2(2) \vdots a_3(2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot H^2,$$

....

$$A(K) = [a_1(K) \vdots a_2(K) \vdots a_3(K)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot H^K = [0]\cdot H^K = [0], \quad \forall K \ge 3.$$

Следовательно,

$$\det(0) = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\det(1)=\det([a_1(0) \vdots a_2(0) \vdots a_3(1)])+\det([a_1(0) \vdots a_2(1) \vdots a_3(0)])+$$

$$+\det([a_1(1) \vdots a_2(0) \vdots a_3(0)])=$$

$$=H\det\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}+H\det\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+H\det\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=H.$$

$$\det(2)=\det([a_1(0) \vdots a_2(0) \vdots a_3(2)])+\det([a_1(0) \vdots a_2(2) \vdots a_3(0)])+$$

$$+\det([a_1(2) \vdots a_2(0) \vdots a_3(0)])+\det([a_1(0) \vdots a_2(1) \vdots a_3(1)])+$$

$$+\det([a_1(1) \vdots a_2(1) \vdots a_3(0)])+\det([a_1(1) \vdots a_2(0) \vdots a_3(1)])=$$

$$=H^2\det\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+H^2\det\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+H^2\det\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}+$$

$$+H^2\det\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}+H^2\det\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}+H^2\det\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=H^2.$$

$$\det(3)=\det([a_1(0) \vdots a_2(0) \vdots a_3(3)])+\det([a_1(0) \vdots a_2(3) \vdots a_3(0)])+$$

$$+\det([a_1(3) \vdots a_2(0) \vdots a_3(0)])+\det([a_1(0) \vdots a_2(1) \vdots a_3(2)])+$$

$$+\det([a_1(0) \vdots a_2(2) \vdots a_3(1)])+\det([a_1(1) \vdots a_2(2) \vdots a_3(0)])+$$

$$+\det([a_1(2) \vdots a_2(1) \vdots a_3(0)])+\det([a_1(1) \vdots a_2(0) \vdots a_3(2)])+$$

$$+\det([a_1(2) \vdots a_2(0) \vdots a_3(1)])+\det([a_1(1) \vdots a_2(1) \vdots a_3(1)])=$$

$$=H^3\det\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}+H^3\det\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+H^3\det\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}+$$

$$+H^3\det\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}+H^3\det\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}+H^3\det\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}+$$

$$+H^3\det\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+H^3\det\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}+H^3\det\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}+$$

$$+H^3\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix} = H^3.$$

Таким образом,

$$\det[A(t)] = 0 + 1\cdot t - 1\cdot t^2 + 1\cdot t^3 = t\cdot(1-t+t^2),$$

что и должно было быть. Очевидно, при этом $P=3$, $\varepsilon=0$, $[a, b]=(-\infty,\infty)$.

Замечание. При организации численных расчетов на основе предложенной ДТ-модели с целью увеличения точности необходимо лишь увеличить количество дискрет и продолжить вычисления на основе соответствующих рекуррентных процедур, в отличие от вышеотмеченной, где с той же целью необходимо увеличить количество узлов аппроксимации K_{ux} и повторить вычисления с начала до конца.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели. -Киев: Наукова думка, 1990.- 230 с.
2. **Крылов В.Н., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы высшей математики. Том 1. -Минск: Вышэйшая школа, 1972. - 560 с.

ГИУА 23.03.98

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LII, № 1, 1999, с. 94-100

УДК 62.50.531.01

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В.Р. БАРСЕГЯН

ОПТИМАЛЬНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

[illegible]

Рассматривается линеаризованное уравнение относительного движения космических аппаратов. Предполагая, что в моменты коррекции траектории информация поступает с некоторой ошибкой, построено соответствующее оптимальное стохастическое управление и стохастическое движение. Получена оценка для отклонения стохастического движения от желаемого.

Библиогр.: 4 назв.