Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН). т. LI, № 3, 1998, с. 263-268.

УДК 621-517.534 МАШИНОСТРОЕНИЕ

Г.Г. ШЕКЯН

ЖЕСТКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ШАРИКОПОДШИПНИКА

Դիտարկված են գնդառանցքակալի կոշտության բնութագրերը բեռնվածության կամայական ուղղության ազդեցության դեպքում: Պոտենցիալ էներգիայի ասիմպտոտիկ ներկայացման հաշվառմամբ կազմված հավասարակշռության դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծումը թույլ է տվել ստանալ պտտվող գնդառանցքակալի կոշտության մոդելը գլխավոր առանցքների ուղղությամբ: Ցույց է տրված, որ այդ բնութագրերը պարբերաբար փոփոխվում են, և ըստ առանցքների ուղղության՝ փոխկապակցված են:

Рассмотрены жесткостные характеристики шарикоподшипника при действии нагрузки произвольного направления. Решение системы дифференциальных уравнений равновесия, составленных с учетом асимптотического представления потенциальной энергии, позволило получить жесткостную модель вращающегося шарикоподшипника по направлениям главных осей. Показано, что значения этих характеристик периодически меняются и по направлениям осей взаимосвязаны.

Ил. 3. Библиогр.: 5 назв.

Ball bearing rigidability characteristics in case of arbitrary direction load influence are considered. Solution of simultaneous equilibrium equations set up by asymptotic representation of potential energy permitted to obtain a rigidability model of rotating ball bearings on main directions of the axes. It is shown that these characteristic values are periodically changeable and they are interchangeable on directions of axes.

Ill. 3. Ref. 5.

Как известно, подшипники в машинах являются теми звеньями, через которые внешние возмущения передаются на ротор или от ротора к корпусу. Кроме того, они являются источниками кинематических возмушений силовых импульсов довольно широкого диапазона частот. Кинематическое возмушение в подшипниках качения возникает в результате движения его элементов относительно друг друга, а источниками такого возмущения являются нелинейная жесткость, некачественная сборка, дефекты изготовления, наличие зазоров, отклонение от точных геометрических форм и т.д. [1]. Если учесть особенности кинематики подшипника качения, нетрудно придти к заключению, что центр внутреннего кольца при его вращении описывает сложную кривую, обусловленную как технологическими погрешностями, так и внешними условиями его работы. Колебания, обусловленные переменностью жесткости, характерны как для "идеального", так и для дефектного подшипников. Они определяются упругими свойствами подшипника и его деталей, величина и характер которых зависят от числа тел качения, наличия зазора, материала сепаратора, тел качения и колец, а также от направления действующих силовых импульсов. Раздельное рассмотрение этих факторов приводит к большим расчетным погрешностям, рассмотрение понятий "приведенная жесткость" или "жесткостная характеристика" по

направлениям сил вообще теряет всякий смысл. Такая чрезмерно упрощенная модель позволяет произвести расчет лишь низкочастотных спектров вибраций. Это означает, что система уравнений, описывающих пространственные колебания, не может быть независимой, тем более не могут быть независимыми пространственные жесткостные характеристики подшипников качения. При таком подходе определение нагрузки на шарикоподшипники по взаимному положению колец становится проще, если разделить подшипник на n контактных групп (где n - число шариков), каждая из которых состоит из шарика и двух участков дорожек качения. В качестве модели контактной группы может служить модель Герца. Свяжем с наружным неподвижным кольцом систему координат X,Y,Z, а с внутренним вращающимся кольцом - X',Y',Z' (рис.1). Положение внутреннего кольца относительно наружного определяется шестью координатами $x,y,z,\alpha,\beta,\gamma$, где α,β,γ - углы конечного вращения первого рода, определяющие положение трехгранника x',y',z' в системе X,Y,Z (рис.2). Угловое перемещение γ совпадает с направлением вращения и в дальнейшем в уравнениях не участвует.

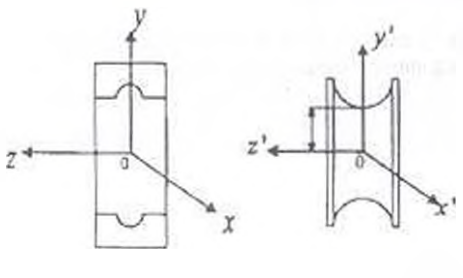

Рис. 1. Система координат, связанная с кольцами подшипника

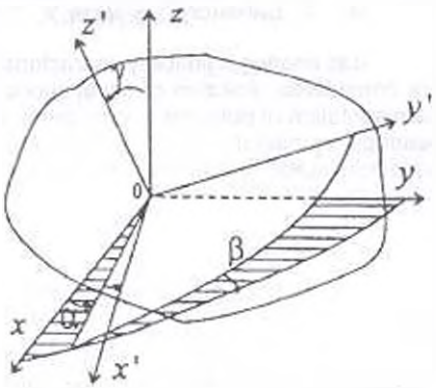

Рис. 2. Углы конечного вращения первого рода

Если потенциальная энергия неидеального подшипника известна и силы трения в зонах контакта шариков с кольцами таковы, что предотвращают проскальзывание шаров, то уравнение равновесия подшипника можно представить в виде [4]

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial x}\ \frac{\partial\Pi}{\partial y}\ \frac{\partial\Pi}{\partial z}\ \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\ \frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\right\}=\{\Lambda,P,Q,M_1,M_2\}. \qquad (1)$$

В качестве выражения для потенциальной энергии использовано ее асимптотическое представление

$$\Pi=\sum_{i=1}^{n}\frac{2K_{\Gamma}^{\text{ср}}}{5}\left(1+\frac{P_{ik}}{\delta}\right)\{\sin\tau_0[\delta+\Delta z+\Delta P_{ik}^{\text{в}}-\Delta P_{ik}^{\text{н}}+(P_s^{i}+P_s^{0})\times$$

$$\times(\alpha\sin\varphi_i-\beta\cos\varphi_i)]+\cos\tau_0[(x+P_s^{0}\beta)\cos\varphi_i+ \qquad (2)$$

$$+(y-P_s^{0}\lambda)\text{son}\varphi_i+\Delta m_i]-\Delta m_i-\Delta e_i-\Delta e_i/2\}^{5/2}.$$

где $K_{\Gamma}^{\text{ср}}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{D_{\text{пн}}}(C_{\text{пн}}+C_{\text{вн}})^{1/2}$; $C_{\text{н}}$ и $C_{\text{в}}$ - постоянные Герца для внутреннего и наружного колец; $D_{\text{пн}}$, P_{ik} - диаметр и криволинейные координаты i-го шарика; $\Delta P_{ik}^{\text{в}}$, $\Delta P_{ik}^{\text{н}}$, P_s^{i}, P_s^{0} - совокупность дефектов контактных групп s (s=1,2,...,8); δ - осевой натяг подшипника; Δz - изменение осевого зазора подшипника; φ_i - угол поворота i-го шарика относительно наружного кольца $(\varphi_i=\varphi_1+\frac{2\pi}{n}(i-1))$; Δm_i - совокупность дефектов i-го шарика; Δe_1, Δe_i - изменение эксцентриситета внутреннего кольца относительно наружного и i-го шара относительно оси вращения; τ_0 - угол между нормалью к текущему сечению и плоскостью (x,y) (угол контакта).

С учетом (2) система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} K_{\Gamma}^{\text{ср}}\cos\tau_0\sum_{i=1}^{n}L_i\cos\varphi_i=A,\ K_{\Gamma}^{\text{ср}}\cos\tau_0\sum_{i=1}^{n}L_i\sin\varphi_i=P,\ K_{\Gamma}^{\text{ср}}\sin\tau_0\sum_{i=1}^{n}L_i=Q, \\ K_{\Gamma}^{\text{ср}}(P_2^{0}+P_4^{0})\sin\tau_0\sum_{i=1}^{n}L_i\sin\varphi_i=M_1,\ K_{\Gamma}^{\text{ср}}(P_2^{0}+P_4^{0})\sin\tau_0\sum_{i=1}^{n}L_i\cos\varphi_i=M_2. \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$L_i=(1+P_i/\delta)\{\sin\tau_0[\delta+\Delta z+(P_6^{i}-P_5^{i})+(P_2^{0}+P_4^{0})(\alpha\sin\varphi_i-\beta\cos\varphi_i)]+$$

$$+\cos\tau_0((x\cos\varphi_i+y\sin\varphi_i)+\Delta m_i)-\Delta m_i-\frac{\Delta e_i}{2}\}^{3/2}. \qquad (4)$$

Как видно из (3), переменные x,y,z,α,β можно выразить через компоненты сил, моментов и совокупностей дефектов:

$$\{x,y,z,\alpha,\beta\}=\{x,y,z,\alpha,\beta\}(\varphi_1,A,P,Q,M_1,M_2,\Delta P_s^{i}). \qquad (5)$$

Переменные x,y,z можно представить в виде рядов

$$\{x,y,z,\}=\left[\frac{\partial}{\partial A}A+\frac{\partial}{\partial P}P+\frac{\partial}{\partial Q}(Q-Q_0)+\sum_{i,s}\frac{\partial}{\partial P_s^{i}}\Delta P_s^{i}+K\right]\{x,y,z,\}, \qquad (6)$$

где производные вычисляются в точке $A=P=Q-Q_0=\alpha=\beta=$ $=\Delta P_s^{i}=0$. Подстановка (6) в (3) дает явные выражения для M_1,M_2. Линейные части (6) определяются выражениями

$$\frac{\partial x}{\partial P}=\frac{\partial x}{\partial Q}=\frac{\partial y}{\partial A}=\frac{\partial y}{\partial Q}=\frac{\partial z}{\partial A}=\frac{\partial z}{\partial P}=0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial A}=\frac{1}{K_x},\ \frac{\partial y}{\partial P}=\frac{1}{K_y},\ \frac{\partial z}{\partial Q}=\frac{1}{K_z}, \qquad (7)$$

Система (7) является линейной системой алгебраических уравнений относительно искомых производных. Определитель этой системы совпадает с главным минором третьего порядка. Тогда матрицу жесткостей можно представить в виде

$$K=\begin{vmatrix} K_x & 0 & 0 & 0 & -K_{x\beta} \\ 0 & K_y & 0 & K_{y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 \\ 0 & K_{y\alpha} & 0 & K_\alpha & 0 \\ -K_{x\beta} & 0 & 0 & 0 & K_\beta \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

где K_x, K_y, K_z - жесткости по осям координат; $K_{x\beta}, K_{y\alpha}, K_{y\alpha}$ - перекрестные жесткости.

Используя обозначения $\Phi_1 = K_\Gamma^{xy}\cos\tau_0\sum L_i\cos\varphi_i - A$, $\Phi_2 = K_\Gamma^{xy}\cos\tau_0\sum L_i\sin\varphi_i - P$, $\Phi_3 = K_\Gamma^{xy}\sin\tau_0\sum L_i - Q$, имеем

$$\frac{\partial x}{\partial P_i'}=-\frac{1}{K_x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial P_i'},\ \frac{\partial y}{\partial P_i'}=\frac{1}{K_y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial P_i'},\ \frac{\partial z}{\partial P_i'}=-\frac{1}{K_z}\frac{\partial\Phi_3}{\partial P_i'}. \qquad (9)$$

Вычислив производные от функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 и подставив их в (9), получим

$$\frac{\partial x}{\partial P_i'}=\frac{2\cos\varphi_i}{n}T_{xi},\ \frac{\partial y}{\partial P_i'}=\frac{2\sin\varphi_i}{n}T_{yi},\ \frac{\partial z}{\partial P_i'}=\frac{tg\tau_0}{n}T_{zi},$$

где $|T_{xi}|=\left\{\frac{1}{\cos\tau_0}-1,\ \frac{1}{\cos\tau_0}-1,\ 1,\ -1,\ tg\tau_0,\ -tg\tau_0,\ -\frac{1}{\cos\tau_0},\ -\frac{2}{3}tg\tau_0\right\}$.

Для упрощения вычислений примем векторную форму записи переменных в (2): $\overline{R}=\{x,y,z,\alpha,\beta\}$ - вектор перемещений внутреннего кольца; $\overline{N}=\{\cos\tau_0\cos\varphi_i,\cos\tau_0\sin\varphi_i,\sin\tau_0,r\sin\tau_0\sin\varphi_i - -r\sin\tau_0\cos\varphi_i\}$ - вектор коэффициентов при переменных: $\Delta\overline{P}_i=\{\Delta P_i'\}$ $(s=\overline{1,8})$ - вектор дефекта i-й контактной группы $(P_i'=0)$, $\overline{T}=\{T^s\}$ $(s=\overline{1,8})$ - вектор коэффициентов влияния.

Тогда выражение (2) примет вид

$$\Pi=\frac{2K_\Gamma}{5}\sum_{i=1}^{n}(\delta\sin\tau_0+\overline{N}\ \overline{R}-\overline{T}\Delta P_i\cos\tau_0)^{5/2}. \qquad (10)$$

Используя очевидные правила дифференцирования по векторному аргументу, получим

$$\frac{d\Pi}{dR} = K_r \sum_{i=1}^{n} (\delta \sin\tau_0 + \overline{N}\,\overline{R} - \overline{T}\,\Delta\overline{P}_r \cos\tau_0)^{1/2}\,\overline{N}. \qquad (11)$$

Дифференцируя выражение (11) по R, получим

$$K = \left.\frac{d^2\Pi}{dR^2}\right|_{R=0} = \frac{3}{2} K_r \sum_{i=1}^{n} (\delta \sin\tau_0 - \overline{T}\Delta\overline{P}_r \cos\tau_0)^{1/2}\,\overline{N}^2, \qquad (12)$$

где $\overline{N}^2$ представляет собой матрицу вида

$$\overline{N}^2 = \{N_p N_q\}, \quad p,q = \overline{1,5}. \qquad (13)$$

Совместное решение (11) и (12) позволяет определить жесткости подшипника по всем направлениям. При решении практических задач чаще всего удобно иметь выражения для жесткостей по всем направлениям координатных осей.

Принимая $A=0$, $P=0$, $M_1=M_2=0$ и $DQ/dz=K_z$, имеем

$$Q = K_r n \sin^{3/2}\tau \delta^{3/2} \quad \text{и} \quad \delta = [Q/K_r n \sin^{3/2}\tau]^{2/3}.$$

Тогда соответственно

$$K_x = K_y = \frac{3}{4}(K_r n)^{2/3} \cos^2\tau_0 \sqrt[3]{\frac{Q}{\sin\tau}},$$

$$K_\alpha = K_\beta = \frac{3}{4}(K_r n)^{2/3} \sin^2\tau_0 \sqrt[3]{\frac{Q}{\sin\tau}} (r_1 + R_r)^2,$$

$$K_z = \frac{3}{2}(K_r n)^{2/3} \sin^{5/3}\tau_0 \sqrt[3]{Q},$$

$$K_{xy} = K_{yx} = \frac{3}{4}(K_r n)^{2/3} \sin\tau_0 \cos\tau (r_1 + R_r) \sqrt[3]{\frac{Q}{\sin\tau}}.$$

Отношение осевой жесткости к радиальной дает $K_z/K_x = 2\mathrm{tg}^2\tau_0$, где τ_0 - угол контакта.

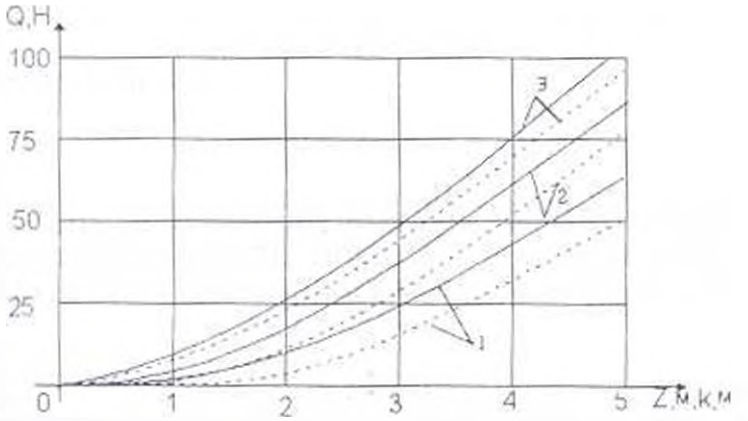

Рис. 3. Упруго-осевая характеристика шарикоподшипника типа 1802 при значениях радиального зазора: 1- e=8, 2- e=4, 3- e=4 *мкм*. Сплошные линии построены на основании аналитических расчетов, пунктирные - на основании экспериментальных данных

Как видно из зависимости осевой жесткости шарикоподшипника от приложенной осевой нагрузки при различных значениях радиального зазора для конкретного шарикоподшипника типа 18021 (рис.3), с увеличением осевой нагрузки осевая жесткость увеличивается, а с увеличением радиального зазора - уменьшается. Расчетные и экспериментальные результаты хорошо согласуются. Некоторые понижения значений экспериментальных данных можно объяснить тем, что рассмотрены лишь идеальные подшипники.

Результаты работы позволили при расчете колебаний роторных машин учесть подшипниковые вибрации, обусловленные наличием неизбежных технологических дефектов изготовления, а также переменностью и взаимосвязанностью жесткостных характеристик по направлениям выбранных координатных осей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боярников В.С., Неймарк Ю.Н.** О колебаниях вала в шарикоподшипнике // Динамика машин: Сб. - М.: Машиностроение, 1966. - С. 343-353.
2. **Бурмистров А.Н., Галахов М.А.** Параметрические колебания ротора на шарикоподшипниках // Машиноведение. - 1983. - № 2. - С. 71-81.
3. **Тамура А., Танигути О.О.** О субгармонических колебаниях порядка 1/2, возбуждаемых при движении шариков в подшипнике // Механика. АН СССР. - 1963. - № 3. - С. 43-55.
4. **Бальмонт В.Б.** Метод осевой жесткости радиально-упорного шарикоподшипника // Изв. вузов. Машиностроение. - 1977.- № 6.- С. 24-29.
5. **Бальмонт В.Б.** О вынужденных колебаниях ротора на неидеальных шарикоподшипниках // Изв. вузов. Машиностроение. - 1985. - № 10. - С. 40-45.

Ин-т механики НАН РА

30.06.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 3, 1998, с. 268 - 272.

УДК 621.831 **МАШИНОСТРОЕНИЕ**

А.К. АМИРЯН

УСТАНОВЛЕНИЕ ДЛИНЫ НАПРАВЛЯЮЩИХ ДОРОЖЕК ГЕНЕРАТОРА ВОЛН ЦЕПНО-ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ ПРИ ЕГО НАРУЖНОМ ОБХВАТЕ ЦЕПИ

Նկարագրված է արտաքին ալիքային գեներատորով շղթայաալիքային փոխանցման (ՇԱՓ) կառուցվածքը: Դիտարկված են շղթայաալիքային մեխանիզմի ալիքային գեներատորի ուղղորդիչ գոտիների երկարության հաշվարկման եղանակով կառուցված տեսական և փորձնական հետազոտությունների արդյունքները, որոնք ապահովում են ՇԱՓ-ի նորմալ առանց հարվածների և անաղմուկ կառչման աշխատանքը: Ստացված արտահայտությունը կիրառելի է օպտիմալ ՇԱՓ-երի նախագծման ժամանակ.