



С



АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

А. А. АКОПЯН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЧАСТЬ II
КИНЕМАТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ЕРЕВАН

1964

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԵՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԳԵՄԻԱ

ՄԱՐԵԴԱՆՏԱԿԱՆ ԵՎ ՄԻՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆ

Ա. Ա. ՀԱԿՈՐՅԱՆ

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՄԱՍ II

ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԵՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԳԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՁՈՒԹՅՈՒՆ
Ե Ր Ե Վ Ա Ն

1964



Գիրքը նվիրված է կինեմատոկային և լիտվին գրված է վեկաս-
թական ձևով. միաժամանակ բերված են բոլոր կարևոր արդյունքների
կոորդինատային արտաշատայությունները:

I դուխը պարունակում է տեղեկություններ սկսյալ արդյունքն-
աի վեկասթական ֆունկցիաների վերաբերյալ:

II, III և IV դուխերը նվիրված են կեաի կինեմատոկային.
նրանց բովանդակությունը լայնացված է երկու կարևոր վերնամենքով:

Գրքի մնացյալ մասում ուսումնասիրված է կարծր մարմնի կի-
նեմատոկան, սալորական շարադրանքը հնչացված է մի վերնամե-
այն մասին, որ տեսանման փոքր անկյունները կարելի է զուտարեյ
որդես վեկասթաներ: Մյուս յուրաճատկությունները բխում են հետևյալ
վերնամեք. կարծր մարմնի յուրաբանչյալ տեղափոխման զեալում
նրա բոլոր հաստիմների փոփոխությունները կողջանար են:

Վերջին դուխը նվիրված է կարծր մարմնի վերջավոր տեղափո-
խումների տեսությունը:

Ն Ա Խ Ա Բ Ա Ն

Այս գրքում կենեմատիկան շարադրված է հիմնականում որպես զինամեխանիկայի ներածություն: Միայն վերջին պիտու գիտարկվում է զինամեխանիկայի համար գրեթե հետաքրքրության չներկայացնող վերջավոր տեղափոխումների տեսությունը:

Շարադրումը ամբողջապես վեկտորական է, բայց բերված են բոլոր կարևոր առնչությունների կորդինատային արտահայտությունները:

Ենթադրվում է, որ ընթերցողը ծանոթ է վեկտորական հանրահաշիվի հետ: Մի սկալար արդյունքների վեկտորական ֆունկցիաների տեսությունը անհրաժեշտ չափով տրված է I գլխում, իսկ վեկտորական գիֆերենցիալ համասարտման ինտեգրումներ վերաբերող մի քանի կարևոր տեղեկությունները դրվում են §-4, 9-ում:

Կետի կենեմատիկային նվիրված են I I—I V գլխերը:

Ուսումնական բնույթի գրքերում սովորաբար պարունակվող նյութը ալյատեղ քննարկված է փոքր-ինչ ավելի մանրամասնորեն և լրացված է երկու դրույթով, այն է՝

A. արտածված և լայնորեն օգտագործված է

$$\frac{d\bar{v}^2}{2} = \bar{\omega} \cdot d\bar{r}$$

թեորեմը (որտեղ $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ և $d\bar{r}$ -ը կետի արագությունը, արագացումը և տարրական տեղափոխումն են):

Այս թեորեմը համարժեք է զինամեխանիկայի կենդանի ուժերի թեորեմին, սակայն՝ միանգամայն անկախ զինամեխանիկայի դրույթներից այն ալյատեղ ստացված է վեկտորների գիֆերենցիալ կանոններից, տե՛ս § 1, 6, 5°, բանաձև (1, 6, 12): (Եման առնչու-

իշխանականության արագության, անկյունային արագացման և տարրական պատման միջև արտաբերված է V դիտում)։

B. Պարզ ձևով ապացուցված է J. G. Winans-ի թևերումը (American Journal of Physics, vol 29, № 9, sept. 1961)

$$\overline{\omega \times s} = \overline{\omega} \times \overline{s}$$

(այստեղ $\overline{\omega}$, $\overline{s}$ -ն սկզբնական և վերջնական արագության վեկտորներն են, $\overline{\omega \times s}$ -ն հաստատուն արագացումը, $\overline{s}$ -ը տեղափոխումը)։

Այս թևերումը շատ հեշտացնում է հաստատուն արագացումով կատարվող կետի շարժման լրիվ ուսումնասիրումը։

Կարծր մարմնի կրենկատիկայում շատ օգտակար հանդիսացան հետևյալ երկու դրույթները՝

C. Անսահման փոքր անկյունները կարելի է դիտարկել որպես վեկտորներ (թևերումի լրիվ բովանդակությունը տես § 4.3, [4—F])։

D. Կարծր մարմնի կամայական տեղափոխման դեպքում մարմնի հաստատուն փոփոխությունները կապահանար են։

(Թևերումի լրիվ բովանդակությունը տես [7—G], [9—F])։

Օրինակ, մի քանի առանցքների շուրջը պատվող կարծր մարմնի համար C թևերումից անմիջապես բխում է—անկախ առանցքների ուղղություններից և դասավորություններից—անկյունական արագությունների գումարման թևերումը։ Իսկ D թևերումը մի քանի պարզ ապացույցների (օրինակ անշարժ կետ ունեցող կարծր մարմնի շարժմանը վերաբերող թևերումը) հիմք է ծառայում։

Թևերումն այն մասին, որ ամենաընդհանուր դեպքում մարմնի շարժումը լուրջաքանչյուր մոմենտ վերածվում է ակնթարթական պատույթական և ակնթարթային համընթաց շարժումների համախմբի, ստացված է ոչ թե մարմնի վերջավոր կամայական տեղափոխման դիտարկումից, այլ բխում է անմիջապես կարծր հաստատուն փոփոխության արագության արտահայտությունից։

Դիրքը պարունակում է շատ խնդիրներ, որոնց լուծումը, անշուշտ, կոմանդակի տեսություն լավ ըմբռնմանը։ Ի. Վ. Մեշչերսկոյ լադարեն տարածված խնդրագրքի և մյուս աղբյուրի ժողովածուների (որոնցից նորագույնն է М. И. Гать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон: Теоретическая механика в примерах и задачах, том I, 1961) խնդիրները զերազանցորեն կրում են կիրառական բնույթ, արդ պատճառով այս գրքում բերված խնդիրները հիմնականում տեսական բնույթի են։

ննդիրների միայն մի մասն է կազմված իմ կողմից, մյուս մասը վերցված է հետևյալ աղբյուրներից՝

Г. Ламб, Теоретическая механика, том второй, 1935.

L. A. Pars, Introduction to Dynamics, Cambridge University Press, 1953.

H. Beghin et G. Julia, Exercices de mécanique, tome I, Paris, Gauthier Villars.

Ինչ վերաբերում է տեսությունը, անհրաժեշտ եմ համարում նշել, որ § 4, 13-ում հետագծի որոշման հիմնական դադափարը պատկանում է Ռ. Համիլտոնին (R. Hamilton), իսկ § 4, 10-ի զիջերենցիալ հավասարման ինտեգրման գաղափարը Միլնին է (E. A. Milne, Vectorial Mechanics, London, Methuen et Co, 1948): A, C, D թեորեմներն ինձ ոչ մի տեղ չեն հանդիպել:

Գրքում եղած մի քանի կրկնողություններ նյութի գաստփորման հետևանք են: Արդ կրկնողությունները կվերացվեն, եթե հարթ շարժման տեսությունը դիտարկվել հարաբերական շարժման տեսությունից հետո, և վերջավոր անդափոխությունների տեսությունը շառանձնացվել առանձին գլխում:

Վերջավոր անդափոխումներին վերաբերող գլուխը անշատված է մյուս ամբողջ նյութից, որովհետև արդ անդափոխումները անմիջական կապ չունեն դինամիկայի հետ: Իսկ հարթ շարժման տեսությունը հարաբերական շարժման տեսությունից առաջ շարադրելը անխնդիր պահանջ է, որը ես նպատակահարմար դաս չխախտել:

Գրքի վրա աշխատելիս լայն հնարավորություն եմ ունեցել մի շարք հարցեր քննարկել տեխնիկական գիտությունների թեկնածուներ Վ. Մ. Իվանյանի և Գ. Պ. Գլանշյանի հետ: Վերջինս արել է հստակ օգտակար ցուցումներ զիրքը խմբագրելու ընթացքում: Պրոֆեսոր-գոկտոր Թ. Թ. Խաչատրյանը կազմակերպել է զրքի ձևադրի քննարկումը Երևանի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի տնտեսական մեխանիկայի ամբիոնի նիստում:

Արդ բոլորի համար խորտակեա շնորհակալ եմ վերահիշյալ անձնավորություններից:

ՄԻ ՔԱՆԻ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Վեկտորները նշանակված են մեկ կամ երկու տառերով՝ որոնց վրա գրվում է գծիկ (օրինակ՝ $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{AB}$)։ Երկու տառերի գեպքում առաջին տառը ցույց է տալիս վեկտորի սկիզբը, իսկ երկրորդը՝ վեկտորի վերջը։ Վեկտորի չափը նշանակված է նույն տառերով՝ առանց գծիկի (r , a , AB) կամ մի քանի բացառիկ դեպքերում նշանակված է՝ $|\vec{a}|$, $|\vec{r}|$, $|\vec{AB}|$ ։

Միավոր վեկտորների դեպքում գծիկը փոխարինված է «դր-խարկով» ($\vec{r}$, $\vec{a}$, ..., $|\vec{r}| = 1$, $|\vec{a}| = 1$) և այսպիսով $\vec{r} = \vec{r}r$, $\vec{a} = \vec{a}a$, ... Վեկտորի թվական տրմեքը նշանակելու համար օգտագործված է՝ $\sim$ նշանը ($\vec{r}$, $\vec{a}$, ... $\vec{r}$, $\vec{a}$ վեկտորների թվական տրմեքներն են)։ Երբ թվարկմացություն չի կարող տառջանալ, թվական տրմեքը նշանակված է այնպես, ինչպես չափը (r , a , ...)։

Գծադրերի վրա՝ այն դեպքերում, երբ վեկտորը նշանակված է մեկ տառով, ալը վեկտորը տալված է հաստ, իսկ երկու տառերով նշված վեկտորների դեպքում տառերի վերևում գրված է գծիկ։

Երկու վեկտորներ ունեն նույն ուղղությունը, եթե նրանք դադաճու են։ Ալը վեկտորների համադրուղանեություն դեպքում նրանք ունեն միևնույն ուղղվածությունը (օրինակապես), իսկ հակադրուղանեություն դեպքում նրանք կունենան նույն ուղղությունը և հակադիր ուղղվածություններ։

ՍԿԱԼԱՐ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏԻ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՖՈՆԿԿԻԱՆԵՐ

§ 1, I. Մի սկալար արգումենտի վեկտորական ֆունկցիաները
և նրանց հոգսգրաֆները

1°. Եթե սկալար t արգումենտի լուրացանշյուր արժեքին համապատասխանում է r վեկտորի որոշակի չափ, ուղղություն և օրիննտացիա, $\vec{r}$ -ը կոչվում է սկալար t արգումենտի վեկտորական ֆունկցիա:

Մենք հոգսագործենք հետևյալ նշանակումը՝

$$\vec{r} = \vec{r}(t);$$

Ահա ախարի ֆունկցիաների օրինակներ.

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t,$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t^2,$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2,$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \cos t + \vec{c} \sin t.$$

Այստեղ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են, իսկ t նշանակում է մի կամարտիան սկալար մեծություն՝ ժամանակ, անկյուն, որևէ կորի աղեղի երկարություն, կամայական վերացական թիվ և այլն:

Բերված սահմանումից հետևում է, որ սկալար արգումենտի արժեքով որոշում են վեկտորի չափը, ուղղությունը և օրիննտացիան (ուղղվածությունը). իսկ ռադիանսի զիծը՝ ու վեկտորի սկիզբը մնում են անորոշ, այսինքն կարող են ընտրվել ըստ մեր հալցողության:

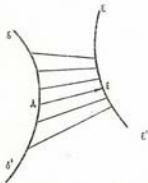
Նշանակում է վեկտորական ֆունկցիայի բերված սահմանումը վերաբերում է բոլոր տեսակ վեկտորներին՝ ազատ, սահող և կապված:

2°. Դիցուք տրված է $\vec{r} = \vec{r}(t)$ վեկտորական ֆունկցիան: Լինդրանք, որ արգումենտի տարբեր՝ $t_1, t_2, t_3, \dots$ արժեքներին համապատասխանող $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots$ վեկտորներն ունեն միևնույն սկիզբը: Այդ պայմանում t -ի անընդհատ փոփոխման դեպքում $\vec{r}$ -ի ծալրը կդնի մի զիծ, որը կոչվում է վեկտորի (վեկտորական ֆունկցիայի) հոդոգրաֆի (նկ. 1—1):

Պատկերացնենք, օրինակ, որ D կետը շարժվում է γ -ի կորով, իսկ E կետը — α -ի կորով (նկ. 1—2ա). $\overline{D_1E_1} = \vec{r}_1, \overline{D_2E_2} = \vec{r}_2, \dots$: Այս դեպքում $\vec{r} = \overline{DE}$ վեկտորի հոդոգրաֆը կլինի γ -ի կորը (նկ. 1—2բ):



Նկ. 1—1



Նկ. 1—2ա



Նկ. 1—2բ



Նկ. 1—3

Ծանոթանանք հոդոգրաֆի մի քանի հատկություններին, որոնք կարևոր են հետագայի համար:

ա) Դիցուք O -կետը $\vec{r} = \vec{r}(t)$ վեկտորների ընդհանուր սկիզբն է, իսկ A և B -ն հոդոգրաֆի այն կետերն են, որոնք համապատասխանում են սկալար արգումենտի t_1 և $t_1 + \Delta t$ արժեքներին (նկ. 1—3):

$$\overline{OA} = \overline{r}(t_1), \quad \overline{OB} = \overline{r}(t_1 + \Delta t);$$

Հոդոգրաֆի լարը

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{r}(t_1 + \Delta t) - \overline{r}(t_1)$$

հաջորդական վեկտորական ֆունկցիայի աճին, որ առաջացել է շնորհիվ սկալար արգումենտի Δt աճի, — t_1 արժեքից մինչև $t_1 + \Delta t$ արժեքը: Այս փոփոխությունը միանշանակն անկախ է O կետի ընտրությունից (նկ. 1—3):

Քանի որ հոդոգրաֆի վրա t -ն չի նշանակում, Δt -ի չափը և նշանը անհայտ են, հետևապես անհայտ են նաև $\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$ -ի չափը և

ուղղվածությունը՝ $\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$ -ն կարող է լինել ուղղված A -ից դեպի B կամ B -ից դեպի A :

բ) Եթե $\overline{a} = \overline{CO} = \text{const}$, իսկ $\overline{r} = \overline{a} + \overline{r}$, $\overline{r} = \overline{r}(t)$, ապա նաև $\overline{\rho} = \overline{\rho}(t)$, այստեղ C -ն հանդիսանում է $\overline{\rho}$ վեկտորների ընդհանուր սկիզբը, O -ն՝ $\overline{r}$ վեկտորների ընդհանուր սկիզբը և, պարզ է, որ $\overline{\rho}$ -ի և $\overline{r}$ -ի ծայրերը համընկնում են (նկ. 1—4):

Հետևապես՝

վեկտորական երկու ֆունկցիաներ՝

$$\overline{r} = \overline{r}(t), \quad \overline{\rho} = \overline{\rho}(t) = \overline{r} + \overline{a}, \quad (1.1.1.)$$

որոնք տարրերվում են $\overline{a}$ հաստատուն վեկտորով, անեն միեմույն հոդոգրաֆը:

Այս դրալից ակնհայտորեն հետևում է, որ սկալար արգումենտի միեմույն Δt աճին համապատասխանում են $(1, 1, 1)$ երկու վեկտորական ֆունկցիաների $\Delta \overline{r}$ և $\Delta \overline{\rho}$ հավասար աճեր:

գ) Դիցուք $\overline{r}$ -ը սկալար է արգումենտի վեկտորական ֆունկցիա է՝ $\overline{r} = \overline{r}(t)$, իսկ t -ն՝ իր հերթին հանդիսանում է ֆունկցիա մի այլ φ սկալար արգումենտի

$$t = t(\varphi):$$

Այսպիսով

$$\overline{r} = \overline{r}(t) = \overline{r}[t(\varphi)] = \overline{r}(\varphi),$$

այսինքն կարելի է $\overline{r}$ -ը դիտել նաև որպես φ -ի ֆունկցիա:

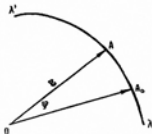
$\overline{r}$ վեկտորը, որը դիտվում է թե որպես t արգումենտի վեկտոր

բական ֆունկցիա և թե որպես ֆունկցիա φ արգումենտի, պետք է ունենա միևնույն հոդոգրաֆը:

Օրինակ, ենթադրենք A կետը շարժվում է $\lambda\lambda'$ կորով (նկ. 1—5). Օ-ն մի անշարժ կետ է: $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ վեկտորը կարելի է գիտել թե որպես ժամանակի ֆունկցիա, և թե որպես A_0OA անկյան ֆունկցիա, որտեղ A_0 -ն կետի սկզբնական դիրքն է:



Նկ. 1—4



Նկ. 1—5

Նշանակելով t -ով ժամանակը, իսկ φ -ով A_0OA անկյունը, ունենք

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r} = \vec{r}(\varphi):$$

Այս էրկու ֆունկցիաների հոդոգրաֆներն էլ նույն $\lambda\lambda'$ գիծն է, որով շարժվում է A կետը:

§ 1, 2. Սկալար արգումենտի մի քանի վեկտորական ֆունկցիաների հոդոգրաֆները

1°. Դիտենք $\vec{b}$ վեկտորին դուգահեռ $\lambda\lambda'$ ուղիղը (նկ. 1—6ա): Թող Օ-ն լինի շառավիղ վեկտորների սկիզբը, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ $\lambda\lambda'$ ուղղի A կետի շառավիղ վեկտորը, իսկ $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ $\lambda\lambda'$ -ի ընթացիկ B կետի շառավիղ վեկտորը (նկ. 1—6ա):

Պարզ է, որ $\overrightarrow{AB} = \vec{r} - \vec{a}$. մյուս կողմից $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{b}$ և այդ պատճառով $\overrightarrow{AB} = \vec{b}t$, որտեղ t -ն համապատասխանորեն ընտրված թիվ է: t -ն փոփոխելով $-\infty$ -ից մինչև $+\infty$, կստանանք $\lambda\lambda'$ ուղղի բոլոր կետերը:

Այսպիսով, ըստ սահմանման

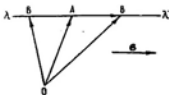
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t \quad (1, 2, 1)$$

վեկտորական ֆունկցիայի հոդոգրաֆը $\lambda\lambda'$ ուղիղն է:

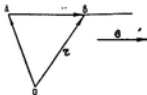
Գտնենք

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t^2 \quad (1.2.2)$$

Ֆունկցիայի հոդոգրաֆը ($\vec{a}$ և $\vec{b}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են) (նկ. 1-6ր):



Նկ. 1-6ա



Նկ. 1-6բ

Նկատենք, որ (1, 2, 1) ֆունկցիայում t -ն կարող է լինել թե դրական և թե բացասական. հետևապես B կետը կարող է դասավորվել A կետից և դեպի աջ, և դեպի ձախ: Իսկ (1, 2, 2) ֆունկցիայում t^2 միշտ դրական է և այդ պատճառով ընթացիկ B կետը կարող է գտնվել A կետից ալս, կամ A -ից ձախ (նկատենք, որ B -ն դասավորվում է A -ից դեպի աջ): Հետևապես $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t^2$ ֆունկցիայի հոդոգրաֆը կիսաաղիղ է, որը սկսվում է A կետից և ուղղված է աջակն, որ բոլոր $\overline{AB}$ լարերը լինեն համադուգահեռ $\vec{b}$ -ին:

2°. Այժմ անցնենք

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} \quad (1.2.3)$$

վեկտորական ֆունկցիային: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից մեկը զրո լինի ($\vec{a} = 0$ կամ $\vec{b} = 0$) (1, 2, 3)-ը կվերածվեր

$$\vec{r} = \vec{b}t + \vec{c} \quad \text{կամ} \quad \vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{c}$$

ֆունկցիայի. այսինքն (1, 2, 3)-ի հոդոգրաֆը (ըստ § 1. 2. 1-ի) կլինի ուղիղ կամ կիսաաղիղ:

Դժգուր չէ նաև համոզվել, որ այն դեպքում, երբ

$$\vec{b} \parallel \vec{a}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = 0,$$

(1, 2, 3)-ի հոդոգրաֆը կլինի կիսաաղիղ (տես խնդիր 1, § 1, 2):

Այսպիսով (1, 2, 3) ֆունկցիայի հոդոգրաֆի կորագիծ լինելու համար անհրաժեշտ են

$$\bar{a} \neq 0, \quad \bar{b} \neq 0, \quad \bar{a} \times \bar{b} \neq 0 \quad (1, 2, 4)$$

պայմանները, որոնք միասին համարվել են մի պայմանի

$$\bar{a} \times \bar{b} \neq 0 \quad (1, 2, 4')$$

Յույց տանք, որ (1, 2, 4) պայմանների առկայության դեպքում (1, 2, 3) ֆունկցիայի հոդոգրաֆը պարարու է, որի սիմետրիայի առանցքը զուգահեռ է $\bar{a}$ -ին:

Դրանում համոզվելու համար կարելի է $\bar{r}$ -ը վերլուծել ըստ կոորդինատային առանցքների. բայց մենք կվարվենք այլ կերպ՝ յույց կտանք, որ (1, 2, 3)-ը արտահայտում է այն հատկությունը, որն ընդունվում է որպես պարարուի սահմանում:

Նկատի առնելով, որ համաձայն § 1, 1, 2^o բ-ի $\bar{r}$ և $\bar{r} - \bar{c}$ ֆունկցիաների հոդոգրաֆները նույնն են, կարող ենք համարել $\bar{c} = 0$ և գիտել

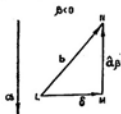
$$\bar{r} = \bar{a}t^2 + \bar{b}t \quad (1, 2, 5)$$

ֆունկցիան:

$\bar{r}$ -ի պրոեկցիան $\bar{a}$ -ի ուղղության վրա անվանենք x . ըստ (1, 2, 5)-ի

$$x = \bar{r} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{a}t^2 + \bar{b} \cdot \bar{a}t$$

կամ նշանակելով $\bar{b} \cdot \bar{a} = \beta$ (տես. նկ. 1—7ա) և նկատի առնելով, որ



կուենենանք

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a$$

$$\left. \begin{aligned} x &= at^2 + \beta t \\ \frac{dx}{dt} &= 2at + \beta \end{aligned} \right\} \quad (1, 2, 6)$$

նկ. 1—7ա

Հոդոգրաֆի այն կետը, որում x -ը հասնում է էքստրեմումի, անվանենք դադարի և նշանակենք S (նկ. 1—7բ). S -ին վերաբերող մեծությունները նշենք S խնդիրսով:

Պարզ է, որ x -ը հասնում է էքստրեմումի, երբ

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

$$t_s = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{\bar{b} \cdot \hat{a}}{2a} \quad (1, 2, 7)$$

Փոխարինենք t -ն նոր՝ արգումենտով

$$\tau = t - t_s = t + \frac{\beta}{2a} \quad (1, 2, 8)$$

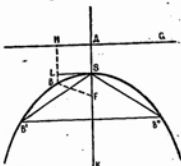
Անհերև է, որ

$$\tau_s = t_s - t_s = 0,$$

$$t = \tau - \frac{\beta}{2a} \quad (1, 2, 9)$$

Այսպիսով

$$\bar{r} = \bar{a} \left(\tau - \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \bar{b} \left(\tau - \frac{\beta}{2a} \right);$$



Նկ. 1-7բ

Բաց անելով փակագծերը, ըստ (1, 1, 1)-ի անտեսելով զու-
մարեկի հանդիսացող բոլոր հաստատուն զեկտորները, կստանանք

$$\bar{r} = \bar{a}\tau^2 + \left(\bar{b} - \frac{\bar{a}\beta}{a} \right)\tau;$$

$$\text{Քանի որ } \frac{\bar{a}}{a} = \hat{a}, \quad \beta = \bar{b} \cdot \hat{a},$$

$$\text{իսկ } \bar{b} - \frac{\bar{a}\beta}{a} = \bar{b} - \hat{a}\beta = \bar{b} - \hat{a}(\bar{b} \cdot \hat{a}) = \hat{a} \times (\bar{b} \times \hat{a}),$$

այսպես, նշանակելով $\hat{a} \times (\bar{b} \times \hat{a}) = \bar{\delta}$, (Նկ. 1-7ա-ում $\bar{\delta} = \overline{LM}$) վերջ-
նականորեն ստանում ենք

$$\bar{r} = \bar{a}\tau^2 + \bar{\delta}\tau \quad (1, 2, 10)$$

ընդ որում $\bar{\delta} = \hat{a} \times (\bar{b} \times \hat{a})$, հետևապես

$$\bar{\delta} \perp \hat{a}, \quad \bar{\delta} \cdot \hat{a} = 0; \quad (1, 2, 11)$$

Հետաքրքիր է համեմատել (1, 2, 5)-ը (1, 2, 10)-ի հետ.
(1, 2, 5)-ում $a\hat{t}^2$ և $b\hat{t}$ գումարելիների միջև անկյունը ընդհանուր
առմամբ տարբերվում է $\frac{\pi}{2}$ -ից, իսկ (1, 2, 10)-ում $\bar{a}\tau^2$ գումարե-
լին (ըստ (1, 2, 11)-ի) ուղղահայաց է $\bar{\delta}\tau$ -ին:

3. Տանենք $\bar{a}$ -ին զուգահեռ DSK ուղիղը: Ինչպես առկա է τ -ի զրո արժեքին համապատասխանում է հոդոգրաֆի S կետը: Թող արգումենտի τ' , τ'' արժեքներին համապատասխանեն հոդոգրաֆի B' և B'' կետերը:

Այսպիսով արգումենտի աներին 0 -ից մինչև τ' և 0 -ից մինչև τ'' համապատասխանեն հոդոգրաֆի $\overline{SB'}$ և $\overline{SB''}$ լարերը. բնդունելով $\tau'' = -\tau'$, կունենանք $\bar{a}\tau'^2 = \bar{a}\tau''^2$.

Հետևապես $\overline{SB''} - \overline{SB'} = \overline{B'B''} = (\bar{a}\tau''^2 \pm \bar{\gamma}\tau'') - (\bar{a}\tau'^2 \pm \bar{\gamma}\tau') = \pm \bar{\gamma}(\tau'' - \tau') = 2\bar{\gamma}\tau''$.

Համաձայն (1, 2, 11)-ի $\overline{B'B''} \perp \bar{a}$:

Արգումենտի τ' արժեքը ընդունված է կամադականորեն. ուստի ստացված արդյունքը նշանակում է, որ արգումենտի լուրջաքանչյուր զույգ արժեքներին ($\tau'' = -\tau'$) համապատասխանում է մի $\overline{B'B''}$ լար, որն ուղղահայաց է $\bar{a}$ -ին և կիսվում է SK ուղղով. հետևապես $\overline{SK}$ -ն հանդիսանում է հոդոգրաֆի սիմետրիալի առանցք: 4°. Փորձենք պատասխանել նաև մի հարցի.

Կան արդյոք աֆոդիսի F կետ և HOG ուղիղ, որոնք բաժանարարեն հետևյալ 3 պայմաններին.

1. F կետը գտնվի սիմետրիալի SK առանցքի վրա. ընդ որում $\overline{SF} = \overset{\Delta}{\lambda\bar{a}}$, λ — գրական սկալար գործակից է:

2. HOG ուղիղը զուգահեռ լինի $\bar{\gamma}$ -ին ($HOG \parallel \bar{\gamma}$) և գտնվի $(-\overset{\Delta}{\lambda\bar{a}})$ հեռավորության վրա S -ից:

3. Հոդոգրաֆի լուրջաքանչյուր B կետը բաժանարարի

$$BF = BH \quad (1, 2, 12)$$

հավասարությանը, որում $\overline{BH} \parallel \bar{a}$:

(1, 2, 12)-ը համարվեք է

$$(\overline{BF})^2 = (\overline{BH})^2 \quad (1, 2, 13)$$

հավասարությանը: Որովհետև

$$\overline{FB} = \overline{SB} - \overline{SF} = \bar{a}\tau^2 + \bar{\gamma}\tau - \overset{\Delta}{\lambda\bar{a}} = \bar{a}(\tau^2 - \lambda) + \bar{\gamma}\tau,$$

$$\overline{HB} = \overline{HL} + \overline{LB} = \overset{\Delta}{\lambda\bar{a}} + \bar{a}\tau^2 = \bar{a}(\lambda + \tau^2),$$

այսինքն, նկատի առնելով (1, 2, 11)-ը, և այն, որ $\overset{\Delta}{\lambda\bar{a}^2} = 1$ կարող ենք (1, 2, 13)-ը արտագրել այսպես.

$$(a\tau^2 - \lambda)^2 + 3^2\tau^2 = (\lambda + a\tau^2)^2$$

կամ

$$3^2\tau^2 = 4\lambda a\tau^2.$$

արտեղից

$$\lambda = \frac{3^2}{4a},$$

(1, 2, 14)

իսկ ըստ (1, 2, 11)-ի $\lambda = \frac{(\bar{b} \times \bar{a})^2}{4a},$

Մենք տեսնում ենք, որ $\bar{r}$ կետը և HDG ուղիղը գոյություն
կունենան, եթե λ սկալար գործակցին վերագրենք (1, 2, 14)
արժեքը:

Ինչպես հալտնի է (1, 2, 12) կամ (1, 2, 13) պայմանը

$$(BF)^2 = (BF)^2$$

գիտվում է որպես պարարտի սահմանում:

Հետևապես (1, 2, 10) և (1, 2, 3) վեկտորական ֆունկցիո-
նների հոդադրաֆը պարարտ է. այդ պարարտի ֆոկուսը (F) և դի-
րեկտրիսը (HDG) լիովին որոշվում են $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորներով (այս-
պիսով պարարտը կախում չունի սկալար (t կամ τ) արգումենտի
ընտրությունից. այդ համընկնում է § 1, 1, 2^o գ-ի հետ):

(1, 2, 3) ֆունկցիայի ուսումնասիրման ընթացքում ստացված
առնչություններից մի քանիսը լախորեն կիրառվում են թե կինե-
մատիկայում և թե դինամիկայում:

Խնդիրներ.

1. Ապացուցել, որ $\bar{b} \parallel \bar{a}$ դեպքում (1, 2, 3) ֆունկցիայի հո-
դադրաֆը կիսաուղիղ է.

Եռյցմունք. կարելի է $\bar{b}$ -ն արտահայտել $\bar{a}$ -ի միջոցով և $\bar{a}$ -ի
գործակցիցը (1, 2, 3)-ում լրացնել մինչև լրիվ քառակուսու:

2. Ներկայացնելով $\bar{r} = \bar{a}t^2 + \bar{b}t + \bar{c}$ ֆունկցիան, որպես

$$\bar{r} = (\bar{c} + \bar{a}t^2) + \bar{b}t = \bar{\rho} + \bar{b}t,$$

ցույց տալ, որ (1, 2, 3)-ով պատկերացվող պարարտում $(\bar{c} + \bar{a}t^2)$
կիսաուղիղը հանդիսանում է $\bar{b}$ -ին զուգահեռ լարերի արամագիծ:

Պարզել $\frac{b^2}{a}$ հարաբերության երկրաչափական իմաստը:



3. Տրված են $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$, $\vec{r}' = \vec{a}'t^2 + \vec{b}'t + \vec{c}'$ վեկտորական ֆունկցիաները, ընդ որում $\vec{a} \neq \vec{a}'$, $\vec{b} \neq \vec{b}'$:

Ինչ պարամետրերի պետք է բաժարարեն $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ վեկտորները, որպեսզի $\vec{r}$ և $\vec{r}'$ վեկտորների հոդոգրաֆները լինեն համաանդելի պարաբոլներ:

Ինչով կտարբերվեն այդ պարաբոլները, եթե

1. $\vec{a}' = k\vec{a}, \quad \vec{b}' = k\vec{b},$
 2. $\vec{a}' = \vec{a}, \quad \vec{b}' = k\vec{b},$
 3. $\vec{a}' = k\vec{a}, \quad \vec{b}' = \vec{b},$
- ($k = \text{const.}$)

§ 1, 3. $\vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$ գումարի հոդոգրաֆը

1°. Որոշենք

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t \\ \vec{a} &= \text{const}, \quad \vec{b} = \text{const}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1, 3, 1)$$

վեկտորական ֆունկցիայի հոդոգրաֆը:

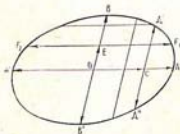
Կամայական O կետից տանենք

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad (-\vec{a}) = \overrightarrow{OA'}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad (-\vec{b}) = \overrightarrow{OB'}$$

վեկտորները (նկ. 1-Տա, 1-Տբ) և նրանցով անցնող հարթությունը՝ P :



Նկ. 1-Տա



Նկ. 1-Տբ

Դժվար չէ պարզել (1, 3, 1) ֆունկցիայի հոդոգրաֆի համաթվունները և մասնավորապես ցույց տալ, որ այդ հոդոգրաֆը P -ի վրա գտնվող մի փակ կոր է:

Մեծացնելով t -ն 0 -ից մինչև π , գիտենք D' և D'' կետերը, որոնք համապատասխանում են արգումենտի t' և $t'' = -t'$ արժեքներին:

Շնորհիվ այն հանգամանքի, որ

$$\cos t'' = \cos(-t') = \cos t, \quad \sin t'' = \sin(-t') = -\sin t,$$

կարող ենք նշանակել (նկ. 1-ՏԲ)

$$\bar{a} \cos t' = \bar{a} \cos t'' = \overline{OC}, \quad \bar{b} \sin t = \overline{CD'}, \quad \bar{b} \sin t'' = \overline{CD''}.$$

արդյույիսով

$$\overline{OD'} = \overline{OC} + \overline{CD'}, \quad \overline{OD''} = \overline{OC} + \overline{CD''},$$

Տեսնում ենք, որ D' , D'' կետերը պատկանում են $\bar{b}$ -ին զուգահեռ $D'CD''$ լարին, որը C կետում կիսվում է $A'OA$ ուղղով:

Այդ նույնը վերաբերում է հոլոգրաֆի բոլոր լարերին, որոնք զուգահեռ են $\bar{b}$ -ին:

Դիտենք t -ի երկու արժեքներ՝

$$t_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

որտեղ α -ի արժեքները 0 -ի և $\frac{\pi}{2}$ -ի սահմաններում են:

Այժմ

$$\sin t_2 = \sin t_1, \quad \cos t_2 = -\cos t_1$$

և (նկ. 1-ՏԲ)

$$\bar{b} \sin t_2 = \bar{b} \sin t_1 = \overline{OE}, \quad \bar{a} \cos t_1 = \overline{EF_1}, \quad \bar{a} \cos t_2 = \overline{EF_2} = -\overline{EF_1},$$

Հետևապես F_1 և F_2 կետերը ընկած են F_1EF_2 լարի վրա, որը կիսվում է E կետում $B'OB$ ուղղով: Նույնը ճիշտ է $\bar{a}$ -ին զուգահեռ բոլոր լարերի համար:

Ասածից եզրակացնում ենք, որ $A'OA$ ուղիղը հանդիսանում է $\bar{b}$ -ին զուգահեռ լարերի տրամագիծ, իսկ $B'OB$ ուղիղը՝ $\bar{a}$ -ին զուգահեռ լարերի տրամագիծ:

Սրան ավելացնելով այն, որ $\bar{a} \cos t + \bar{b} \sin t$ գումարը միշտ վերջավոր է, իսկ t և $t + 2\pi$ արժեքներին համապատասխանում է նույն r -ը $[\bar{a} \cos t + \bar{b} \sin t = \bar{a} \cos(t + 2\pi) + \bar{b} \sin(t + 2\pi)]$,

տեսնում ենք, որ $(1, 3, 1)$ -ի հոդագրաֆը ունի էլիպսը բնութագրող բոլոր հատկությունները:

Այսպիսով $\vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$ վեկտորական ֆունկցիայի հոդագրաֆը էլիպս է:

Հարկավոր է նշել, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ հաստատուն վեկտորները ենթարկված են միայն մի պայմանի՝ $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$: Այսպիսով, ընդհանուր առմամբ, $(\vec{a}, \vec{b})$ անկյունը տարբերվում է $\frac{\pi}{2}$ -ից:

Բայց համալուծ տրամագծերի միջև կա մի դուրդ ախպիսի տրամագծեր, որոնք ուղղահայաց են միմյանց, այս երկու համալուծ տրամագծերը կոչվում են էլիպսի առանցքներ: Նրանցից մեկը բոլոր տրամագծերից երկարն է, իսկ մյուսը՝ կարճը:

Էլիպսի համալուծ տրամագծեր հանդիսացող $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորներից էլիպսի առանցքներին անցնելու նպատակով հարմար է t արգումենտը փոխարինել մի այլ՝ φ արգումենտով, որը որոշվի

$$\varphi = t - t_0$$

պայմանից, որտեղ t_0 -ն t -ի արժեքն է առանցքներից մեկի և էլիպսի հատման կետում:

Այժմ

$$t = \varphi + t_0$$

$$\vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t = \vec{a} \cos (\varphi + t_0) + \vec{b} \sin (\varphi + t_0),$$

$$\vec{r} = (\vec{a} \cos t_0 + \vec{b} \sin t_0) \cos \varphi + (\vec{b} \cos t_0 - \vec{a} \sin t_0) \sin \varphi: \quad (1, 3, 2)$$

Էլիպսի $(1, 3, 2)$ հավասարման մեջ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ հաստատունների դերը կատարում են, համապատասխանորեն՝

$$\vec{a} \cos t_0 + \vec{b} \sin t_0 \quad \text{և} \quad \vec{b} \cos t_0 - \vec{a} \sin t_0: \quad (1, 3, 3)$$

Միշտ հնարավոր է ախպիս ընտրել t_0 արժեքը, որ $(1, 3, 3)$ -ի երկու վեկտորները ուղղահայաց լինեն մեկը մյուսին: Իսկապես ուղղահայացության թվան պայմանը

$$(\vec{a} \cos t_0 + \vec{b} \sin t_0) \cdot (\vec{b} \cos t_0 - \vec{a} \sin t_0) = 0 \quad (1, 3, 4)$$

կարելի է արտադրել այսպես

$$\vec{a} \cdot \vec{b} (\cos^2 t_0 - \sin^2 t_0) + (b^2 - a^2) \sin t_0 \cos t_0 = 0,$$

իսկ

$$\cos^2 t_0 - \sin^2 t_0 = \cos 2t_0, \quad \sin t_0 \cos t_0 = \frac{1}{2} \sin 2t_0,$$

Այսպիսով (1, 3, 4)-ից բխում է

$$\operatorname{tg} 2t_0 = \frac{2\bar{a} \cdot \bar{b}}{a^2 - b^2}, \quad (1, 3, 5)$$

Հարկավոր է հաշվի առնել, որ

$$\operatorname{tg} (2t_0 + \pi) = \operatorname{tg} 2t_0.$$

Հետևապես, (1, 3, 5)-ին բախարարում են t արգումենտի

$$t_0 \text{ և } t_0 + \frac{\pi}{2}$$

արժեքները: Այդպես էլ պետք է լինի, t_0 համապատասխանում է առանցքներից մեկին, $t_0 + \frac{\pi}{2}$ մյուսին:

Ինչպես վերևում ասված է, էլիպսի առանցքներ հանդիսացող արամագծներից մեկը ամենաերկարն է, մյուսը՝ ամենակարճը: Մենք կհանդես գնենք t_0 -ի (1, 3, 5) արժեքին, որոնելով էքստրեմալ երկարությամբ առանցք երկու արամագծները: Այս ապացույցելու համար հիշենք, որ արգումենտի կամայական t արժեքին համապատասխանում է $2r$ արամագիծը, որտեղ

$$r = \bar{a} \cos t + \bar{b} \sin t.$$

Կազմենք $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$ և նկատի առնենք, որ $(2\vec{r})$ -ի, կամ $(\vec{r})$ -ի էքստրեմալ արժեքի գնացքում

$$\frac{dr^2}{dt} = 0,$$

Այս պահանջից ելնելով, ստանում ենք, որ $(\vec{r})$ -ի էքստրեմալ արժեքին համապատասխանող t_1 արժեքը արտահայտվում է

$$\operatorname{tg} 2t_1 = \frac{2\bar{a} \cdot \bar{b}}{a^2 - b^2}$$

համասարամասի, որը հենց (1, 3, 5)-ն է:

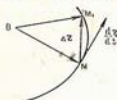
§ 1, 4. Վեկտորական ֆունկցիաների դիֆերենցումը

1. Դիտենք $\vec{r} = \vec{r}(t)$ վեկտորական ֆունկցիան. թող արդումենտի Δt աճին համապատասխանի ֆունկցիայի $\Delta \vec{r}$ տեք:
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)$$
 հարաբերությունն սահմանը, երբ վերջինը գոյություն ունի, կոչվում է վեկտորական ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակվում

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \text{ կամ } \dot{\vec{r}}.$$

Քանի որ t -ն և Δt -ն սկալարներ են, իսկ $\vec{r}$ -ը և $\Delta \vec{r}$ -ը վեկտորներ, ապա $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ հարաբերությունը $\Delta \vec{r}$ -ին զուգահեռ վեկտոր է, որակ $\Delta \vec{r}$ -ը հոդոգրաֆի լարն է, ազդված t -ին համապատասխանող M կետից դեպի $(t + \Delta t)$ -ին համապատասխանող M_1 կետը:

Այդ պատճառով $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ածանցյալը զուգահեռ է հոդոգրաֆի շոշափողին ալն կետում, որը համապատասխանում է արդումենտի t արժեքին (նկ. 1—9):



Նկ. 1—9

Նշանակելով $\dot{\vec{r}}$ -ով շոշափողին զուգահեռ միասյուր վեկտորը, կանոնադր

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \parallel \dot{\vec{r}} \quad (1.4.1)$$

2. Դիցուք $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, ... $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $\vec{b} = \vec{b}(t)$, ... միևնույն t արդումենտի սկալար և վեկտորական ֆունկցիաներ են: Այդ սկալարներից և վեկտորներից կարող են կազմված լինել նոր վեկտորներ (օրինակ $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\alpha (\vec{a} \times \vec{b})$ և նոր սկալարներ (օրինակ $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\beta \vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$, որոնք նույնպես կլինեն t արդումենտի ֆունկցիաներ:

Վեկտորական ֆունկցիայի ածանցյալը, ալսինքն վեկտորական ածանցյալը, լինելով վեկտոր, տարբերվում է սկալար ֆունկ-

* $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ — նշանակված է այդ երեք վեկտորների խառն արտադրյալը, այսինքն $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$:

ցիտելի ածանցյալից, ստեղծելն արևելի ածանցյալների սահմանումները միասնական են

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}, \quad \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (1, 4, 2)$$

Այստեղից հետևում է, որ վեկտորներից կազմված սկալար կամ վեկտորական ֆունկցիաների ածանցյալները ստացվում են առանձին վեկտորներից հենց այն կանոններով, որոնցով ստացվում են սկալարներով կազմված սկալար ֆունկցիաների ածանցյալները:

Այսպիսով, եթե z սկալարը և $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորները հանդիսանում են սկալար t արդյունքների ֆունկցիաներ՝

$$z = z(t), \quad \bar{a} = \bar{a}(t), \quad \bar{b} = \bar{b}(t), \quad \bar{c} = \bar{c}(t),$$

ապա

$$\frac{d(z\bar{a})}{dt} = \frac{dz}{dt} \bar{a} + z \frac{d\bar{a}}{dt}, \quad (1, 4, 3)$$

$$\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}, \quad (1, 4, 4)$$

$$\frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}, \quad (1, 4, 5)$$

$$\frac{d(\bar{a} \bar{b} \bar{c})}{dt} = \left(\frac{d\bar{a}}{dt} \bar{b} \bar{c} \right) + \left(\bar{a} \frac{d\bar{b}}{dt} \bar{c} \right) + \left(\bar{a} \bar{b} \frac{d\bar{c}}{dt} \right), \quad (1, 4, 6)$$

եթե

$$\bar{a} = \bar{a}(z), \quad z = z(t),$$

ապա

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (1, 4, 7)$$

Վերջապես, եթե $\bar{a} = \text{const}$, այսինքն, եթե $\bar{a}$ կախում չունի t -ից,

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = 0, \quad (1, 4, 8)$$

այսպիսով հաստատուն վեկտորի ածանցյալը զրո է.

3°. Ստացված առնչությունների մասին հարկավոր է անել մի քանի դիտողություններ.

ա) (1, 4, 5)-ի և (1, 4, 6)-ի աջ մասերում պետք է պահպանել արտադրիչների ալն կարգը, ինչ որ ձախ մասերում:

Պատճառը պարզ է. վեկտորական արտադրվալի ուղղվածությունը և խառն արտադրվալի նշանը կախված են արտադրիչների հաջորդականությունից:

բ) $\bar{a} = \bar{a}(x)$ և $x = x(t)$ ամենաթվունից հետևում է, որ $\bar{a}$ -ն կարող է զիտվել որպես t -ի ֆունկցիա՝ $\bar{a} = \bar{a}(t)$. (1, 4, 7)-ը սահմանում է կապը

$$\frac{d\bar{a}}{dx}, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d\bar{a}}{dt}$$

ամենցվալների միջև:

Քանի որ $\frac{d\bar{a}}{dt}$ -ն սկալար է, (1, 4, 7)-ի վեկտորական ամենցվալները

$$\frac{d\bar{a}}{dx}, \quad \frac{d\bar{a}}{dt}$$

զուգահեռ են միմյանց, համապատասխան, երբ $\frac{dx}{dt} > 0$, և հակադա-

դահեռ, եթե $\frac{dx}{dt} < 0$:

$$\frac{d\bar{a}}{dx} \text{ և } \frac{d\bar{a}}{dt} \text{ ամենցվալների միմյանց զուգահեռ լինելը հետևում}$$

է նաև հետևյալ երկու դրույթներից.

1. $\bar{a} = \bar{a}(x)$ և $\bar{a} = \bar{a}(t)$ վեկտորական ֆունկցիաներն ունեն միևնույն հոդոգրաֆը.

2. վեկտորական ֆունկցիալի ամենցվալը զուգահեռ է հոդոգրաֆի շոշափողին ալն կետում, որը համապատասխանում է t -ի ընտրված արժեքին.

դ) (1, 4, 3) — (1, 4, 8) բանաձևերը արտածվում են միևնույն եղանակով, ուստի հնարավոր է սահմանափակվել նրանցից մեկ-երկուսի դուրս բերումով: Դիտենք, օրինակ, (1, 4, 3)-ը:

Եթե $x = x(t)$, $\bar{a} = \bar{a}(t)$, ապա արգումենտի անոմը Δt -ով (t -ից մինչև $t + \Delta t$) առաջացնում է $\Delta \bar{a}$ ֆունկցիալի ան՝

$$\Delta(\bar{a}) = (x + \Delta x)(\bar{a} + \Delta \bar{a}) - x\bar{a} =$$

$$= (\Delta x) \bar{a} + x (\Delta \bar{a}) + (\Delta x) (\Delta \bar{a})$$

Արտադրեց

$$\frac{\Delta(x\bar{a})}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \bar{a} + x \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} + \frac{\Delta x \Delta \bar{a}}{\Delta t}$$

Ենթադրենք, որ $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}$ արտաշատությունները ունեն վերջավոր սահմաններ, այդ դեպքում, երբ անցնում ենք սահմանին, վերջին գումարելին ձգտում է դրոշի և ստացվում՝

$$\frac{d(x\bar{a})}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{a} + x \frac{d\bar{a}}{dt}$$

ալիքն (1, 4, 3)-ը:

Դուրս բերենք նաև (1, 4, 5)-ը

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{a} \times \bar{b}) &= (\bar{a} + \Delta \bar{a}) \times (\bar{b} + \Delta \bar{b}) - \bar{a} \times \bar{b} = \\ &= (\Delta \bar{a}) \times \bar{b} + \bar{a} \times (\Delta \bar{b}) + \Delta \bar{a} \times \Delta \bar{b} \end{aligned}$$

Հետևապես

$$\frac{\Delta(\bar{a} \times \bar{b})}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{\Delta \bar{b}}{\Delta t} + \frac{\Delta \bar{a} \times \Delta \bar{b}}{\Delta t}$$

կամ անցնելով սահմանին,

$$\frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}$$

Մենք հանդիպինք (1, 4, 5) առնչությունը:

§ 1, 5. Վեկտորական ֆունկցիաների առաջին կարգի ածանցյալը

1°. Դժուրին վեկտորական ֆունկցիայի ածանցյալը՝

Դիտենք

$$\bar{r} = \bar{a} + \lambda \bar{b} \quad (1, 5, 1)$$

վեկտորական ֆունկցիան, որում $\bar{a} = \text{const}$, $\bar{b} = \text{const}$, իսկ $\lambda = \lambda(t)$ t -ի սկալար ֆունկցիա է.

Համաձայն (1, 4, 8) և (1, 4, 3)-ի

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{b} \frac{d\bar{t}}{dt}, \quad (1, 5, 2)$$

ըստ $(1, 2, 1)$ -ի այս ֆունկցիայի հոդողրաֆը $\bar{b}$ -ին զուգահեռ ուղիղ է. այս պատճառով էլ $(1, 5, 1)$ ֆունկցիան կոչվում է զծային:

Քանի որ վեկտորական ֆունկցիայի ածանցյալը զուգահեռ է հոդողրաֆի շոշափողին, իսկ ներկա զևայքում շոշափողը համընկնում է հոդողրաֆի հետ, ապա նաև առանց $(1, 5, 2)$ -ի կարելի է հաստատել, որ $(1, 5, 1)$ ֆունկցիայի ածանցյալը զուգահեռ է $\bar{b}$ -ին: Բայց $(1, 5, 2)$ -ի բովանդակությամբ ունի լաին է՝ $(1, 5, 2)$ -ով որոշվում է նաև ածանցյալի ուղղվածությունը.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \text{-ն համապատասխան է } \bar{b} \text{-ին, եթե } \frac{d\bar{t}}{dt} > 0,$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \text{-ն հակազուգահեռ է } \bar{b} \text{-ին, եթե } \frac{d\bar{t}}{dt} < 0:$$

2. Վեկտորական ֆունկցիայի քառակուսու ածանցյալը.
Դիցուք

$$\bar{a} = \bar{a}(t).$$

Քանի որ $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$, ընդունելով $(1, 4, 4)$ -ում $\bar{b} = \bar{a}$, կանե-
նանք

$$\frac{d\bar{a}^2}{dt} = \frac{d(\bar{a} \cdot \bar{a})}{dt} = 2\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}, \quad (1, 5, 3)$$

Այլուս կողմից

$$\frac{da^2}{dt} = 2a \frac{da}{dt},$$

Այսպիսով ըստ $(1, 5, 3)$

$$\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = a \frac{da}{dt}, \quad (1, 5, 4)$$

ալիքնքն

$[1 - A]$ վեկտորի և նրա ածանցյալի սկալար արտադրյալը նավասար է վեկտորի չափի և այդ չափի ածանցյալի արտադրյալին:

Կարևոր մասնավոր դեպք է հանդիսանում այն, երբ վեկտորի չափը հաստատուն է: Այդ դեպքում $\frac{da}{dt} = 0$ և $(1, 5, 4)$ -ից հետևում է, որ

$$\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = 0, \quad (1, 5, 5)$$

Սակայն, եթե հաստատուն չափ ունեցող $\bar{a}$ վեկտորը t -ի ֆունկցիա է, ապա t -ի փոփոխման հետ պետք է փոփոխվի և $\bar{a}$ -ի ուղղությունը և $\frac{d\bar{a}}{dt}$ ածանցյալը ընդհանուր առմամբ դրա չէ. ուստի $(1, 5, 5)$ -ից պետք է եզրակացնել, որ

$$\bar{a} \perp \frac{d\bar{a}}{dt}, \quad \text{եթե } a = \text{const} \quad (1, 5, 6)$$

$[1-A']$ Հաստատուն չափ ունեցող վեկտորը և նրա ածանցյալը միմյանց ուղղահայաց են:

Նկատի առնենք, որ $(1, 5, 6)$ -ով չի սրոշվում $\frac{d\bar{a}}{dt}$ ածանցյալի ուղղությունը. $(1, 5, 6)$ -ից միայն հետևում է, որ $\frac{d\bar{a}}{dt}$ -ն դուրս

գաձև է $\bar{a}$ -ին ուղղահայաց հարթությունը:

Այս վերջին արդյունքին կարելի է հանդիպել նաև պարզ դասողությունների միջոցով: Իսկապես, հաստատուն չափի դեպքում $\bar{a}$ վեկտորի հոդոգրաֆը պետք է լինի մի կոր, որը դասավորված է զննչային մակերևույթի վրա: $\frac{d\bar{a}}{dt}$ ածանցյալը, ունենալով հոդոգրաֆի շոշափողի ուղղությունը, պետք է միաժամանակ ուղղահայաց լինի զննչի $\bar{a}$ շառավղին դիտվող կետում:

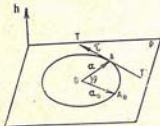
3°. Հաստատուն չափ ունեցող և կամայական հարթությունը դուրսհանալ վեկտորի ածանցյալը:

Դիցուք $\bar{a} = \bar{a}(t)$ վեկտորը, որի չափը հաստատուն է, փոփոխվելով, մնում է դուրսհանալ մի որևէ P հարթությունը: Որպես վեկտորների սկիզբ վերցնենք P հարթության O կետը:

Դանի որ $a = \text{const}$, $\bar{a} \parallel P$, ապա $\bar{a}$ -ի հոդոգրաֆը կլինի P -ի

վրա դասավորված մի շրջանագիծ, որի կենտրոնն է O , իսկ շա-
ռափյգը a :

Դիտենք արգումենտի t_0 և t արժեքները (նկ. 1—10ա), են-
թադրենք, որ t_0 արժեքին համապատասխանում է հոդորաֆի
 A_0 կետը և $\bar{a} = \bar{a}(t_0) = \overline{OA_0}$ վեկտորը, իսկ t արժեքին՝ հոդո-
րաֆի A կետը, $\bar{a} = \bar{a}(t) = \overline{OA}$ վեկտորը և T^*AT շոշափողը:
 A_0OA անկյունը նշանակենք φ , շոշափողի $\dot{\bar{a}}$ միավոր վեկտորը
համարենք ուղղված դեպի այն կողմը, որը համապատասխանում



Նկ. 1—10ա

է φ -ի դրական աճին: Այս նշանա-
կումների դեպքում $\frac{d\bar{a}}{d\varphi}$ ածանցյալը հա-
մադուգահեռ է $\dot{\bar{a}}$ -ին՝

$$\frac{d\bar{a}}{d\varphi} \Big|_{\dot{\bar{a}}}^{\dot{\bar{a}}} \quad (1, 5, 7)$$

Այժմ դժվար չէ գտնել $\frac{d\bar{a}}{d\varphi}$ վեկ-
տորը: Իսկապես, ըստ ածանցյալի սահմանման կարող ենք գրել՝

$$\left| \frac{d\bar{a}}{d\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2a \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = a.$$

(տես նկ. 1—10բ): Համաձայն (1, 5, 7)-ի

$$\frac{d\bar{a}}{d\varphi} = \dot{\bar{a}}, \quad (1, 5, 8)$$

Այստեղից (1, 4, 7)-ի հիման վրա ստանում ենք

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \dot{\bar{a}} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1, 5, 9)$$

(1, 5, 9)-ից հեռում է, որ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} \Big|_{\dot{\bar{a}}}^{\dot{\bar{a}}}, \text{ եթե } \frac{d\varphi}{dt} > 0 \\ \frac{d\bar{a}}{dt} \Big|_{\dot{\bar{a}}}^{\dot{\bar{a}}}, \text{ եթե } \frac{d\varphi}{dt} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (1, 5, 10)$$

$\frac{d\bar{a}}{d\varphi}$ ածանցյալը կարելի է արտահայտել և այլ կերպ՝

Դիտենք P հարթությունը ուղղահայաց մի ալիսիսի $\hat{h}$ միա-
վոր վեկտոր, որ $\hat{h}, \hat{a}, \hat{z}$ վեկտորները կազմեն առ ձևովի հալիսի
և լինի $\hat{h} \times \hat{a} = \hat{z}$, $\hat{z} \times \hat{a} = (\hat{h} \times \hat{a}) \times \hat{a} = \hat{h} \times \hat{a}$ և $(1, 5, 8)$ -ը կընդունի

$$\frac{d\bar{a}}{d\varphi} = \hat{h} \times \bar{a} \quad (1, 5, 11)$$

տեսքը:
Վերջապես $(1, 5, 9)$ և $(1, 5, 11)$ -ից հետևում է, որ անկախ
 $\bar{a}$ -ի արգումենտից (t թև φ)

$$d\bar{a} = (\hat{h} \times \bar{a}) d\varphi \quad (1, 5, 12)$$

Մի անգամ ևս հիշեցնելով, որ $(\hat{h} \times \bar{a}) \perp \bar{a}$, $(\hat{h} \times \bar{a}) \parallel P$ հարթու-
թյանը և $|\hat{h} \times \bar{a}| = a$, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ կարևոր
արդյունքը.

[1—B] Կամայական հարթությամբ զուգահեռ և հաստա-
տուն չափ ունեցող վեկտորի ածանցյալը ըստ φ անկյան, հա-
մարժեք է այդ վեկտորի պատմանը $\frac{\pi}{2}$ (անկյունով) φ անկյան
մեծացման ուղղությամբ:

Դ. Կամայական (P) հարթությունը զուգահեռ վեկտորի
ածանցյալը ընդհանուր դեպքում:

Ի տարբերություն նախորդ դեպքի, ալիսիսի ենթադրվում է,
որ զիտվող վեկտորի չափը փոփոխական է: Կարող ենք $\bar{a}$ -ն ար-
տահայտել միավոր $\hat{a}$ վեկտորի միջոցով

$$\bar{a} = \hat{a} a, \quad \dot{\hat{a}} = \dot{\hat{a}}(t), \quad \dot{a} = \dot{a}(t) \quad (1, 5, 13)$$

Կիրառելով $(1, 4, 3)$ -ը, ստանում ենք

$$\dot{\bar{a}} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \hat{a} \frac{d\dot{\hat{a}}}{dt} + \dot{\hat{a}} \frac{da}{dt} \quad (1, 5, 14)$$

Փանի՝ որ $\bar{a}$ -ն զուգահեռ է P հարթությունը, $\dot{\hat{a}}$ -ն նույնպես
պետք է զուգահեռ լինի P -ին, այնպես որ ըստ $(1, 5, 12)$ -ի

$$\frac{d\dot{\hat{a}}}{dt} = (\hat{h} \times \dot{\hat{a}}) \frac{d\varphi}{dt}$$

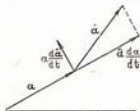
ալիսիսից

$$a \frac{d\dot{\hat{a}}}{dt} = (\hat{h} \times \bar{a}) \frac{d\varphi}{dt}$$

և (1, 5, 14)-ը կարտադրվի առաջին՝

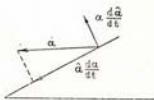
$$\dot{\bar{a}} = \frac{d\bar{a}}{dt} = (\dot{h} \times \bar{a}) \frac{d\varphi}{dt} + \dot{a} \frac{da}{dt} \quad (1, 5, 15)$$

(1, 5, 15)-ում $\frac{da}{dt}$ և $\frac{d\varphi}{dt}$ ամանցյալները կարող են լինել թե դրական և թե բացասական (Նկ. 1—11ա և 1—11բ).



$$\frac{da}{dt} > 0$$

Նկ. 1—11ա



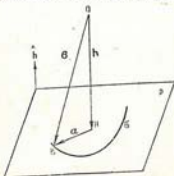
$$\frac{da}{dt} < 0$$

Նկ. 1—11բ

Երբ $\frac{da}{dt} > 0$, ապա $\dot{a} \frac{da}{dt} \parallel \bar{a}$; $\dot{a} \frac{da}{dt} \perp \bar{a}$, եթե $\frac{da}{dt} < 0$.

$(\dot{h} \times \bar{a}) \frac{d\varphi}{dt}$ զուգարկին ուղղահայաց է $\bar{a}$ -ին և զուգահեռ P հարթության:

(1, 5, 15) ամսաթվաւնը տեղի ունի բոլոր այն դեպքերում, երբ վեկտորի հոդոգրաֆը հարթ կոր է (այսինքն նաև այն դեպքում, եթե վեկտորը զուգահեռ չէ որևէ հարթության, իսկ նրա հոդոգրաֆը հարթ կոր է):



Նկ. 1—11գ

Իսկապես, գիցուք $\bar{b} = \bar{b}(t)$ վեկտորի հոդոգրաֆը σ կորն է, որը գտնադրված է P հարթության վրա (Նկ. 1—11գ): Թող $\hat{h}$ լինի P -ի նորմալի միավորը: Վերլուծենք $\bar{b}$ -ն երկու բաղադրիչների՝

$$\overline{OH} \parallel \hat{h} \text{ և } \overline{HB} \perp \hat{h}$$

Նշանակենք $\overline{HB} = \bar{a}$. առաջիկայով

$$\bar{b} = \overline{OH} + \bar{a},$$

որակ $\overline{OH} = \text{const}$ Այդ պատճառով

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{d(\overline{OH} + \bar{a})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt}$$

Այսպես $\bar{a}$ -ն միշտ դասավորված է P հարթության վրա. հետևապես կարելի է պատկեր (1, 5, 15)-ից՝

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = (\hat{h} \times \bar{a}) \frac{d\varphi}{dt} + \hat{a} \frac{da}{dt} \quad (1, 5, 16)$$

(1, 5, 15)-ի մասնավոր դեպքերը՝

$$\hat{a} = \text{const}, \quad \frac{d\bar{a}}{dt} = \hat{a} \frac{da}{dt} \quad (1, 5, 15')$$

$$a = \text{const}, \quad \frac{d\bar{a}}{dt} = (\hat{h} \times \bar{a}) \frac{d\varphi}{dt} \quad (1, 5, 15'')$$

Խնդիր. ապացուցել, որ եթե t արգումենտի բոլոր արժեքներին համար տեղի ունի $\frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{a} = 0$ պայմանը, ապա $\bar{a} = \bar{a}(t)$ վեկտորի ուղղությունը հաստատուն է:
Լ. Ա. Ճ. Ա. Մ. Ըստ (1, 5, 14)-ի լարաքանչյուր վեկտորի համար

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = a \frac{d\hat{a}}{dt} + \hat{a} \frac{da}{dt}$$

հետևապես ամենաընդհանուր դեպքում

$$\frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{a} = a^2 \frac{d\hat{a}}{dt} \times \hat{a} + \frac{da}{dt} (\hat{a} \times \bar{a})$$

Այդ մասի երկրորդ գումարելին զրո է, որովհետեւ $\hat{a} \parallel \bar{a}$, այսպիսով՝

$$\frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{a} = a^2 \frac{d\hat{a}}{dt} \times \hat{a}$$

Ենթադրենք թե $\frac{d\hat{a}}{dt} \neq 0$, այն դեպքում ըստ (1, 5, 6)-ի $\frac{d\hat{a}}{dt} \perp \hat{a}$

և $\frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{a} = a^2 \frac{d\hat{a}}{dt} \times \hat{a} \neq 0$: Ինդհատապես, $\frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{a}$ զրո լինելու համար անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{d\dot{a}}{dt} \times \dot{a} = 0,$$

իսկ այդ հնարավոր է միայն, եթե $\frac{d\dot{a}}{dt} = 0$, այսինքն $\dot{a}$ վերադարձնում է իր սկզբնական արժեքին, այն, ինչ որ հարկավոր է ապացուցել:

§ 1, 6. Երկրորդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալները

1°. Գծային վերադարձնող ֆունկցիայի $\frac{d\bar{a}}{dt}$ ածանցյալը հաստատուն վերադարձնում է: Մնացած այլ գեղերի համար $\frac{d\bar{a}}{dt}$ ածանցյալը հանդիսանում է t արգումենտի ֆունկցիա և կարող է ածանցվել:

$$\frac{d}{dt} \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d^2\bar{a}}{dt^2} = \bar{a},$$

$\bar{a}$ -ը $\bar{a}$ -ի երկրորդ ածանցյալն է ըստ t -ի:

Ընդհանուր դեպքում երկրորդ ածանցյալն էլ լինում է t -ի ֆունկցիա, այս ֆունկցիան ածանցելով կոստանտն երրորդ ածանցյալը՝

$$\frac{d}{dt} \frac{d^2\bar{a}}{dt^2} = \frac{d^3\bar{a}}{dt^3} = \bar{a}$$

և այլն:

Կանգ առնենք երկրորդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալների հետ կապված մի քանի հանդամադրների վրա:

2°. Եթե $\bar{a} = \bar{a}(x)$ և իր հերթին

$$x = x(t) \quad (1, 6, 1)$$

ընդ որում x և t սկալար փոփոխականներ են, ապա ըստ (1, 4, 7)-ի

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad (1, 6, 2)$$

Որտեղ $\bar{a}$ -ի երկրորդ ածանցյալը ըստ t -ի.

$$\frac{d^2\bar{a}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\bar{a}}{dx^2} \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{d\bar{a}}{dx} \frac{d^2x}{dt^2}$$

կամ

$$\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} = \frac{d^2 \bar{a}}{dz^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{d\bar{a}}{dz} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1, 6, 3.)$$

Համաձայն (1, 6, 2)-ի $\frac{d\bar{a}}{dt}$ և $\frac{d\bar{a}}{dz}$ ածանցյալները զուգահեռ են միմյանց (համազուգահեռ կամ հակազուգահեռ, նախած $\frac{dz}{dt}$ -ի նշանի):

(1, 6, 3)-ից անմիջապես հետևում է, որ երկրորդ կարգի ածանցյալները՝

$$\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} \text{ և } \frac{d^2 \bar{a}}{dz^2}$$

ընդհանուր սամամբ զուգահեռ չեն միմյանց շնորհիվ այն հանգամանքի, որ (1, 6, 3)-ի աջ մասը բաղկացած է երկու գումարելիներից:

$\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2}$ և $\frac{d^2 \bar{a}}{dz^2}$ ածանցյալների զուգահեռությունը հնարավոր է $\bar{a}$ -ի բոլոր արժեքների համար այն մասնավոր դեպքում, երբ $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, այսինքն՝ երբ $z = z(t)$ t -ի գծային ֆունկցիա է:

$\frac{d\bar{a}}{dt}$ և $\frac{d\bar{a}}{dz}$ ածանցյալների զուգահեռությունը հետևանք է այն բանի, որ ըստ § 1, 1, 2-ի հոդոգրաֆի վրա չի ազդում արգումենտի ընարությունը:

$\bar{a}$ -ի $\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2}$ և $\frac{d^2 \bar{a}}{dz^2}$ երկրորդ ածանցյալների միմյանց զուգահեռ

շինելը բացատրվում է նրանով, որ $\frac{d\bar{a}}{dt}$ և $\frac{d\bar{a}}{dz}$ վեկտորների չափերը իրար հավասար չեն և z -ի ու t -ի փոփոխման ընթացքում փոփոխվում է նաև

$$\left| \frac{d\bar{a}}{dt} \right| : \left| \frac{d\bar{a}}{dz} \right|$$

հարաբերությունը:

Ըստ (1, 6, 2)-ի այս հարաբերությունը կլինի հաստատուն

միայն, երբ $\frac{dz}{dt} \doteq \text{const}$, արժեքն $z = z(t)$ ֆունկցիան դժային է, և

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0;$$

Այս դեպքում $\frac{d\bar{a}}{dt}$ և $\frac{d\bar{a}}{dz}$ վեկտորների հոդոգրաֆները նման կորեր են, որի շնորհիվ $\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} \propto \frac{d^2 \bar{a}}{dz^2}$ ածանցյալները պետք է համապատասխան լինեն միմյանց:

Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

[1—C] Վեկտորի առաջին և երկրորդ ածանցյալների վեկտորական արտադրյալի ուղղությունը անկախ է արգումենտից:

Իսկապես, վեկտորապես բաղմապատկելով (1, 6, 2) և (1, 6, 3)-ը, ստանում ենք

$$\frac{d\bar{a}}{dt} \times \frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} = \left(\frac{d\bar{a}}{dz} \times \frac{d^2 \bar{a}}{dz^2} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)^3,$$

Այս հավասարումից հետևում է նրա ձախ և աջ մասերի վեկտորական արտադրյալների դուգաճևությունը, արժեքն ապացուցվելիք թեորեմը:

Ց^o. Փննարկենք երկրորդ ածանցյալները, երբ փոփոխական $\bar{a}$ վեկտորը դուգաճևութ է որևէ հարթության:

Նախ ենթադրենք, որ վեկտորի չափը հաստատուն է՝ $a = \text{const}$. ախ հարթությունը, որին դուգաճևութ է $\bar{a}$ վեկտորը, նշանակենք P (նկ. 1—10ա):

Ըստ (1, 5, 11)-ի

$$\frac{d\bar{a}}{d\varphi} = \hat{h} \times \bar{a} \quad (1, 6, 4)$$

$\bar{a}$ -ի երկրորդ ածանցյալն ըստ φ կլինի՝

$$\frac{d^2 \bar{a}}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} (\hat{h} \times \bar{a}) = \hat{h} \times \frac{d\bar{a}}{d\varphi} = \hat{h} \times (\hat{h} \times \bar{a})$$

ընդ որում $\hat{h} \perp \bar{a}$, $\hat{h} \cdot \bar{a} = 0$: Այդ պատճառով

$$\hat{h} \times (\hat{h} \times \bar{a}) = \hat{h} (\hat{h} \cdot \bar{a}) - \bar{a} (\hat{h} \cdot \hat{h}) = -\bar{a}:$$

Այսպիսով՝ երբ $\bar{a} \equiv P$ հարթությունը, $a = \text{const}$

$$\frac{d^2 \bar{a}}{d\varphi^2} = -\bar{a} \quad (1, 6, 5)$$

$$\frac{d^3 \bar{a}}{d\varphi^3} = \frac{d}{d\varphi} \frac{d^2 \bar{a}}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} (-\bar{a}) = -\frac{d\bar{a}}{d\varphi}$$

կամ ըստ (1, 6, 4)-ի

$$\frac{d^3 \bar{a}}{d\varphi^3} = -h \times \bar{a}$$

նման մեծի կոտանյութի՝

$$\frac{d^3 \bar{a}}{d\varphi^3} = +\bar{a}$$

Համեմատելով $\bar{a}$, $\frac{d\bar{a}}{d\varphi}$, $\frac{d^2 \bar{a}}{d\varphi^2}$ և ավելի բարձր կարգի անանջյալները ու նկատի առնելով $|1-B|$ -ն կհանգեցնք հետևյալ պարզ և կարևոր արդյունքի՝

$|1-B|$ կամայական հարրուքյանը զուգահեռ և հաստատուն չափ ունեցող $\bar{a}$ վեկտորի n հաջորդական անանջյալները ըստ φ անկյան համարժեք են $\bar{a}$ -ի պատմանը $n \frac{\pi}{2}$ (անկյունով)

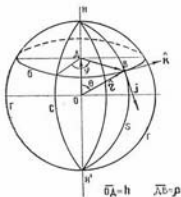
φ անկյան մեծացման ուղղությամբ:

(1, 6, 4) և (1, 6, 5)-ին նման անանջյալները մեզ հաճախ են հանդիպելու Ստորև բերված են երկու խնդիրներ, որոնց արդյունքները հետադառնում կիրառվելու են:

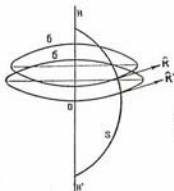
Խնդիր. Օ-ն Γ գնդի կենտրոնն է (նկ. 1—12ա, 1—12բ). HOH Γ -ի այն սրտապիտե է, որ գիծակալ է որպես առանցք. նկարում պատկերված են Γ -ի մերիդիանալ հարթություններից մի քանիսը. Γ -ի շառավիղը հաջորդաբար է մեկիլու երկնիստ φ անկյունները մերիդիանալ հարթությունների միջև հաջվում են COH հարթությունից: $\theta = \angle HOB$ այն անկյունն է, որ կազմում է գիծափող B կետի շառավիղ վեկտորը OH -ի հետ: B կետի լուրջ քանչյուր գիրքին համապատասխանում են որոշակի φ և θ անկյուններ. երբ B -ի գիրքը փոփոխվում է, փոփոխվում են նաև φ և θ անկյունները:

B կետով տարված է ε շրջանագիծը, որի հարթությունը ուղղահայաց է OH առանցքին. ε -ով շարժվում է B կետը, երբ φ

միտությունում է հաստատան հ-ի դեպքում. $\dot{k}$ -ն z -ի շոշափողի ան միադրն է, որ ուղղված է φ անկյունների մեծացման կողմը: մերկիանի S աղեղի շոշափողի j միադրը նախկես ուղղված է θ անկյան մեծացման կողմը:



Նկ. 1—12ա



Նկ. 1—12բ

$\hat{K}1S, K'1S$
 $\hat{K}H\hat{K}', \hat{K}\hat{K}'$

Որոշել

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi}, \dots, \frac{\partial \dot{k}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \dot{k}}{\partial \theta}, \frac{\partial \dot{j}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \dot{j}}{\partial \theta}$$

և ու ծ ու մ. Համաձայն $|1-B|$ և $|1-B'|$ -ի

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta} = \dot{j}, \quad \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial \dot{j}}{\partial \theta} = -\dot{r}, \quad (1, 6, 6)$$

Որոշելու համար $\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi}$ և մյուս ածանցյալները, նկատի առնենք

(Նկ. 1—12ա), որ $\dot{r} = \bar{h} + \bar{\rho}$, $\bar{\rho} = \sin \theta$ և $\bar{h} = \text{const}$, եթե $\theta = \text{const}$.
Ըստ (1, 5, 16)-ի և (1, 5, 15"-ի

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \varphi} = \dot{k} \sin \theta. \quad (1, 6, 7)$$

$\dot{k}$ միադրը վեկտորի մասին առված է մի քիչ տուշ:
Ըստ $|1-B|$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \varphi} = -\dot{\rho}, \quad (1, 6, 8)$$

$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \theta}$ ամանցյալը որոշելու համար նկատի առնենք, որ եթե միևնույն φ անկյուն դեպքում գիտենք φ և φ' շրջանագծեր, որոնք համապատասխանում են θ և θ' անկյուններին, ապա (նկ. 1—12բ), շոշափույները միմյանց զուգահեռ են, $\dot{k} \parallel \dot{k}'$ և $k = k' = 1$, առաի $\dot{k} = \dot{k}'$ ալիքներն, եթե $\varphi = \text{const}$, ապա $\dot{k}$ -ն կախում չունի θ -ից,

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \theta} = 0: \quad (1, 6, 9)$$

Մեզ մնում է որոշել $\frac{\partial \dot{j}}{\partial \varphi}$ ամանցյալը:

Պարզ է, որ տարրեր φ անկյուններին համապատասխանող (հաստատուն θ -ի դեպքում) S շրջանագծերի շոշափույղները զուգահեռ չեն (նկ. 1—12ա), հետևապես φ և $\varphi' = \varphi + d\varphi$ անկյուններին համապատասխանող $\dot{j}$, $\dot{j}' = \dot{j} + d\dot{j}$ միասյուր վեկտորները իրար հակասոր չեն, $\frac{\partial \dot{j}}{\partial \varphi} \neq 0$: Նաև պարզ է, որ $\dot{j} = \dot{j}(\varphi)$ վեկտորի հոդոգրաֆը OH -ին ուղղահայաց շրջանագիծ է. շրջանագծի շառավիղը համասար է $\cos \theta$ (նկ. 1—12ա), իսկ շոշափույղը զուգահեռ է k -ին: Հետևապես, ըստ $[1-B]$ -ի

$$\frac{\partial \dot{j}}{\partial \varphi} = \dot{k} \cos \theta: \quad (1, 6, 10)$$

5. Հետևյալ երկու թեորեմներն ունեն շատ կարևոր կիրառություններ կիրնեմատիկայում և զինամիկայում:

ա) Քննարկենք փոփոխական $\vec{r} = \vec{r}(t)$ վեկտորի ամանցյալները, երբ t արդումենտի բնույթը կամայական է:

Նշանակենք

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}: \quad (1, 6, 11)$$

Ինվերտացիանք

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$$

առնելով

$$2v \cdot dv = dv^2, \quad v \cdot dv = d \frac{v^2}{2}.$$

բազմապատկենք $\bar{v}$ -ն dt -ով, բաժանենք $d\bar{v}$ -ն dt -ի, քանի որ

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{w}, \quad v dt = dr,$$

կստանանք

$$\frac{dv^2}{2} = \bar{w} \cdot dr. \quad (1, 6, 12)$$

[1-D] Վեկտորի երկրորդ ածանցյալի և դիֆերենցիալի սկալար արտադրյալը հավասար է առաջին ածանցյալի բոա-կուսու կեսի դիֆերենցիալին.

բ) $\frac{dr}{dt}$ ածանցյալը նշանակված է $\bar{v}$ -ով, առաի

$$\bar{r} \times \frac{dr}{dt} = \bar{r} \times \bar{v}.$$

Որոշենք $\bar{r} \times \bar{v}$ արտադրյալի ածանցյալը բոա t -ի

$$\frac{d(\bar{r} \times \bar{v})}{dt} = \frac{dr}{dt} \times \bar{v} + \bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt}$$

կամ բոա (1, 6, 11)-ի

$$\frac{d(\bar{r} \times \bar{v})}{dt} = \bar{v} \times \bar{v} + \bar{r} \times \bar{w}.$$

աջ մասի առաջին գումարելին $(\bar{v} \times \bar{v})$ զրո է:

Արդյունքով

$$\frac{d(\bar{r} \times \bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{w}. \quad (1, 6, 13)$$

§ 1, 7. Վեկտորի ածանցյալներն բոա նրա հոդագրամի աղեղի

1. Դիտենք $\bar{r} = \bar{r}(t)$ կամարական t արդումենտի վեկտորա-կան ֆունկցիան: Լ'նդումենք O սրբես վեկտորների ընդհանուր սկզբնակետ (նկ. 1-13): Թող z' կորը լինի r -ի հոդագրամֆը և A_0, A կետերը համապատասխանեն արդումենտի t_0, t արժեքներին: Պալ-

մանավորվենք հոդոգրաֆի աղեղները (s) հաշվել A_0 կետից՝ $s = \cup A_0 A$: Փանի որ A կետը համապատասխանում է արգումենտի ընթացիկ t արժեքին, ապա $s = \cup A_0 A$ կարելի է գրանել որպես t -ի ֆունկցիա՝

$$s = s(t)$$

և միաժամանակ $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ գրանել որպես s -ի ֆունկցիա՝

$$\vec{r} = \vec{r}(s):$$

Այսպիսով ըստ (1, 6, 2) և (1, 6, 3)-ի հնարավոր է $\vec{r}(t)$

ֆունկցիայի ածանցյալները $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \dots\right)$ արտահայտել $\vec{r}(s)$ և

$s = s(t)$ ֆունկցիաների ածանցյալների միջոցով:

Նշենք, որ որպես t արգումենտ կարող է ընտրվել կամայական սկալար մեծությունը (մեխանիկայում ամենից հաճախ՝ ժամանակը), իսկ s -ը հոդոգրաֆի աղեղն է, որը ինչպես հայտնի է, կախում չունի արգումենտի ընտելթից (տես § 1, 1, 2^o դ):

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ -ի ածանցյալների փոխարինումը $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ֆունկցիայի ածանցյալներով

նպատակահարմար է ան պատճառով, որ

$\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \dots$ ածանցյալները կախում ունեն, ինչպես շուտով կտեսնենք, միայն հոդոգրաֆի ձևից՝ հոդոգրաֆի ուղղաչիժ թև կորա-

ղիժ լինելուց, հարթ թև տարածական կոր լինելուց և այլն:

Ենթադրենք, արգումենտի t և $t' = t + \Delta t$ արժեքներին

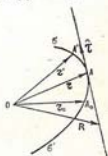
համապատասխանում են հոդոգրաֆի A և A' կետերը, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ և $\vec{r}' = \overrightarrow{OA'}$ վեկտորները, $s = \cup A_0 A$ և $s' = \cup A_0 A'$ աղեղները (նկ. 1—13): Այսպիսով

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \overrightarrow{AA'}, \quad \Delta s = s' - s = \cup AA'$$

և

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\cup AA'}$$

իսկ $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ածանցյալը՝



Նկ. 1—13

$$\frac{dr}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overline{AA'}}{\cup AA'}$$

Որոշել $\frac{dr}{ds}$ ամանցյալը նշանակում է գտնել նրա չափը, ազդողությունը և ուղղվածությունը: Այս երեք ավանդներն էլ որոշվում են հնչյունով:

Իսկապես, երբ $\cup AA'$ ձգտում է գրոյի, $\frac{AA'}{\cup AA'}$ ձգտում է 1-ի

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{AA'}{\cup AA'} = 1$$

Մենք նախկին դիտենք, որ վեկտորի առաջին ամանցյալը ըստ որևէ արդումենտի զուգահեռ է հոդոգրաֆի շոշափողին դիտվող կետում: Մնում է միայն որոշել ամանցյալի ուղղվածությունը, նկատենք, որ, եթե $s = \cup A_0A > 0$, ապա նախկին $\cup AA' > 0$ և այդ պատճառով

$$\frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \Delta r = \overline{AA'}$$

իսկ եթե գրական համարվում է $\cup AA_0$, ապա $\Delta s = \cup AA' < 0$,

$$\text{առաջ } \frac{\Delta r}{\Delta s} \uparrow \Delta r, \text{ ուրիշքն } \frac{\Delta r}{\Delta s} \uparrow \overline{A'A'}$$

Առաժից հետևում է, որ $\frac{\Delta r}{\Delta s}$ -ը համապատասխան է $\overline{AA'}$ լարի ալի ուղղվածությունը, որը համապատասխանում է աղեղի զրական անին:

Սահմանին անցնելիս պետք է աղեղի լարը փոխարինել հոդոգրաֆի A կետում տարած շոշափողով, և մենք կհանդիպենք հետևյալ եզրակացությունը.

[1 — E] Յուրաքանչյուր վեկտորի ամանցյալն ըստ նրա հոդոգրաֆի աղեղի հանդիսանում է շոշափողի այն միավոր վեկտորը, որը ուղղված է դեպի աղեղների զրական անի կողմը:

Նշանակելով այդ միավոր վեկտորը $\hat{r}$, կարող ենք գրել

$$\frac{dr}{ds} = \hat{r} \quad (1, 7, 4)$$

(1, 7, 1)-ից և $[1-l]$ -ից նաև բխում է, որ $\frac{dr}{ds}$ ամանցյալը բա-

ւորովին կախում չունի $\dot{a}$ և r վեկտորների O բնդհանուր սկզբնա-
կետից, $\dot{a}$ և l աղեղների A_0 սկզբից:

2. Մի անգամ ևս գիմենք $1-13$ նկարին.

$\bar{r} = \overline{OA}$, $\dot{a}$ -ն հոդագրաֆի շոշափողի միավոր վեկտորն է A կե-
տում, իսկ $\bar{R}$ -ը ալի շոշափողի ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորն է:
Նշանակենք $\dot{a}$ -ով մի սկալար գործակից, որը կարող է փոփոխ-
վել $-\infty$ մինչև $+\infty$: Այս նշանակումներով $\dot{a}$ -ին գուցահետ և
 A կետով անցնող աղի համասարումը կլինի

$$\bar{R} = \bar{r} + \dot{a} \tau \quad (1, 7, 2)$$

Պարզ է, որ (1, 7, 2) ներկայացնում է հոդագրաֆի A կետով անց-
նող շոշափողի համասարումը:

(1, 7, 2)-ում $\bar{r}$ պետք է համարվի հաստատուն, եթե գիտ-
վում է հոդագրաֆի ավելի A կետով անցնող շոշափողը:

§ 1, 8. $\dot{a}$, $\dot{n}$, $\dot{b}$ միավոր վեկտորները

1. Երբ $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ֆունկցիան զմային է, ինչպես արդեն նշե-
կենք նրա հոդագրաֆը ուղիղ գիծ է, նշանակում է $\dot{a}$ կլինի հաստա-
տուն միավոր վեկտոր և ալի պատճառով

$$\frac{d\dot{a}}{ds} = 0,$$

կորագրի հոդագրաֆների զեպրում $\frac{d\dot{a}}{ds}$ ամանցյալը, բնդհանուր
տամամբ, դրս չէ:

Մինչև $\frac{d\dot{a}}{ds}$ ամանցյալին անցնելը բերենք մի քանի կարևոր
տահմանումներ:

Հոդագրաֆի ընթացիկ A կետով տանենք T_A շոշափողը և
 T_A -ին ուղղահայաց P_A հարթությունը. P_A -ն կոչվում է կորի նոր-
մալ հարթություն A կետում:

Յուրաքանչյուր ուղիղ, որ անցնում է A կետով և ընկած է P_A հարթության վրա, հանդիսանում է հոդոգրաֆի նորմալը A կետում:

Պատկերացնենք Q_{AB} հարթությունը, որ պարունակում է T_A շոշափողը և զուգահեռ է հոդոգրաֆի կամայական B կետի T_B շոշափողին: Երբ փոփոխվում է B կետի դիրքը հոդոգրաֆի վրա, Q_{AB} հարթությունը պտտվում է T_A շոշափողի շուրջը: Q_{AB} ձգտում է սահմանաչին որոշ դիրքի, երբ B ձգտում է համընկնել A -ի հետ: Այդ սահմանաչին դիրքում Q_{AB} հարթությունը կոչվում է կորի հպման հարթություն A կետում և նշանակվում Q_A :

Բոլոր այն հարթություններից, որոնք անցնում են A կետով Q_A հպման հարթությանն ունի ամենատեսերա շոշափումը հոդոգրաֆի հետ:

A կետում հոդոգրաֆի նորմալներից մեկը կլինի P_A և Q_A հարթությունների հատման ուղիղը, այդ նորմալը կոչվում է զլխափոր նորմալ: Այն նորմալը, որը ուղղահայաց է հպման Q_A հարթությանը կոչվում է բինորմալ: Ամենքն է, որ զլխափոր նորմալը և բինորմալը միմյանց ուղղահայաց են:

Ընդհանուր առմամբ հոդոգրաֆը տարածական կոր է և երկու կետերի հպման հարթությունները ոչ համընկնում են, ոչ էլ զուգահեռ են միմյանց. հոդոգրաֆի մի կետից մյուսին անցնելիս թե զլխափոր նորմալը և թե բինորմալը փոփոխում են ոչ միայն իրենց դիրքերը տարածության մեջ, այլ և իրենց ուղղությունները:

Հոդոգրաֆի հարթ կոր լինելու դեպքում հպման հարթությունը համընկնում է կորի հարթության հետ. այսպիսով հոդոգրաֆի բոլոր կետերում զլխափոր նորմալները կլինեն զատափորված այդ հարթության վրա. իսկ բինորմալները՝ ուղղահայաց այդ հարթությանը, և հետևապես զուգահեռ միմյանց:

Հոդոգրաֆի տարբեր կետերի նորմալ (P) հարթությունները ընդհանուր առմամբ զուգահեռ չեն մեկը մյուսին, նրանց զուգահեռությունը անդի ունի միայն, այն դեպքում, երբ հոդոգրաֆը ուղիղ գիծ է:

T_A շոշափողը ուղղահայաց է P_A հարթության, հետևապես ուղղահայաց է զլխափոր նորմալին և բինորմալին:

2. Շոշափողի միափոր փեկաորը նշանակված է $\hat{\tau}$. զլխափոր նորմալի և բինորմալի միափոր փեկաորները նշանակենք համապատասխանորեն $\hat{n}$ և $\hat{b}$: Միշտ կարելի է ախպես ընտրել $\hat{n}$ և $\hat{b}$ -ի

ուղղվածությունները, որ $\dot{z}$, $\dot{n}$, $\dot{b}$ կազմեն աշ ձևաքի հաշի, այսինքն՝

$$\dot{b} = \dot{z} \times \dot{n}, \quad \dot{z} = \dot{n} \times \dot{b}, \quad \dot{n} = \dot{b} \times \dot{z} \quad (1, 8, 1)$$

$\dot{n}$ -ի և $\dot{b}$ -ի ուղղվածությունները բնութելու նպատակով գիտենք $\frac{d\dot{z}}{ds}$ անհայտը:
Նախ

$$\dot{z} = \frac{dr}{ds}, \quad \frac{d\dot{z}}{ds} = \frac{d^2 r}{ds^2} \quad (1, 8, 2)$$

և քանի որ $(ds)^2 = (-ds)^2$, $\frac{d^2 r}{ds^2}$ անհայտը կախած չունի ds -ի նշանից և պետք է լիովին որոշվի հոդոգրաֆի ձևով A կետի շուրջը, ըստ (1, 8, 2)-ի նույնը գերաբերում է $\frac{d\dot{z}}{ds}$ անհայտին:
Իհնք կարող ենք նաև ցույց տալ, որ

$$\dot{n} \parallel \frac{d\dot{z}}{ds},$$

Իսկապես (նկ. 1—14), եթե հոդոգրաֆի A և A' կետերը անսահման մոտ են միմյանց, իսկ T_A և $T_{A'}$ հոդոգրաֆի շոշափողներն են այդ կետերում, ապա ըստ սահմանումի հպման Q_A հարթությունը կազմակերպվում է T_A -ին և $T_{A'}$ -ին: Հետևապես բինորմալը, որ ուղղահայաց է Q_A -ին, պետք է միաժամանակ ուղղահայաց լինի T_A -ին և $T_{A'}$ -ին: Բայց բինորմալի միավորն է $\dot{b}$, $T_A \parallel \dot{z}$ և եթե $\cup AA' = ds$, ապա $T_{A'} \parallel \left(\dot{z} + \frac{d\dot{z}}{ds} ds \right)$ և համաձայն տեսքին $\dot{b} \perp \dot{z}$ (այն, ինչ մենք արդեն գիտենք) և

$$\dot{b} \perp \left(\dot{z} + \frac{d\dot{z}}{ds} ds \right).$$

այսինքն $\dot{b} \perp \frac{d\dot{z}}{ds} ds$ կամ, որովհետև ds -ը սկալար է, ապա

$$\hat{b} \perp \frac{d\hat{z}}{ds} \quad (1, 8, 3)$$

Նկատի առնենք, որ $\hat{z}$ -ն միավոր վեկտոր է, և ըստ $[1-A']$ -ի

$$\hat{z} \perp \frac{d\hat{z}}{ds} \quad (1, 8, 4)$$

և որ բացի այդ

$$\hat{b} \perp \hat{n}, \quad \hat{b} \perp \hat{z} \quad (1, 8, 5)$$

(1, 8, 3), (1, 8, 4) և (1, 8, 5)-ից
անհրաժեշտորեն հետևում է, որ

$$\hat{n} \parallel \frac{d\hat{z}}{ds}$$

Վերևում տրված էր, որ $\frac{d\hat{z}}{ds}$ ամենցլայր կախում չունի ds -ի նշանից և լիովին որոշվում է հոդոգրաֆի ձևով գիտվող A կետի շարժը: Հետևապես, եթե պաշտոնաթուղթներ ընդունել

$$\hat{n} \parallel \frac{d\hat{z}}{ds},$$

այդա $\hat{n}$ -ն էլ կախում չի ունենա ds -ի նշանից, և կորոշվի հոդոգրաֆի ձևով գիտվող A կետի շարժը:

Ըստ (1, 8, 1) $\hat{n}$ -ի ուղղվածությունը որոշվում է նաև $\hat{b}$ -ի ուղղվածությամբ:

§ 1, 9. $\hat{z}$, $\hat{n}$, $\hat{b}$ վեկտորների ամառցյալները. Ֆրենեի բաճանները

1. $\frac{d\hat{z}}{ds}$ ամառցյալի չափը հեշտ է որոշել, քննարկելով հարթ

կորի գեոմետրիա: Երբ կորի մի կետից անցնում ենք մյուսին, փոփոխվում է նրա շոշափողով կազմված φ անկյունը կորի հարթությամբ պատկանող որևէ անշարժ աղղի հետ:

Այսպիսով, կարող ենք գրել

$$\frac{d\hat{z}}{ds} = \frac{d\hat{z}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds},$$

որտեղ S -ը դիաֆոդ կորի աղեղն է, հաշված կորի մի որևէ անշարժ կետից:

Համաձայն (1, 5, 11) $\frac{d\hat{z}}{d\varphi}$ միավոր վեկտոր է, իսկ $\frac{d\varphi}{ds}$ ամանցյալը, ինչպես հալտնի է, կորի կորությունն է տվյալ կետում:

1: $\frac{d\varphi}{ds}$ անվանում են կորության շառավիղ, նշանակում են R և համարում են դրական:

Այսպիսով

$$\left| \frac{d\hat{z}}{ds} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \frac{1}{R} \quad (1, 9, 1)$$

և (1, 8, 6) ու (1, 9, 1)-ը հարթ կորի դեպքում բերում են

$$\frac{d\hat{z}}{ds} = \frac{\hat{n}}{R} \quad (1, 9, 2)$$

ամենաթվանդ:

Այդ նույն ամենաթվանդը ընդունում են նաև տարածական կորի դեպքում, դիտելով R -ը որպես նրա կորության շառավիղը և նորից համարելով $R > 0$:

$\frac{d\hat{z}}{ds}$ ամանցյալի և $\hat{n}$ միավոր վեկտորի ուղղվածությունը

պարզեցւում համար օգտվենք այն հանդամանքից, որ $\frac{d\hat{z}}{ds}$ -ի ուղղվածությունը անկախ է կորի աղեղի դրական աճի ուղղությունից:

Խնդիրը տվելի հեշտացնելու ջնպատակով դիտենք հարթ կոր (նկ. 1—14): Այս դեպքում $\hat{n}$ դաճվում է կորի հարթության վրա, բանի որ $\hat{n} \perp \hat{z}$, ապա $\hat{n} \parallel \overline{AN}$ կամ $\hat{n} \parallel \overline{AN'}$:

Աղեղի դրական աճի ուղղությունը նշված է սլաքով, ենթադրելով, որ $\cup AA'$ աղեղը և $\hat{z}$, $\hat{z}'$ վեկտորներով կազմած անկյունը անասման փոքր են, տեսնում ենք՝

$$d\dot{z} = (\dot{z}' - \dot{z}) \cdot \dot{AN}$$

և

$$\dot{n} \cdot \frac{d\dot{z}}{ds} = \dot{AN},$$

որովհետև $ds > 0$: Այսպիսով, եթե $\dot{n}$ -ի սկիզբը A կետում է, ապա նրա ծայրը պետք է գտնվի T_A շոշափողի ափսոսաբար, որտեղից կորը մեզ թվում է գողափոր: Ենթադրենք $\overline{AC} = \dot{n}R$, այս պայմանին բավարարող C կետը կոչվում է կորի կորույթյան կենտրոն A կետում:

Ինչպես հարանի է երկրաչափությունից, կոր գծի շրջման կետում կամ ուղիղ գծի լուրսաքանչլուր կետում հարման հարթությունը և զլիստփոր նորմալը, հետևապես նաև $\dot{n}$ վեկտորը գտնում

են անորոշ: Իրա պատճառն այն է, որ այդ դեպքերում $\frac{d\dot{z}}{ds} = 0$:

Օրինակ ուղիղ գծի լուրսաքանչլուր կետում շոշափողը համընկնում

է ուղղի հետ, այսինքն $\dot{z} = \text{const}$, առաք $\frac{d\dot{z}}{ds} = 0$:

2. $\frac{d\dot{b}}{ds}$ ամանցյալը գտնելու համար նկատի առնենք, որ ըստ $[1-A]$ -ի

$$\frac{d\dot{b}}{ds} \perp \dot{b}, \quad (1, 9, 3)$$

Մյուս կողմից, համաձայն $(1, 8, 1)$ -ի $\dot{b} \perp \dot{z}$, արժեքն

$$\dot{b} \cdot \dot{z} = 0$$

$$\frac{d(\dot{b} \cdot \dot{z})}{ds} = \frac{d\dot{b}}{ds} \cdot \dot{z} + \dot{b} \cdot \frac{d\dot{z}}{ds} = 0,$$

Այստեղ ըստ $(1, 9, 2)$ -ի

$$\dot{b} \cdot \frac{d\dot{z}}{ds} = \dot{b} \cdot \frac{\dot{n}}{R} = 0,$$

քանի որ $\dot{b} \perp \dot{n}$: Այսպիսով

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d\dot{b}}{ds} \times \dot{\tau} = 0 \\ & \frac{d\dot{b}}{ds} \perp \dot{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (1, 9, 4)$$

(1, 9, 3) և (1, 9, 4) հիման վրա

$$\frac{d\dot{b}}{ds} = \lambda (\dot{b} \times \dot{\tau}),$$

որտեղ λ -ն կամայական սկալար գործակից է. ևս (1, 8, 1)-ի

$$\frac{d\dot{b}}{ds} = \lambda \dot{n},$$

Սախարաբար գրում են ախպես

$$\frac{d\dot{b}}{ds} = -\frac{\dot{n}}{T}. \quad (1, 9, 5)$$

T -ն կոչվում է ուղղման շառավիղ, իսկ $\frac{1}{T}$ — ուրբում:

Ինչպես ասված է § 1, 8, 1^o-ում հարթ կորի բոլոր կետերում բինորմալները ուղղահայաց են կորի հարթությանը, ախնքն.

$$\frac{d\dot{b}}{ds} = -\frac{\dot{n}}{T} = 0, \quad \text{հետևապես} \quad T = \infty, \quad \frac{1}{T} = 0:$$

3. $\frac{d\dot{n}}{ds}$ ամանցվալը որոշելու համար նպատակահարմար է ամանցել

$$\dot{n} = \dot{b} \times \dot{\tau}$$

ամանցվալը.

$$\frac{d\dot{n}}{ds} = \frac{d\dot{b}}{ds} \times \dot{\tau} + \dot{b} \times \frac{d\dot{\tau}}{ds}$$

կամ ևս (1, 9, 5) և (1, 9, 2)-ի

$$\frac{d\dot{n}}{ds} = -\frac{\dot{n} \times \dot{\tau}}{T} + \frac{\dot{b} \times \dot{n}}{R},$$

Նկատի առնելով (1, 8, 1)-ը՝ $\dot{z} \times \dot{n} = \dot{b}, \dot{b} \wedge \dot{n} = -\dot{z}$, առաջում ենք

$$\frac{d\dot{n}}{ds} = \frac{\dot{b}}{T} - \frac{\dot{z}}{R}, \quad (1, 9, 6)$$

(1, 9, 2), (1, 9, 5)-ը և (1, 9, 6), որոնցում $\frac{d\dot{z}}{ds}, \frac{d\dot{b}}{ds}$ և $\frac{d\dot{n}}{ds}$ ամանցյալները արտահայտված են $\dot{z}, \dot{n}, \dot{b}$ վեկտորների ու R, T սկալարների միջոցով, և

$$\frac{d\dot{r}}{ds} = \frac{\dot{z}}{T}$$

ամսշաբթյանները կազմում են Ֆրենեթի բաճառները:

§ 1, 10. Վեկտորի կամայական ամանցյալների արտահայտությունը ըստ հոդոգրաֆի աղեղի վերցված ամանցյալների միջոցով

Այժմ մենք ի վիճակի ենք ըստ վեկտորի հոդոգրաֆի S աղեղի վերցրած ամանցյալների միջոցով արտահայտել վեկտորի առաջին և երկրորդ ամանցյալները ըստ կամայական արդումների:

Իսկապես, համաձայն (1, 4, 7), (1, 7, 1) և (1, 6, 3) ստորնշաբթյանների

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{z}}{T} \frac{ds}{dt} \quad (1, 10, 1)$$

$$\frac{d^2\dot{r}}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\dot{r}}{dt} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d\dot{z}}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\dot{z}}{T} \frac{d^2s}{dt^2}$$

իսկ, փոխարինելով $\frac{d\dot{z}}{ds}$ -ը իր (1, 9, 2) արտահայտությամբ՝

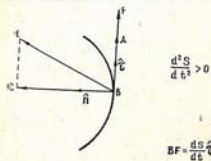
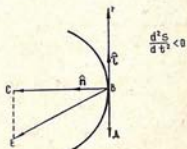
$$\frac{d^2\dot{r}}{dt^2} = \frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\dot{z}}{T} \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (1, 10, 2)$$

եկ. 1—15 և 1—16-ում

$$\frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \overline{BC}, \quad \frac{\dot{z}}{T} \frac{d^2s}{dt^2} = \overline{BD}, \quad \frac{d^2\dot{r}}{dt^2} = \overline{BE};$$

(1, 10, 1) և (1, 10, 2)-ում $\hat{z}$, $\hat{n}$, R որոշվում են հոդորաֆի
ձևով, իսկ $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ ածանցյալները՝ $s = s(t)$ ֆունկցիայով:

(1, 10, 1)-ից երևում է, որ $\frac{d\bar{r}}{dt}$ ածանցյալը զրոգանում է, և որի հաշվարկին գիտյալ կետում, ավել ինչ որ արդեն հալածի է.

 $\gamma_{ij}, i=13$ 

25. 1—16

$$\left| \frac{dr}{dt} \right|, \text{ համապատասխանաբար } \left| \frac{ds}{dt} \right|, \text{ և } \frac{dr}{dt} \text{ -ի ու } \frac{ds}{dt} \text{ -ի ուղղության } \theta \text{ անկյունը որոշվում է}$$

$$\text{և } \frac{ds}{dt}, \text{ ամենացիտիվ } \text{ և } \text{անհատական}$$
$$d_{PP} \quad \frac{ds}{dt} > 0, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} \gg \frac{d\bar{r}_0}{dt}$$

ալսինքն $\frac{dr}{dt}$ համադրուածն է շոշափողին և ուղղված է դեպի
 Կարի աղեղի աճման կողմը.

$$h_{pp} \frac{ds}{dt} < 0, \quad \text{where} \quad \frac{dr}{dr} \Big|_{r=r_0} > 0.$$

7. ը միավոր վեկտորները դասավորված են հաճախ հարթության վրա. ապալիսով $\frac{d^2r}{dt^2}$ ամանցյալը դասավորված է հաճախ հարթության վրա: Բացի այդ կոբալթիան R շառվիղը համարվում է դրական (տե՛ս § 1, 9, 1°). սրա հետևանքով $\frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$

բաղադրիչը համագումարեն է $\dot{A}$ -ին: $\frac{d^2 S}{dt^2}$ -ի ուղղվածությունը կախված է $\frac{d^2 S}{dt^2}$ -ի նշանից՝ $\frac{d^2 S}{dt^2}$ համագումարեն է $\dot{A}$ -ին, երբ $\frac{d^2 S}{dt^2} > 0$ (նկ. 1—15) և ընդհակառակ (նկ. 1—16):

Նկարները ցույց են տալիս, որ $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ վեկտորը միշտ կազմում է սուր անկյուն $\dot{A}$ -ի հետ:
 (1, 10, 2)-ի առ մասը պարունակում է երկու գումարելի. նկատի առնելով, որ $\dot{A}$, $\dot{B}$ փոխադարձաբար ուղղահայաց են, եզրակացնում ենք՝ $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ ածանցյալը, երբեք չունի բինորմալին ($\dot{B}$ -ին) զուգահեռ բաղադրիչ:

§ 1, 11 վեկտորի ածանցյալների պրոեկցիաները

1°. Թող HH' առանցքի միավոր վեկտորը լինի $\hat{h}$ (նկ. 1—17): $\vec{r} \cdot \hat{h}$ սկալար արտադրյալը $\vec{r}$ վեկտորի պրոեկցիան է HH' -ի վրա. բացի այդ միշտ հնարավոր է $\vec{r}$ -ը վերլուծել երկու միմյանց ուղղահայաց բաղադրիչների՝

$$\vec{r} = \hat{h} (\vec{r} \cdot \hat{h}) + \hat{h} \times (\vec{r} \times \hat{h}) \quad (1, 11, 1)$$

Այստեղ $\hat{h} (\vec{r} \cdot \hat{h})$ -ը HH' -ին զուգահեռ բաղադրիչն է, իսկ $\hat{h} \times (\vec{r} \times \hat{h})$ բաղադրիչը ուղղահայաց է HH' -ին այսինքն զուգահեռ է P հարթությանը, որ ուղղահայաց է HH' -ին: $\hat{h} \times (\vec{r} \times \hat{h})$ բաղադրիչը նաև կոչվում է $\vec{r}$ -ի պրոեկցիա P հարթության վրա:

Պատկերացնենք այն դեպքը, երբ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, իսկ $\hat{h}$ -ը հաստատուն է, այսինքն անկախ է t -ից (այդ նշանակում է, որ HH' առանցքը կամ անշարժ է, կամ տեղափոխվում է, [մնալով ինքն իրեն զուգահեռ]):

Ածանցենք բոա t -ի $\hat{h} (\vec{r} \cdot \hat{h})$ և $\hat{h} \times (\vec{r} \times \hat{h})$ արտահայտությունները, նկատի առնելով $\hat{h}$ -ի հաստատուն լինելը՝

$$\frac{d[\dot{h}(\bar{r} \cdot \dot{h})]}{dt} = \dot{h} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \dot{h} \right) \quad \text{..} \quad (1, 11, 2')$$

$$\frac{d[\dot{h} \times (\bar{r} \times \dot{h})]}{dt} = \dot{h} \times \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \dot{h} \right), \quad (1, 11, 2'')$$

(1, 11, 2')-ը կարելի է գրել հարկած

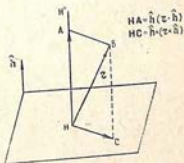
$$\frac{d(\bar{r} \cdot \dot{\bar{h}})}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \dot{\bar{h}} \quad (1, 11, 3)$$

$(1, 11, 3)$ - π $d\omega_{\mu\nu} \frac{d\tilde{r}}{dt}$ - π $q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$ & HVV - π $d\omega_{\mu\nu} (1, 11, 3)$ - π

[illegible]

[1—F] Փոփոխական վեկտորի պրոնեկցիայի ածանցյալն հավասար է վեկտորի ածանցյալի պրոնեկցիային, երբ առանցքը, որի վրա պրոնեկտում ենք, ունի անփոփոխ ուղղորդում:

Պրակկյիւր քաւր փոխարինելով «բաղադրիչ» բառով կատարած (1, 11, 2')-ի արտահայտութիւնը:



26. 1—17

(1, 11, 2)-ի իմաստն էլ
սա է՝ ամանցելիս ղեկավարի աֆն բաղադրիչը, որը զուգահեռ է
անշարժ հարթությանը, կատանանք ղեկավարի ամանցիլի հուն
բաղադրիչը:

Անհրաժեշտ է նկատել, որ $(1, 11, 2^r)$, $(1, 11, 2^r)$ սրբաչափերն են միմյանն ահմ հնթադրութլամք, որ թէ ստանցքը և թէ հարթութլունը անշարժ են կամ մնում են իրենց իրենց պահանք:

Չ՝ Ուղղանկյուն կոորդինատային առանցքների դեպքում,
սեննք (նկ. 1—18)

$$\vec{r} = i\hat{x} + j\hat{y} + k\hat{z}, \quad (1, 11, 4)$$

10 pages 15 17

$$x = \bar{r} \cdot \overset{\Delta}{i}, \quad y = \bar{r} \cdot \overset{\Delta}{j}, \quad z = \bar{r} \cdot \overset{\Delta}{k}$$

Ինչպես արտահայտվում են Ox , Oy , Oz առանցքները վրա:

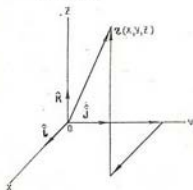
Անդամելով $\frac{dr}{dt}$ ածանցելով v , նման ձևով կարելի է գրել

$$\bar{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z$$

Իմեկով (1, 11, 3)-ին տեսնում ենք, որ

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1, 11, 5)$$

Այսպիսով



Նկ. 1-18

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \bar{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z = \\ &= \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} + \hat{k} \frac{dz}{dt}, \quad (1, 11, 5) \end{aligned}$$

$$\text{Նշանակենք } \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \text{ օգտ.}$$

$\bar{w}$ -ի սրահեղիմաները Ox , Oy , Oz առանցքների վրա համապատասխանաբան նշանակելով w_x , w_y , w_z ունենք

$$\bar{w} = \hat{i}w_x + \hat{j}w_y + \hat{k}w_z$$

և համաձայն (1, 11, 3)-ի

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, & w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, & w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} &= \hat{i}w_x + \hat{j}w_y + \hat{k}w_z = \hat{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \hat{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \hat{k} \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1, 11, 6)$$

Նման ձևով

$$\frac{d^n \bar{r}}{dt^n} = \hat{i} \frac{d^n x}{dt^n} + \hat{j} \frac{d^n y}{dt^n} + \hat{k} \frac{d^n z}{dt^n}, \quad (1, 11, 7)$$

3°. Ահա ստացված արդյունքների մի քանի կիրառումներ.

ա) ընդունենք $t = s$.

այժմ

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \hat{i}$$

$$\dot{\vec{z}} = \dot{i} \frac{dx}{ds} + \dot{j} \frac{dy}{ds} + \dot{k} \frac{dz}{ds}, \quad (1, 11, 8)$$

որտեղից $\dot{\vec{z}}$ միավոր-վեկտորի պրոեկցիաները Ox , Oy , Oz առանցք-ներին զրո հավասար են համապատասխանաբար

$$\left. \begin{aligned} \dot{i} \cdot \dot{\vec{z}} &= \frac{dx}{ds} = \cos(\dot{\vec{z}}, Ox), & \dot{j} \cdot \dot{\vec{z}} &= \frac{dy}{ds} = \cos(\dot{\vec{z}}, Oy) \\ \dot{k} \cdot \dot{\vec{z}} &= \frac{dz}{ds} = \cos(\dot{\vec{z}}, Oz) \end{aligned} \right\} (1, 11, 9)$$

բ) նման ձևով (1, 11, 8), (1, 11, 9), (1, 8, 2)-ից ստանում ենք

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d\dot{\vec{z}}}{ds} = \frac{\dot{n}}{R} = \dot{i} \frac{d^2 x}{ds^2} + \dot{j} \frac{d^2 y}{ds^2} + \dot{k} \frac{d^2 z}{ds^2}, \quad (1, 11, 10)$$

(1, 11, 10)-ի քառակուսին առախսել

$$R^2 = \frac{1}{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2} \quad (1, 11, 11)$$

Գլխավոր նորմալով կազմված տնդիւնները Ox , Oy , Oz առանցքների հետ որոշվում են պայման

$$\left. \begin{aligned} \dot{i} \cdot \dot{n} &= \cos(\dot{n}, Ox) = R \frac{d^2 x}{ds^2}, \\ \dot{j} \cdot \dot{n} &= \cos(\dot{n}, Oy) = R \frac{d^2 y}{ds^2}, \\ \dot{k} \cdot \dot{n} &= \cos(\dot{n}, Oz) = R \frac{d^2 z}{ds^2} \end{aligned} \right\} (1, 11, 12)$$

որտեղ R կարելի է տեղադրել (1, 11, 11)-ից:

գ) Համարելով s -ը t -ի ֆունկցիա կարող ենք (1, 11, 5)-ի հիման վրա (1, 10, 1)-ը գրել.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{z}} \frac{ds}{dt} = \dot{i} \frac{dx}{dt} + \dot{j} \frac{dy}{dt} + \dot{k} \frac{dz}{dt}, \quad (1, 11, 13)$$

որտեղից ստանում ենք

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

(1, 10, 2) և (1, 11, 6)-ը տալիս են

$$\ddot{w} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\dot{s}}{R} \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \dot{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \dot{k} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1, 11, 14)$$

(1, 11, 14) բարձրացնելով քառակուսի, ունենք

$$\ddot{w}^2 = \left(\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \right)^2 = \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2, \quad (1, 11, 15)$$

Բաղմասդատկենք (1, 11, 14)-ը սկալարորեն $\dot{i}$ -ով, օգտագործելով (1, 11, 9) և (1, 11, 12)-ը, կտանանք

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (1, 11, 16)$$

Բաղմասդատկումք $\dot{j}$ -ով և $\dot{k}$ -ով կտար նման տանջաթիույուններ y -ի և z -ի համար:

Խնդիրն և բ.

Խնդիր 1. $\dot{r}$ և $\ddot{r}$ -ը r վեկտորի առաջին և երկրորդ ածանցյալներն են: Յուրջ առի, որ եթե $\dot{r} \times \ddot{r} = 0$ արգումենտի բոլոր արժեքների համար, ապա $\ddot{r}$ -ի հոդոգրաֆը ուղիղ գիծ է:

Լուծում. $\dot{r} \times \ddot{r}$ վեկտորական արտադրյալը զրո կարող է լինել երեք դեպքերում՝

$$a) \quad \dot{r} = 0, \quad b) \quad \ddot{r} = 0, \quad g) \quad \dot{r} \parallel \ddot{r}$$

ա) դեպքը քննարկելը իմաստ չունի, որովհետեւ, եթե $\dot{r} = 0$ արգումենտի բոլոր արժեքների համար, ապա $\ddot{r} = \text{const}$ ըստ (1, 10, 2)

բ) կամալական t արգումենտի դեպքում ըստ (1, 10, 2)-ի

$$\ddot{r} = \frac{\dot{s}}{R} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

Ըստ (1, 8, 1)-ի $\dot{s} \perp \dot{n}$, հետևապես առ մասի դումարը զրո կլինի միայն, եթե դումարելիները առանձին-առանձին զրո լինեն, այսինքն, եթե

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 0, \quad \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 0,$$

Պարզ է, որ t -ի բոլոր արժեքների համար $\frac{ds}{dt}$ -ն չի կարող զրո

լինել, ուստի $\frac{1}{R} = 0$, այսինքն $R = \infty$: Այդ նշանակում

է, որ հոդոգրաֆը ուղիղ գիծ է: Նույն արգումենտին բերում է և դ

ղեկաքի քննարկումը: Իսկապես, համաձայն $(1, 10, 1)$ և $(1, 10, 2)$ -ի

$$\dot{r} = \dot{\tau} \frac{ds}{dt}, \quad \ddot{r} = \dot{\tau} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

$\dot{r}$ -ի և $\ddot{r}$ -ի զուգահեռությունը հնարավոր է միայն

$$\frac{\dot{n}}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 0$$

դեպքում, իսկ այդ կարող է տեղի ունենալ, եթե $\frac{1}{R} = 0$, $R = \infty$:

Այսպիսով խնդիրը լուծված է՝ եթե $\dot{r} \times \ddot{r} = 0$, ապա վեկտորի հո

դոգրաֆը ուղիղ գիծ է:
Խնդիր 2. Ապացուցել, որ եթե արգումենտի բոլոր ար

ժեքների համար $\dot{r} \times \ddot{r}$ վեկտորական արտադրյալի ուղղությունը

նույնն է, ապա վեկտորի հոդոգրաֆը հարթ կոր է:

Լուծում. Ըստ $[1 - C]$ թեորեմի $\dot{r} \times \ddot{r}$ արտադրյալի ուղ

ղությունը կախում չունի արգումենտի բնույթից. ուստի մեզ իրա

վումք է վերադառնալով որպես արգումենտ գիտել հոդոգրաֆի

աղեկը: Այն դեպքում քան $(1, 7, 1)$ և $(1, 8, 2)$ -ի

$$\dot{r} = \frac{dr}{ds} = \dot{\tau}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2 \tau}{ds} = \frac{\dot{n}}{R}$$

և

$$\dot{r} \times \ddot{r} = \frac{\dot{\tau} \times \dot{n}}{R} = \frac{\dot{b}}{R},$$

որտեղ $\dot{b}$ թիւորմալի միավորն է, տե՛ս $(1, 8, 1)$.

$\dot{r} \times \ddot{r}$ արտադրյալի հաստատուն ուղղության դեպքում $\dot{b} =$
 $= \text{const}$: Իսկ այդ (որովհետեւ $\dot{b}$ -ն ուղղահայաց է հպման հարթու

թյանը) նշանակում է՝ հպման հարթությունը միշտ յիշում է զու

գահեւ ինքը իրեն: Դա հնարավոր է այն միակ դեպքում, եթե

Հողողրաֆի բոլոր կետերի հազման հարթությունները համընկնում են, այսինքն Հողողրաֆը հարթ կոր է:

Խնդիր 3. Յուլյց տալ, որ եթե $\bar{a} = \bar{a}(t)$, $\bar{z} = \bar{z}(t)$ սկալար գործակիցներ են, ապա

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a} \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{z} \bar{r} \quad (1, 12, 1)$$

հավասարմանը բավարարող $\bar{r}$ վեկտորի հողողրաֆը հարթ կոր է, որի հարթությունը անցնում է $\bar{r}$ -ի սկզբնակետով:

Լ ու ժ ու մ. Խնդրի պարմանից հետևում է, որ

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{և} \quad \bar{r}$$

վեկտորները կապանալ են: Բացի այդ այս վեկտորներն ունեն մի ընդհանուր կետ, քանի որ $\bar{r}$ -ի ծայրը դանդում է Հողողրաֆի վրա և նույն կետից սկսվում են $\frac{d\bar{r}}{dt}$ և $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ վեկտորները: Այսպիսի պայ-

մաններում $\bar{r}$, $\frac{d\bar{r}}{dt}$ և $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ վեկտորները դասավորված են մի հարթության վրա, այն է հազման հարթության վրա: Վերջինը բխում է այն հանգամանքից, որ $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ և $\frac{d\bar{r}}{dt}$ վեկտորները դանդում են հրազման հարթության վրա: Այսպիսով մենք տեսնում ենք, որ հողողրաֆի բոլոր կետերով տարած հազման հարթությունները անցնում են $\bar{r}$ -ի սկզբնակետով:

Այժմ խնդրի լուծումը ավարտելու համար պետք է միայնցուլյց տալ, որ Հողողրաֆի բոլոր կետերի համար հազման հարթությունը նույնն է: Նկատի տանենք (1, 6, 13) սանդությունը՝

$$\frac{d}{dt} \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \bar{r} \times \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}.$$

Նշանակենք $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{a}$, համաձայն նախորդ սանդությանը

$$\bar{r} \times \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{a}}{dt}$$

և շնորհիվ r , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$ վեկտորների կապվածությունը

$$r \times \frac{dr}{dt} = r \times \frac{d^2r}{dt^2} \quad \text{կամ} \quad a \parallel \frac{da}{dt}$$

Օգտվենք (1, 5, 14) առնչությունից

$$\frac{da}{dt} = a \frac{da}{dt} = a \frac{da}{dt},$$

որտեղ

$$\frac{da}{dt} = \dot{a},$$

Այստեղից պարզ է, որ $a \parallel \frac{da}{dt}$ պայմանը կրավարարվի միայն,

եթե $\frac{da}{dt} = 0$, այսինքն $\dot{a} = \text{const}$:

Քանի որ r և $\frac{dr}{dt}$ պատկանում են հարման հարթությունը,

ապա $r \times \frac{dr}{dt}$ սրտադրվալը ուղղահայաց է այդ հարթությանը և

$a = r \times \frac{dr}{dt}$ վեկտորի հաստատուն ուղղությունը նշանակում է, որ

հարման հարթությունը մնում է միշտ իրեն զուգահեռ իսկ այս հնարավոր է միայն ալն դեպքում, եթե հողողաֆը հարթ կոր է:

Այսպիսով խնդիրը լուծված է:

(1, 12, 1)-ի շատ կարևոր մասնավոր դեպք հանդիսանում է ալն, երբ

$$a = 0, \quad \dot{a} = \text{const}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \dot{a}r \quad (1, 12, 2)$$

(1, 12, 2) պայմանի տեղադրված դեպքում եւ հողողաֆը հարթ կոր է:

Խնդիր 4. Կամալական K^1 և K_2 կորերը դանդում են մի հարթություն միա և չունեն ընդհանուր կետ: Միացնելով K^1 -ի սրէ A կետը K_2 -ի կամալական B կետի հետ ստանում ենք AB

հասկանալի: Ինչպես պետք է ընտրվեն A, B կետերը, որ հասկանալի երկարությունը լինի փոքրագույնը (նկ. 1—19):

Լ ու ծ ու մ. Դիտենք AB -ն որպես վեկտոր, որի սկիզբն է A -ն, իսկ վերջը՝ B -ն. նշանակենք $\overline{AB} = \vec{l}$: Պատկերացնենք, որ A և B -ն ընդունեցին նոր հարեան գիւրջեր՝ A' և B' ընդ որում $\overline{AA'} = d\vec{r}_1$ և $\overline{BB'} = d\vec{r}_2$ անսահման փոքր են: Նշանակելով $\overline{A'B'} = \vec{l}'$, կատանանք $\vec{l}' - \vec{l} = d\vec{l}$: Այս տարրերաթյունը նույնպես անսահման փոքր է: Նկարից երևում է, որ

$$\overline{AA'} + \overline{A'B'} = \overline{AB} + \overline{BB'},$$

կամ

$$\overline{A'B'} - \overline{AB} = \overline{BB'} - \overline{AA'},$$

այսինքն

$$d\vec{l} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1.$$

Բազմապատկենք սկալարային l -ով՝

$$l \cdot d\vec{l} = \vec{l} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{l} \cdot d\vec{r}_1.$$

Ըստ (1, 5, 4)-ի $l \cdot d\vec{l} = l dl$:

Այսպիսով հանդեցինք $l dl = \vec{l} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{l} \cdot d\vec{r}_1$ հավասարության. եթե վեկտորական $\vec{l}$ հասկանալի ընտրված է տեղյակ, որ նրա չափը փոքրագույնն է, ապա $dl = 0$, $l dl = 0$ և այդ պատճառով

$$\vec{l} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{l} \cdot d\vec{r}_1 = 0: \quad (1, 12, 3)$$

Այս արտահայտության մեջ $d\vec{r}_2$ և $d\vec{r}_1$ անսահման փոքր անկախ վեկտորներ են, և (1, 12, 3) կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, եթե

$$\vec{l} \cdot d\vec{r}_2 = 0, \quad \vec{l} \cdot d\vec{r}_1 = 0,$$

այսինքն

$$l \perp d\vec{r}_2, \quad l \perp d\vec{r}_1.$$

$d\vec{r}_2$ և $d\vec{r}_1$ համապատասխանորեն զուգահեռ են T_2 և T_1 շոշափուղներին: Այսպիսով մենք տեսնում ենք, որ $\overline{AB}$ հասկանալի երկարությունը կլինի փոքրագույնը, եթե $\vec{l} \perp T_2$, $\vec{l} \perp T_1$, այսինքն, եթե $\overline{AB}$ հասկանալի կապի ուղիղ անկյուն լուրջաքանչյուր շոշափուղի հետ:

Ծիշա է նաև հակադարձ թեորեմը, եթե հասկանալի կապում է ուղիղ անկյուն լուրջաքանչյուր շոշափուղի հետ, ապա նրա երկարությունը ամենափոքրն է (կամ մեծագույնը, տե՛ս մի փոքր ներքև):

Իսկապես, երբ

$$\vec{l} \perp T_2, \quad \vec{l} \perp T_1,$$

ապա

$$\vec{l} \cdot d\vec{r}_2 = 0, \quad \vec{l} \cdot d\vec{r}_1 = 0$$

և (1, 12, 3)-ից հետևում է $l dl = 0$ կամ $dl = 0$, այսինքն l -ը փոքրրոպումն է:

Նկատում K_1 և K_2 կորերը աճապիտին են, որ հնարավոր է միայն հատվածի երկարություն միևնույն: Կորերի այլ ձևերի գեղջում կարող է հնարավոր լինել հատվածի երկարության մաքսիմումը, կամ թե՛ մաքսիմումը և թե՛ միևնույնը: Բոլոր գեղջերում խնդրի մոտեցումը միատեսակ է:

Խնդիր 5. Ուղղադիմ AB հատվածի երկարությունը հաստատուն է. իսկ ծայրերը սահում են՝ A -ն K_1 կորի վրա, B -ն K_2 կորի վրա: Որոշել A և B կետերի էլիմենտար $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ տեղափոխումների կապը:

Լուծում. Հատվածը գիտենք որպես $\overline{AB} = \vec{l}$ վեկտոր: Օղորագործենք նախորդ խնդրի նշանակումները: Եթե A' կետը պատկանում է K_1 -ին և անսահման մոտ է A -ին, B' -ն պատկանում է K_2 -ին և անսահման մոտ է B -ին, ապա ըստ նախորդ խնդրի

$$\overline{A'B'} - \overline{AB} = d\vec{l}, \quad d\vec{l} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1$$

Այս անշտիվները սկալարորեն բազմապատկելով $\vec{l}$ -ով ստանում ենք

$$\vec{l} \cdot d\vec{l} = \vec{l} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{l} \cdot d\vec{r}_1$$

Քանի որ $l = \text{const}$, ապա համաձայն (1, 12, 3)-ի

$$\vec{l} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{l} \cdot d\vec{r}_1$$

կամ քանի որ $\vec{l} = \dot{l}$, $\dot{l} \cdot d\vec{r}_2 = \dot{l} \cdot d\vec{r}_1$,

Այստեղ $\dot{l} \cdot d\vec{r}_2$ էլիմենտար տեղափոխման պրոեկցիան է $\dot{l}$ -ի ուղղությամբ վրա. նման իմաստ ունի նաև $\dot{l} \cdot d\vec{r}_1$ արապրջալը:

Մենք հանդեպինք հետևյալ, շատ կարևոր թեորեմին.

[1—G] Անփոփոխ երկարության հատվածի ծայրերի էլիմենտար տեղափոխությունների պրոեկցիաները հատվածի ուղղությամբ վրա իրար հավասար են:

Խնդիր 6. $\vec{l}$ վեկտորի չափը հաստատուն է. $\vec{l}$ և $\vec{l}$ -ը հաս-

առաւել չափ ունեցող l վեկտորի առաջին և երկրորդ անդամներն են ըստ կամայական արգումենտի: Դանել $\bar{l}$, $\bar{l}$ և $\bar{l}$ -ի կապը: l, n, d, n, d . (1, 5, 4)-ի հիման վրա

$$l \cdot l = \text{const.}$$

անհնգելով այդ անհնգելիությունը մի անգամ կատանանք՝

$$\bar{l} \cdot \bar{l} + \bar{l} \cdot \bar{l} \text{ կամ } \bar{l}^2 + \bar{l} \cdot \bar{l} = 0:$$

Քանի որ $\bar{l}^2 > 0$, (1, 12, 4)-ից կգրավացնում ենք

$$\bar{l} \cdot \bar{l} < 0:$$

$[1-H]$ երև հաստատուն չափ ունեցող l վեկտորի առաջին անդամները զրո չեն, ապա երկրորդ անդամները չի կարող զրո լինել և պետք է կազմի բուր անկյուն $\bar{l}$ -ի նկատմամբ:

Խնդիրն է:

1. Յուրաքանչյուր, որ ստորին բերված վեկտորական r ֆունկցիայի հստակագրված հարթ կոր է.

$$r = p x(t) + q y(t) + \bar{l}$$

$x(t)$ և $y(t)$ -ն t արգումենտի սկզբում ֆունկցիաներ են, իսկ p , q , $\bar{l}$ հաստատուն վեկտորներ:

Յուրաքանչյուր, կարելի է օգտվել z վեկտորների կապականությունից.

2. Տրված են z համաստեղային

$$x = a x(t) + b y(t) + u$$

$$y = a' x(t) + b' y(t) + v$$

$$z = a'' x(t) + b'' y(t) + w,$$

որոնցում x , y , z կետի կոորդինատներն են կոորդինատային ուղղանկյուն սխեմայում, t սկզբում արգումենտ է, իսկ a , b , u ; a' , b' , v ; a'' , b'' , w — հաստատուն սկզբայիններ են: Բերել այդ համաստեղայինները

$$\bar{r} = p x(t) + q y(t) + \bar{l}$$

տեսքի և արդյվիսով ապացուցել, որ այդ երեք համաստեղայինները կարելի է անհնգել և մի հարթ կոր (տես նախորդ խնդիրը):

3. Ստորին բերված ֆունկցիաներում

$$\vec{r}^2 (\vec{p} \cdot \vec{r}) (\vec{q} \cdot \vec{r}), \quad \vec{r}^2 \vec{r} \cdot \left(\vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \quad \frac{\vec{r}}{r^2} + \frac{\vec{q} \times \vec{r}}{p \cdot r}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r}$ -ը $\vec{r}$ -ի չափն է, $\vec{p}$, $\vec{q}$ հաստատուն վեկտորներ են:

Դանեկ ալդ ֆունկցիաների առաջին սծանցյալները:

4. Որոշել հետևյալ արտադրյալների առաջին և երկրորդ սծանցյալները:

$$\left(\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right), \quad \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right).$$

(առաջին ֆունկցիան $\vec{r}$, $\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ վեկտորների խառն արտադրյալն է):

5. Տրված է $\vec{r} = \vec{p} \cos kt + \vec{q} \sin kt$ ֆունկցիան, որում $\vec{p}$, $\vec{q}$ հաստատուն վեկտորներ են, t -ն սկալար արգումենտ է, իսկ k սկալար հաստատուն է: Այս ֆունկցիայի հոդողրաֆը էլիպս է (տես § 1, 3):

Ապացուցել, որ

$$a) \vec{r}\text{-ը րավարարում է } \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + k^2 \vec{r} = 0 \text{ դիֆերենցիալ հավա-}$$

տարմանը.

$$բ) \text{ է արգումենտի լուրացանչյուր արժեքի համար } \vec{A}'\vec{A} = -2\vec{r} \text{ և } \vec{B}'\vec{B} = \frac{2}{k} \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ վեկտորները հոդողրաֆի արամագծերն են.}$$

$$գ) \vec{r} \times \frac{1}{k} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p} \times \vec{q}, \quad r^2 + \left(\frac{1}{k} \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = p^2 + q^2 \text{ արտահայտել զ արդյունքը խոտքերով:}$$

6. Օգտվելով $\vec{r} = \vec{r}(s)$ արտահայտությունից, արտածել

$$\cos(\vec{r}, \vec{z}) = \vec{r} \cdot \vec{z} = \frac{dr}{ds}$$

առնչությունը, որտեղ $\vec{r}$ -ը $\vec{r}$ -ի չափն է, իսկ $\vec{z}$ -ն՝ հոդողրաֆի շոշափողի միավոր վեկտորը:

ԿԵՏԻ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴՐՈՅԹՆԵՐԸ

§ I. Շարժում և նրա հարաբերականությունը

1°. Մեխանիկայում կարծր են կոչվում այն մարմինները, որոնց կամալական երկու մասնիկները չեն կարող ո՛չ մոտենալ իրար, ո՛չ էլ հեռանալ իրարից: Ակնհայտ է, որ այդպիսի մարմնի շափերն ու ձևը նույնպես չեն կարող փոփոխվել: Կարծր մարմինը երբևէն անփոփոխ էն նաև անփոփոխելի սիստեմ:

Կինեմատիկայում դիտվում է առանձին կետի շարժումը կամ կարծր մարմնի շարժումը:

Ըստ սահմանումի

B կետը կամ կարծր S մարմինը, որի զիրքը անփոփոխելի Σ սիստեմի նկատմամբ փոփոխվում է, շարժվում է Σ -ի նկատմամբ:

Այսպիսով «շարժվել» նշանակում է փոփոխել զիրքը:

Ակնհայտ է, եթե փոփոխվում է B -ի կամ S -ի զիրքը Σ -ի նկատմամբ, ապա փոխադարձաբար պետք է փոփոխվի և Σ -ի զիրքը B -ի կամ S -ի նկատմամբ: Հետևապես շարժման զադափարը հարաբերական և փոխադարձ է:

Առածից պետք է նզարկացնել, որ եթե հնարավորություն չլինի համեմատել B -ի կամ S -ի զիրքը որևէ կարծր մարմնի զիրքի հետ, ապա մենք չէինք կարող գտնել այն մասին, թե շարժվում է արդյոք B -ն կամ S -ը:

Պետք է պարզ լինի նաև, որ միեւնոյն B կետի (կամ S կարծր մարմնի) շարժումները երկու կամայական Σ_1 , Σ_2 կարծր սիստեմների նկատմամբ ընդհանուր առմամբ կարող են տարբերվել մեկը մյուսից:

Օրինակ՝ Մարտի շարժումը արևի նկատմամբ միանգամայն տարրերվում է նրա շարժումից երկրագնդի նկատմամբ: Ուստի խոսելով շարժման մասին անհրաժեշտ է նշել, թե ո՞ր Σ կարծր մարմնի նկատմամբ է այն դիտվում:

Միայն այն դեպքում թույլատրելի է նշել այն կարծր մարմինը, որի նկատմամբ կատարվում է շարժումը, եթե այդ հասկանալի է և առանց նշելու: Օրինակ, թափանիվի շարժման մասին խոսելիս միշտ նկատի ունեն «մեքենայի հիմքի նկատմամբ», դնայքի շարժումը միշտ ենթադրվում է «երկաթուղու նկատմամբ» և այլն:

2. Σ կարծր մարմինը, որի նկատմամբ դիտվում է շարժումը, ենթադրվում է անարժեք թույլ ուղղաթուղաներով ալնքան հետ, որ նրա տարրեր կետերի հետ հաջորդաբար համընկնի շարժվող B կետը (կամ շարժվող S մարմինը):

Շատ հաճախ ենթադրում են, որ Σ կարծր մարմնի հետ անխախտ միացված է կոորդինատային առանցքների որևէ սխառն (մեծ մասամբ ուղղանկյուն կոորդինատային սխառն), այդպիսի դեպքում շարժումը դիտվում է կոորդինատային սխառնի նկատմամբ:

Թե կարծր Σ մարմինը և թե նրան ամրացված կոորդինատային սխառնը կոչվում են հաշվարքի սխառն:

§ 2, 2. Հետադիմ և նրա հետ կապված զադափարներ

Ը. Դիցուք O -ն կոորդինատային Σ սխառնի սկիզբն է, B -ն շարժվող կետը (նկ. 2—1): $OB = r$ վեկտորը, որը սկսվում է O կետում և վերջանում է B -ում, կոչվում է B կետի շառավիղ-վեկտոր:

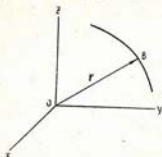
Եթե B կետի դիրքը Σ սխառնի նկատմամբ փոփոխվում է, պետք է նաև փոփոխվի r շառավիղ-վեկտորը կամ ըստ չափի, կամ ըստ ուղղաթվան, և կամ, քնդհանուր դեպքում թե ըստ չափի և թե ըստ ուղղաթվան:

Շարժվող կետի հաջորդական դիրքերի երկրաչափական տեղը կոչվում է կետի հետադիմ:

Հիշելով վեկտորի հոդոգրաֆի զադափարի սահմանումը, տեսնում ենք, որ հետադիմը կետի շառավիղ-վեկտորի հոդոգրաֆն է:

Հետադիմը կարող է լինել ուղիղ դիմ, հարթ կոր կամ առարձակաձև կոր, սրան համապատասխան շարժումը կոչվում է ուղղադիմ, հարթ կամ առարձակաձև:

2°. Ստեղծեն միայն հետագծով շարժումը լիովին չի բնորոշվում: Եվ իսկապես, միևնույն շրջանագծով մի կես կարող է կատարել լրիվ պտույտը 5 վայրկյանում, մյուսը՝ 12 վայրկյանում, միևնույն երկաթուղով ճեպընթաց զնացքը շարժվում է շատ ավելի արագ քան տպրանքատար զնացքը:



Նկ. 2—1

Երբ հետագիծը հայտնի է, ապա շարժման լրիվ որոշման համար բավական է դիտենալ հետագծի S աղեղը որպես t ժամանակի ֆունկցիա՝

$$S = S(t):$$

Յուրաքանչյուր գեագրում S աղեղը հաշվում են մի կամայական, բայց մեկ անգամ ընդմիջառ ընտրված կետից: $S = S(t)$ ֆունկցիայի միջոցով որոշվում է ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտի համար շարժվող կետի դիրքը հետագծի վրա:

Ընդհանրապես այն առնչությունները, որոնք որոշում են կետի դիրքը որպես ժամանակի ֆունկցիա կոչվում են կետի շարժման հավասարումներ: $S = S(t)$ -ի հետ միասին շարժման հավասարումներ են հանդիսանում նաև այն առնչությունները, որոնք արտահայտում են կետի կոորդինատները որպես ժամանակի ֆունկցիաներ՝ օրինակ

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t):$$

Բացի կետի շարժման այս «վերջավոր հավասարումներից» դիտարկվում են նաև կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները:

Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներ կոչվում են այն առնչությունները (օրինակ $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, $\dot{z} = \dot{z}(t)$), որոնց ինտեգրումը բերում է շարժման վերջավոր հավասարումներին: Ընդ որում, իհարկե, անհրաժեշտ է ունենալ ավելիներ ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար:

Այն շարժումը, որի ընթացքում S աղեղը հանդիսանում է t -ի գծային ֆունկցիա՝

$$S = S(t) = a + bt \quad (2, 2, 1)$$

(որտեղ a , b -ն հաստատուն սկալարներ են), կոչվում է հավասարաչափ:

Հալատարաչափ շարժման ընթացքում աղեղը կամ շարունակ մեծանում է, կամ շարունակ փոքրանում:

Իսկապես

$$\frac{ds}{dt} = b = \text{const.} \quad (2, 2, 2)$$

հետևապես, եթե $b > 0$, ապա $\frac{ds}{dt} > 0$, իսկ $b < 0$ դեպքում

$$\frac{ds}{dt} < 0:$$

Դիցուք ժամանակի t և t' մոմենտներին շարժվող կետին համապատասխանում են s և s' աղեղները: Համաձայն (2, 2, 1)-ի

$$s' - s = b(t' - t), \quad (2, 2, 3)$$

(2, 2, 2) և (2, 2, 3)-ի հիման վրա

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{ds}{dt} = b: \quad (2, 2, 4)$$

(2, 2, 3)-ից եզրակացնում ենք, որ հալատարաչափ շարժման դեպքում աղեղի երկարություն աճը, այսինքն «անցած ճանապարհը», աղեղ համեմատական է անցած ժամանակամիջոցին: («Անցած ճանապարհի» բնօրինակը սահմանումը տե՛ս § 2, 2, 4):

$\left| \frac{ds}{dt} \right|$ հաճախ անվանում են սկալար արագություն և նշանակում

Վ-ով՝ $\left| \frac{ds}{dt} \right| = v$: Քանի որ $\frac{ds}{dt}$ -ն կարող է լինել թե դրական և

թե բացասական, $\frac{ds}{dt}$ -ն նշանակում են $\overline{v}$ -ով $\left(\frac{ds}{dt} = \overline{v} \right)$ և ան-

վանում այն արագություն թվային արժեքը: Ինչպես կտեսնենք ներքևում արագությունը պետք է դիտել որպես վեկտոր $\overline{v}$, որի չափն է v -ն, իսկ թվային արժեքը $\overline{v}$ -ը:

Նման նշանակումներ կօգտագործվեն հետագայում բոլոր վեկտորների համար: Այն դեպքերում, երբ վտանգավոր չէ վեկտորի չափի և թվային արժեքի շփոթումը, թվային արժեքի նշանը չի դրվի:

(2, 2, 4)-ը ցույց է տալիս, որ հալատարաչափ շարժման դեպքում սկալար արագությունը հաստատուն է և հալատար աղեղի աճի չափին ժամանակի միավորում:

Այսպիսով լուրաքանչյուր շարժում՝ ուղղագիծ, հարթ կամ տարածական, կլինի հավասարաչափ, եթե բաժարարված է

$$s = a + bt$$

պայմանը, որտեղ a և b հաստատուններ են:

3^o Այն շարժումը, որի ղեկքում աղեղի s երկարությունը մամանակի դժպիհն ֆունկցիա է, այսինքն լուրաքանչյուր շարժում, որը չի բաժարարում $(2, 2, 1)$ պայմանին, կոչվում է անհավասարաչափ:

Ահա անհավասարաչափ շարժումների օրինակներ.

$$s = a + bt + ct^2, \quad (2, 2, 5)$$

որտեղ a , b , c հաստատուն սկալարներից լուրաքանչյուրը կարող է լինել թե դրական և թե բացասական.

$$s = a \cos nt, \quad s = a \cos (nt + \alpha), \quad (2, 2, 6)$$

որտեղ a , n , α հաստատուններ են:

Նկատի առնենք, որ հավասարաչափ շարժման հատկանիշներից մեկը՝ ds -ի նշանի հաստատուն լինելն է, որ անհավասարաչափ շարժման ղեկքում կարող է տեղի չառնալ: Որպես օրինակ կարող է ծառայել $(2, 2, 5)$ շարժումը. համաձայն $(2, 2, 5)$ -ի

$$ds = (b + 2ct) dt$$

և եթե $b > 0$, $c < 0$, ապա t -ի փոքր արժեքների ղեկքում

$$\frac{ds}{dt} = b + 2ct > 0,$$

t -ի մեծ արժեքների ղեկքում բացասական $2ct$ դուժարեկին գերակշռում է և $\frac{ds}{dt}$ -ն դառնում է բացասական:

Այդ նշանակում է (նկ. 2—2), որ $t = 0$ մոմենտից սկսած աղեղի s երկարությունը մեծանում է, հասնում մաքսիմումի

$t_1 = -\frac{b}{2c}$ մոմենտում, և t -ի հետագա անընդհատ աճի ընթացքում

շարժումը կկատարվի աչից ձախ $B_1 B_0 B_2$ աղեղով, ընդ որում B_0 -ից ղեկվի ձախ դասավորված $B_0 B_2$ աղեղը, պետք է համարվի բացասական:

Նաև փոփոխվում է $(2, 2, 6)$ շարժման աղեղի նշանը՝

$$s = a \cos (nt + \alpha), \quad (2, 2, 6)$$

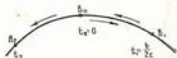
ընդունենք, որ $a > 0$, ապա գեղարտվում

$$s = s_{\max} = +a, \quad \text{երբ } nt + \alpha = 0, \quad 2\pi, \quad 4\pi \dots$$

$$s = 0, \quad \text{երբ } nt + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi \dots$$

$$s = s_{\min} = -a, \quad \text{երբ } nt + \alpha = \pi, \quad 3\pi, \quad 5\pi \dots$$

4. Նկատելով անհերքելիորեն, որ անդամաձևը, որ անհավասարաչափ շարժման ընթացքում $s = -s(t)$ ֆունկցիան կարող է չլինել ոչ մոնոտոն աճող ոչ էլ մոնոտոն նվազող, մացնում են «անցած ճանապարհ» դադարաբեր, որը պետք է տարբերել աղեղի s երկարությունից:



$$ds > 0 \quad s_0 \text{ ից մինչև } s_1$$

$$ds < 0 \quad s_1 \text{ ից աղեղի ներքև}$$

$$\text{նկ. 2-2}$$

Ընթացքինք, թե $s = s(t)$ անպիսին է, որ

$$ds > 0 \quad t_0 \text{-ից մինչև } t_1$$

$$ds < 0 \quad t_1 \text{-ից մինչև } t_2 \quad \text{և այլն,}$$

այսինքն $s_1 - s_0 > 0$, $(s_2 - s_1) < 0$, $(s_3 - s_2) > 0$ և այլն:

Անցած ճանապարհը համասար է

$$z = |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2| + |s_4 - s_3| \dots$$

կամ

$$z = \sum |s_i - s_{i-1}|$$

Այս դեմարտում լուրաքանչիւր դեմարեկին աղեղի բացարձակ արժեքն է, իսկ

$$s = (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + (s_4 - s_3) + \dots$$

դեմարեի առ մասի լուրաքանչիւր դեմարեկին վերցված է իր (բացասական կամ դրական) նշանով:

Օրինակ, եթե ուղիղ զծով ընթանալիս, մարդը կտատարում է 10 քալ դեպի աջ, ապա 6 քալ դեպի ձախ, 9 քալ դեպի աջ, 5 քալ դեպի ձախ, s հատվածը $= +8$ քալ (քալերը դեպի աջ ընդունում ենք դրական), իսկ անցած ճանապարհը՝ $z = 30$ քալ է:

5. Մասնաթանաք եւ մի դադարարի հետ:

'Էլիցուք ժամանակի t եւ t' մոմենտներին համապատասխանում են հետագծի B ու B' կետերը եւ $s = s(t) = \cup B_0B$, $s' = s(t') = \cup B_0B'$ աղեղները (նկ. 2—3):

$\overline{BB'}$ վեկտորը, որի սկիզբն է B կետը եւ որը վերջանում է B' կետում, կոչվում է կետի տեղափոխում ($t' - t$) ժամանակամիջոցում: Տեղափոխման չափը կորագիծ շարժման դեպքում փոքր է

$$s(t') - s(t) = \cup BB'$$

աղեղից:

Հեշտ է պատկերացնել այնպիսի դեպքեր, երբ մեծ S աղեղին համապատասխանում է աննշան կամ զրոյի համասար տեղափոխում: Վերջինը տեղի ունի, նկ. 2—3: երբ կետը, շարժվելով, վերադառնում է իր սկզբնական դիրքը:

Խնդիրներ.

Խնդիր 1: Կետի հետագիծը հարանի է, իսկ շարժման համասարումն է $s = ct^2$, որտեղ $c = \text{const}$:

Աղեղների երկարություններն առաջին, երկրորդ... վայրկյանների վերջում համապատասխանորեն նշանակված են $s_1, s_2, \dots$, իսկ սկալար արագությունները ժամանակամիջոցներում՝ $v_1, v_2, \dots$ Յուլյ ասլ. որ

$$1) \quad s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : \dots = 1 : 4 : 9 : 16 : \dots$$

$$2) \quad (s_1 - s_0) : (s_2 - s_1) : (s_3 - s_2) : (s_4 - s_3) : \dots = 1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

$$3) \quad v_1 : v_2 : v_3 : v_4 : \dots = 1 : 2 : 3 : 4 : \dots$$

Խնդիր 2: Տրված է շարժման համասարումը՝

$$s - s_0 = ct^2 \quad (c = \text{const}).$$

որից հետևում է, որ $t = 0$ մոմենտում կետի B դիրքին համապատասխանում է $s_0 = \cup OB_0$ աղեղը, որտեղ O -ն աղեղների սկիզբն է:

Նշանակելով t_1 ժամանակամիջոցում անցած ճանապարհը $s_1 - s_0$, որոշել, թե ինչ ժամանակամիջոցներում կետը կանցնի այդ ճանապարհի առաջին կետը եւ երկրորդ կետը:

Որոշել նաև կետի սկալար արագություն արժեքները $t = \frac{t_1}{2}$

մոմենտում եւ ճանապարհի առաջին կետի վերջում:

Խնդիր 3: Կետը շարժվում է արված հետադնով համաձայն

$$s = ct^2 \quad (c = \text{const})$$

Համասարման Սրճիկ աղեղի երկարությունը (սանցած հանապարհը) այն մոմենտում, երբ կետի սկզբար արագությունը համասար է v_1 ։ Մույց տալ, որ կթև շարժումը լինել համասարաշափ և կետը ունենար սկզբար v_1 հաստատուն արագությունը, արդ նույն հանապարհը կանցնի երկու անգամ ավելի փոքր ժամանակամիջոցում։

Լուծում։ Շարժման համասարմից ստացվում է

$$v = 2ct \quad \text{և} \quad v_1 = 2ct_1,$$

որտեղ t_1 -ը մոմենտակի այն մոմենտն է, երբ սկզբար արագությունը հասել է v_1 արժեքի։ Այստեղից

$$t_1 = \frac{v_1}{2c}$$

և

$$s_1 = ct_1^2 = c \frac{v_1^2}{(2c)^2} = \frac{v_1^2}{4c} = \frac{v_1}{2c} \cdot \frac{v_1}{2} = \frac{v_1 t_1}{2}, \quad (2, 2, 7)$$

Համասարաշափ շարժման դեպքում աղեղի երկարությունը ժամանակի զմայն ֆունկցիա է՝

$$s = a + bt \quad (a = \text{const}, \quad b = \text{const}).$$

Ընդ որում

$$b = \frac{ds}{dt} = v = \text{const}:$$

Ըստ խնդրի պայմանի $v = v_1$, ուստի $s = a + v_1 t$ ։

Ոչառբեն արտահայտենք ստացված արդյունքը։

Ընթացքին $t_0 = 0$ և t մոմենտներին հետագծի վրա համասարաառանում են շարժվող կետի B_0 և B դիրքերը և s_0 , s աղեղները, ընդունենք, որ աղեղների սկիզբն է O ։ Այս նշանակումներով $s_0 = \cup OB_0 = a$, $s = \cup OB = a + bt$, իսկ $t = t_1$ ժամանակամիջոցում անցած աղեղի երկարությունը

$$s - s_0 = bt = v_1 t_1:$$

Քանի որ երկու շարժումների դեպքում էլ անցած հանապարհը պետք է լինի նույնը, ապա

$$S_1 = S - S_0, \quad \text{կամ} \quad \frac{v_1 l_1}{2} = v_1 l.$$

ալախնքն

$$l = \frac{l_1}{2}.$$

Ստացված արդյունքը կարելի է ձևակերպել այսպես:

Շարժման $S = ct^2$ հավասարման դեպքում սկալար արագությանը t մոմենտում $v = 2ct$: Եթե այդ v արագությունը կետ շարժվեր հավասարաչափ, ապա նույն ճանապարհը կանցներ երկու անգամ ավելի փոքր ժամանակամիջոցում: Այս եզրակացությունը անկախ է c դրժակցի արժեքից:

§ 2, 3. Արագությունը որպես վեկտոր

1. Հաճախ առկա են կետի շարժումը, արտահայտելով r շտապիկ-վեկտորը որպես ժամանակի ֆունկցիա

$$r = r(t), \quad (2, 3, 1)$$

Օրինակ

$$\left. \begin{aligned} r &= a + bt, \\ r &= a + bt + ct^2, \\ r &= a \cos(nt + \alpha) + b \sin(nt + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (2, 3, 2)$$

որտեղ a , b , c — հաստատուն վեկտորներ են, իսկ n , α հաստատուն սկալարներ, t ժամանակն է:

§ 1, 1, 2-ում բերված է վեկտորական ֆունկցիայի հոդոգրաֆի սահմանումը, իսկ § 1, 2-ում և § 1, 3-ում մշտվում են հոդոգրաֆներ որոշելու օրինակներ: Այդ պարագրաֆներում ստանդ լիովին վերաբերում է (2, 3, 1) և (2, 3, 2) ֆունկցիաներին:

Բայց շտապիկ-վեկտորի հոդոգրաֆը կետի հետագիծն է:

Այսպիսով, դիտենալով կետի շտապիկ-վեկտորը որպես ժամանակի ֆունկցիա, կարելի է որոշել այդ կետի հետագիծը.

2°. Դիցուք ժամանակի t , t' մոմենտներին համապատասխանում են r , r' շտապիկ-վեկտորները և հետագծի B , B' կետերը. կետի տեղափոխումը $\Delta t = t' - t$ ժամանակամիջոցում կլինի

$$\overline{BB'} = r' - r = \Delta r,$$

որակից

$$\frac{BB'}{\Delta t} = \frac{r' - r}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (2, 3, 3)$$

Այս հարաբերությունը՝ ա) Δr -ին համադրադաճնո մի վեկտոր է, քանի որ $\Delta t > 0$, բ) ցույց է տալիս ժամանակի միավորին համապատասխանող այն հաստատուն տեղափոխումը, որի ղեկավար Δt ժամանակամիջոցում կատարվեր Δr տեղափոխումը և գ) կոչվում է տեղափոխման միջին արագություն:

Նկատենք, որ տեղափոխման միջին արագությունը վեկտոր է:

Փոքրացնենք $\Delta t = t' - t$ ժամանակամիջոցը. Δt -ի զրոյին մոտենալու արագ ձգտելու, ղեկավար B' կետը մոտենալու արագ և անսահմանորեն կմոտենա B կետին, հետևապես $\Delta r = \overline{BB'}$ տեղափոխումը անսահմանորեն փոքրանում է ըստ չափի և ձգտում է համընկնել հետագծի շոշափողի հետ B կետում:

Սահմանում, երբ $\Delta t \rightarrow 0$ անվերջ փոքր $\overline{BB'}$ տեղափոխումը դասափորձած է հետագծի շոշափողի վրա և ուղղված է B -ից ղեկի B' , այսինքն ղեկի շարժման կողմը:

Այսպիսով՝

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \vec{v} \quad (2, 3, 4)$$

$\frac{dr}{dt}$ սահմանցյալը կոչվում է կետի արագություն t մոմենտում կամ B դիրքում, և հանդիսանում է մի վեկտոր, որը ուղղված է ըստ հետագծի շոշափողի ղեկի շարժման կողմը:

$\vec{v}$ արագությունը հեշտ է շաղկապել հետագծի շոշափողի՝ միավորի և $s = s(t)$ ֆունկցիայի հետ: Իսկապես ըստ (2, 3, 4)-ի

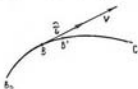
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (2, 3, 5)$$

Այստեղ s -ը հետագծի աղեղն է, այսինքն շաղկապ-վեկտորի հողադրաձի աղեղն է. $\frac{ds}{dt}$ շոշափողի միավոր վեկտորն է, որ ուղղված է

^{*} (2, 3, 4)-ում ոգտացործված $\vec{v}$ նշանի իմաստն է շաղկապման փորձում հենք նշանակելը:

դեպի աղեղների մեծացման կողմը: $\frac{ds}{dt} > 0$, երբ S -ը մեծանում է մասնակի ընթացքում, $\frac{ds}{dt} < 0$ հակառակ դեպքում:

Անհրաժեշտ է պարզել $\bar{\psi}$ -ի և $\bar{z}$ -ի ուղղվածությունները: 2-4ա նկարի վրա աղեղները մեծանում են B_0 -ից դեպի C . Հետևապես $ds = \cup BB' > 0$, $\frac{ds}{dt} > 0$ ($dt > 0$ միշտ). երկու ուղղվածությունները՝ «դեպի աղեղների մեծացման կողմը», «դեպի շարժման կողմը» համընկնում են՝ $\bar{\psi} \uparrow \bar{z}$. Ինչպես էլ պետք է լինի ըստ (2, 3, 5)-ի: 2-4բ նկարի վրա աղեղները մեծանում են



նկ. 2-4ա



նկ. 2-4բ

B_0 -ից D . Հետևապես $ds = \cup BB' < 0$, $\frac{ds}{dt} < 0$. $\bar{z}$ -ն ուղղված է դեպի աղեղների մեծացման կողմը, ալիքնքն $\bar{z} \uparrow \overline{BT}$. $\bar{\psi}$ -ն ուղղված է դեպի շարժման կողմը, ալիքնքն $\bar{\psi} \uparrow \overline{BE}$, $\bar{\psi} \uparrow \bar{z}$:

Ըստ (2, 3, 5) ալիքնքն էլ պետք է լինի, քանի որ $\frac{ds}{dt} < 0$ (2, 3, 5)-ից հետևում է

$$\psi = \left| \bar{z} \frac{ds}{dt} \right| \quad \text{և որովհետև} \quad |\bar{z}| = 1, \quad \psi = \left| \frac{ds}{dt} \right|,$$

ալիքնքն, $\bar{\psi}$ արագության չափը հավասար է սկզբար արագությանը:

Խնդիր: Ինչպիսին է կետի հետադիմը, եթե արագությունը ($\bar{\psi}$) միշտ դուրսանի և անշարժ P հարթությունը (նկ. 2-5):

էւսծումը: Ը-ին ուղղահայաց միավոր վեկտորը անվանենք $\hat{h}$: Եթե $\vec{v}$ զուգահեռ է Δ -ին, ապա $\vec{v} \perp \hat{h}$, $\hat{h} \cdot \vec{v} = 0$:

$$\text{Բայց } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ հետևապես } \hat{h} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0, \quad \hat{h} \cdot d\vec{r} = 0$$

կամ քանի որ $\hat{h} = \text{const.}$, $d(\hat{h} \cdot \vec{r}) = 0$,

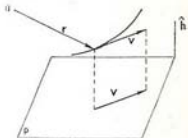
$$\hat{h} \cdot \vec{r} = \text{const.} \quad (2, 3, 6)$$

(2, 3, 6)-ը հարթության հավասարում է. ալյուտից հետևում է, որ շատափող-վեկտորի ծայրը, շարավիելով, միշտ մնում է Δ -ին զուգահեռ հարթության վրա: Այսպիսով հետադիմը հարթ կոր է:

Այս խնդրին կարելի է մատենալ և այլ կերպ:

Քանի որ արագությունը միշտ համընկնում է հետադիմի շոշափողի հետ, խնդրի պայմանից հետևում է, որ հետադիմ լուրջ շոշափողները զուգահեռ են Δ հարթությանը:

Առաի հետադիմը դասավորված է Δ -ին զուգահեռ հարթության վրա:



Նկ. 2-3

§ 2, 4. Արագացում

Մեխանիկայում շատ կարևոր է նաև «արագացում» գաղափարը:

[2—A] Արագացում կոչվում է արագության ամանցյալը ըստ ժամանակի՝

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2, 4, 1)$$

ընդ որում, իմարկե, արագությունը դիտվում է որպես վեկտոր. ուստի արագացումն էլ պետք է վեկտոր լինի:

Պննարկենք մի քանի մասնավոր դեպքեր: Արդեն ասված է, որ շարժումը կարող է լինել ուղղագիծ, հարթ կամ տարածական և որ սրանցից յուրաքանչյուրը կլինի կամ հավասարաչափ, կամ անհավասարաչափ: Հավասարաչափ շարժման արագությունը շարժ. հաստատուն է:

Այսպիսով, համասարաչափ, ուղղագիծ շարժման արագությունը հաստատուն է և ըստ չափի ($\psi = \text{const}$) և ըստ ուղղության ($\dot{\tau} = \text{const}$) ալիքնքն, արագությունը հաստատուն է որպես վեկտոր, հետևապես նրա սծանցյալը՝ արագացումը զրո է:

Անհամասարաչափ ուղղագիծ շարժման դեպքում փոխվում է արագության չափը և կարող է փոխվել ուղղվածությունը:

Վերջինս տեղի ունի, օրինակ, ուղղագիծ ճանձանի դեպքում, դիցուք

$$r = a + b \cos (nt + \alpha)$$

a և b հաստատուն վեկտորներ են, n , α — հաստատուն սկալարներ, t -ն ժամանակն է:

Այստեղ

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} = -b \sin (nt + \alpha).$$

հետևապես $\bar{v} \uparrow \downarrow \bar{b}$, երբ $(nt + \alpha)$ տևում է 0 -ից մինչև π , 2π -ից մինչև $3\pi \dots \bar{v} \uparrow \uparrow \bar{b}$, երբ $(nt + \alpha)$ տևում է π -ից մինչև 2π , 3π -ից մինչև $4\pi \dots$ և այլն:

Արագությունը արտահայտենք ըստ $(2, 3, 5)$ -ի ալպան

$$\bar{v} = \dot{\tau} \frac{ds}{dt} = \dot{\tau} \dot{s}, \quad (2, 4, 2)$$

ուղղագիծ շարժման դեպքում $\dot{\tau}$ անփոփոխ միավոր վեկտոր է, իսկ S -ը փոփոխվում է ըստ բացարձակ արժեքի, կարող է փոխվել նաև ըստ նշանի: Այսպիսով քանի որ $\dot{\tau} = \text{const}$,

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\dot{\tau} \dot{s})}{dt} = \dot{\tau} \frac{d\dot{s}}{dt} = \dot{\tau} \ddot{s} \quad (2, 4, 3)$$

$(2, 4, 3)$ -ում $\ddot{s} = 0$ համասարաչափ շարժման դեպքում (քանի որ արդպիսի շարժման դեպքում S -ը t -ի գծալին ֆունկցիա է), երբ շարժումը անհամասարաչափ է, բնդհանուր առմամբ $\ddot{s} \neq 0$ և կարող է դառնալ զրո ժամանակի առանձին մոմենտներում կամ հետագծի առանձին կետերում: Ուրեմն եզրակացնում ենք.

[2—B] Երբ ուղղագիծ շարժումը համասարաչափ է, կետի արագացումը զրո է: Անհամասարաչափ ուղղագիծ շարժման

ղեկարգում կետի արագացումը զուգահեռ է շարժման ուղղությամբ, իսկ արագացման չափը հավասար է $\frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ ածանցյալի բացարձակ արժեքին.

$$\ddot{s} > 0, \text{ եթե } \dot{s} > 0, \quad \ddot{s} < 0, \text{ երբ } \dot{s} < 0:$$

2. Այժմ անցնենք կորագիծ շարժմանը.

Քանի որ ժամանակի չափաքանչյուր մոմենտում արագությունը դադաճում է հետագծի շոշափողին, ապա կորագիծ հետագծի ղեկչում արագության ուղղությունը անխուսափելիորեն պետք է փոփոխվի: Հետևապես, անկախ նրանից արագության չափը հաստատուն է թե ոչ, արագությունը որպես վեկտոր փոփոխվում է (նկ. 2-6) և նրա ածանցյալը պետք է գրվից տարբերվի՝

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} \neq 0:$$



նկ. 2-6

Այսպիսով

[2-B'] Հավասարաչափ, քե մեմալասարաչափ կորագիծ շարժման ղեկչում արագացումը, ընդհանուր առմամբ զրո չէ. այն կարող է դառնալ զրո ժամանակի առանձին մոմենտներում, հետագծի առանձին կետերում:

Սրանում կարելի է համոզվել նաև կառուցելով կորագիծ շարժման արագությունների հոդոգրաֆը: Հասուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում այդ հոդոգրաֆի ուսումնասիրությունը կորագիծ համասարաչափ շարժման ղեկչում:

Եթե համասարաչափ շարժումը տարածական է, ապա արագության հոդոգրաֆը կլինի սֆերիկ կոր, որի զնդի շառավիղն է ϖ . Եթե որպես սկզբնական ընտրված է զնդի կենտրոնը, ապա հոդոգրաֆի ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորը հավասար է $\vec{\varpi}$ -ի:

Հավասարաչափ հարթ շարժման ղեկչում արագության հոդոգրաֆը շրջանագիծ է: Այժմ հոդոգրաֆի հատկություններից հետևում է, որ $\ddot{\vec{v}} = \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}$ արագացումը, անհնարով չափաքանչյուր մոմենտում շոշափողի ուղղությունը, կլինի ուղղահայաց շրջանագծի շառավիղին այսինքն $\vec{\varpi}$ -ին:

Այսպիսով, մենք հանդեցինք շատ կարևոր եզրակացություն: Հավասարաչափ կորագիծ, հարթ թև տարածական, շարժման գեպքում արագացումը ուղղահայաց է արագությանը:

(Տես խնդիր 4, էջ 85):

Այս պարագրաֆում, բերված նախնական տեղեկությունների նպատակն է կանխել սխալ պատկերացումները արագացման մասին: Սրանցից ամենափոստակարն ալն է, որ իբր թև յուրաքանչյուր Հավասարաչափ շարժման գեպքում արագացումը զրո է, ալն ինչ սա նիշա է միայն ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման գեպքում:

Արագացումը միշտ զրո է միայն Հավասարաչափ ուղղագիծ շարժման գեպքում: Բայց այլ գեպքերում, ալնինքն՝ կամ անհավասարաչափ ուղղագիծ շարժման, կամ կորագիծ կամայական շարժման գեպքում, արագացումը, բնդհանուր առմամբ, զրոյից տարբեր է և Հավասարվում է զրոյի տաանծին մոմենտներում՝ շարժվող կետի տաանծին գիրքերում:

§ 2, 5. Արագացում — սխառնատիկ քննարկում

1. Անցնում ենք արագացման սխառնատիկ քննարկմանը:

Համաձայն [2—3] տահմանումի, արագացումը արագության տալին ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2, 5, 1)$$

Իր հերթին

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2, 5, 2)$$

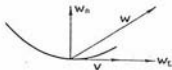
(2, 5, 1) և (2, 5, 2)-ից հետևում է, որ

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2, 5, 3)$$

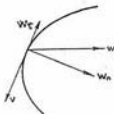
ալնինքն արագացումը շառափիղ-փեկատրի երկրորդ ածանցյալն է ըստ ժամանակի:

2°. § 1, 10-ում $\vec{r}$ -ը կամայական վեկտոր է, Տ-ը՝ նրա հագդրաֆի աղեղը, իսկ t -ն՝ կամայական սկալար արգումենտ:

Ուրեմն § 1, 10-ամ տապալած արդյունքները կլինեն ուժի մեջ, եթե բնդունենք, որ $\bar{r}$ -ը կետի շատափիղ-վեկտորն է, t -ն մամանակը և նորից գիտենք S -ը որպես $\bar{r}$ -ի հադողրաֆի աղեղ, ախինքն որպես կետի հետադծի աղեղ (նկ. 2—7ա, բ):



Նկ. 2—7ա



Նկ. 2—7բ

Այժմ համաձայն (2, 5, 3) և (1, 10, 2)-ի ունենք (2-ն արադացումն է)

$$\bar{\omega} = \frac{n}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2, 5, 4)$$

կամ նկատի առնելով, որ

$$\frac{ds}{dt} = \bar{v} = \dot{s}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}}, \quad (2, 5, 5)$$

$$\bar{\omega} = \frac{n}{R} \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \dot{\bar{v}}, \quad (2, 5, 6)$$

$\bar{v}$ -ն հետադծի շոշափողի ալն միավոր վեկտորն է՝ որն ուղղված է ղեպի աղեղների մեծացման կողմը:

n -ը հետադծի գլխավոր նորմալի միավոր վեկտորն է, ուղղված ղեպի կորաթլան կենտրոնը:

R -ը հետադծի կորաթլան շատափիղը, որը սովորաբար համարվում է դրական:

$\bar{s} (= \bar{v})$ և $\ddot{s}$ -ը հետադծի աղեղի տաալին և երկրորդ ամանցալներն են ըստ մամանակի:

3. (2, 5, 4) և (2, 5, 6)-ի աջ մասերը բաղկացած են երկու դումարելիներից: Ախպիտով բնդանուր ղեպըում, երբ գումարելիներից ոչ մեկը զրո չէ, կետի արադացումը կարելի է վերլուծել երկու բաղադրիչներին.

1) նորմալ բաղադրիչ կամ, համառոտակի՝ նորմալ արադացում

$$\bar{\omega}_n = \frac{\dot{n}}{R} \dot{s}^2 = \frac{\dot{n}}{R} v^2. \quad (2, 5, 7)$$

որը ուղղված է գլխավոր նորմալով զեպի կորաթվան կենտրոնը, այն բաղադրիչի չափը հավասար է $\frac{v^2}{R}$, այսինքն, հավասար է արագութիւն քառակուսու և կորաթվան շառավիղի քանորդին (նկ. 2—7ա, բ):

Նորմալ բաղադրիչը մերածմում է գրույի երկու զեպում՝

$$\text{երբ } v=0 \text{ և երբ } R=\infty:$$

Վերջին զեպը սեղի ունի ուղղապիժ հետադերքի բոլոր կետերում, կամ կորադիժ հետադիժ շրջման կետերում (նկ. 2—7գ):



նկ. 2—7գ

2) Շոշափող բաղադրիչ կամ, համառոտակի՝ շոշափող արագացում

$$\bar{\omega}_\tau = \dot{\tau} \dot{s} = \dot{\tau} v: \quad (2, 5, 8)$$

Շոշափող արագացումը հավասար է գրույի, երբ $\dot{s}=0$, այսինքն կամ հավասարաչափ շարժման զեպում ($\dot{s} = \text{const}$, $\ddot{s}=0$), կամ ալն մոմենտներում, երբ արագութիւն չափը հանդի է էքստրեմումի (մաքսիմումի կամ մինիմումի):

4. $\dot{\tau}$ և $\dot{n}$ միավոր միկտորները դասափորում են հետադիժ ալն հպման հարթութիւն վրա, որի հետ համընկնում է զիափող մոմենտում շարժվող-կետը: Այսպիսով (2, 5, 4) կամ (2, 5, 6)-ից հետևում է, որ լուրաքանչլուր մոմենտում արագացումը գտնվում է հպման հարթութիւն վրա:

Հիշելով, որ բինորմալը ուղղահայաց է հպման հարթութիւնը, կարող ենք նաև ասել, որ արագացումը երբեք չունի բինորմալին դուրսնու բաղադրիչ:

Բացի այդ պետք է նկատի առնել, որ $\dot{\tau} \perp \dot{n}$, ուրեմն արագացման $\bar{\omega}_n$ և $\bar{\omega}_\tau$ բաղադրիչները միմյանց ուղղահայաց են՝

$$\bar{\omega}_n \perp \bar{\omega}_\tau, \quad (2, 5, 9)$$

և այդ պատճառով, բոտ (2, 5, 6)-ի

$$\bar{\omega}^2 = \left(\frac{v^2}{R} \right)^2 + \dot{\tau}^2$$

կամ արագացման չափը

$$w = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \dot{v}^2} \quad (2, 5, 10)$$

5. Անվանելով $\dot{v}$ այն միավորը, փեկտորը, որը համագումար հետ է $\bar{v}$ -ին:

$$\dot{v} \uparrow \bar{v},$$

կարող ենք գրել

$$\bar{v} = \dot{v} v, \quad (2, 5, 11)$$

որակ $\bar{v}$ -ն արագութիւն չափն է: Ըստ (2, 3, 5)-ի

$$\bar{v} = \dot{v} v = \frac{1}{r} \dot{s} \quad (2, 5, 12)$$

Այսակերպ պարզ է, որ

$$\left. \begin{array}{l} \text{եթե } \dot{v} \uparrow \bar{v}, \quad \dot{v} = \frac{1}{r}, \quad \text{ապա } \dot{s} = v, \quad \dot{s} > 0, \\ \text{եթե } \dot{v} \uparrow \bar{v}, \quad \dot{v} = -\frac{1}{r}, \quad \text{ապա } \dot{s} = -v, \quad \dot{s} < 0: \end{array} \right\} \quad (2, 5, 13)$$

Համաձայն արագացման $|2-\lambda|$ սահմանումիւ (2, 5, 11)-ի

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\dot{v}}{dt} v + \dot{v} \frac{dv}{dt}, \quad (2, 5, 14)$$

նկատի առնելով (2, 5, 13) երկու հնարավորութիւնները հետ է համագումար, որ

$$\frac{d\dot{v}}{dt} v = \frac{1}{R} v^2,$$

Ուստի համեմատելով (2, 5, 14)-ը (2, 5, 6)-ի հետ ստանում ենք, որ շոշափող արագացումը՝

$$\bar{w} = \dot{v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \ddot{s} \quad (2, 5, 15)$$

Ընդ որում $\frac{dv}{dt}$ -ն արագութիւն չափի փոփոխութիւնն է ըստ ժամանակի. (2, 3, 15)-ից հետեւում է, որ

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ևթև} & \dot{\psi} \uparrow \uparrow \dot{\tau}, \quad \bar{s} = \frac{d\psi}{dt}, \\ \text{ևթև} & \dot{\psi} \uparrow \downarrow \dot{\tau}, \quad \bar{s} = -\frac{d\psi}{dt} \end{array} \right\} \quad (2, 5, 16)$$

Երբ $\frac{d\psi}{dt} > 0$, արագացումն չափը մեծանում է ժամանակի ընթացքում, արդյիսի շարժումը կոչվում է արագացող:

Հակառակ դեպքում, երբ $\frac{d\psi}{dt} < 0$, արագացումն չափը նվազում է ժամանակի ընթացքում և շարժումը կոչվում է դանդաղող: Քանի որ արագացող շարժման դեպքում

$$\frac{d\psi}{dt} > 0 \text{ և } \dot{\psi} \frac{d\psi}{dt} \uparrow \uparrow \dot{\psi},$$

(2, 5, 12) և (2, 5, 13)-ից եզրակացնում ենք, որ

$$\dot{\tau} \dot{s} \uparrow \uparrow \dot{\tau} \dot{s},$$

այսինքն $\dot{s}$ և $\ddot{s}$ նույնանշան են:

Նման ձևով կառանաճք, որ դանդաղող շարժման դեպքում $\dot{s}$ և $\ddot{s}$ տարանշան են:

Արդյիսով, երբ աղեղի երկարացվածքը արված է որպես ժամանակի ֆունկցիա, շարժման արագացող կամ դանդաղող լինելու մասին կարելի է գատել՝ տնկնալով $\dot{s}$ և $\ddot{s}$ -ի նշանները:

Քանի որ շարժման ընթացքում $\dot{s}$ և $\ddot{s}$ -ի նշանները կարող են փոխվել, արագացող շարժումը կարող է գառնալ դանդաղող և հակառակը:

Յ, Բոլոր տեսակի անհամադրաչափ շարժումներից սովորաբար տեսնվածն է, որ $\dot{s}$ և $\ddot{s}$ -ի նշանները արագացման թվական արժեքը հաստատուն է՝

$$\ddot{s} = \text{const.}$$

Արդյիսի շարժումները՝ ուղղադիմ լին կորագիծ, հարթ թև տարածական, անփանում են համադրաչափ փոփոխվող:

Համադրաչափ փոփոխվող շարժումը կլինի համադրաչափ արագացող, երբ $\frac{d\psi}{dt} > 0$ (այսինքն $\dot{s}$ ու $\ddot{s}$ -ը նույնանշան են) և

Հավասարաչափ դանդաղող, եթե

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} < 0 \quad (\text{այսինքն } \tilde{s} \text{ և } \tilde{s}\text{-ը տարանշան են}):$$

նշանակենք հաստատուն $\tilde{s}$ -ը a -ով:

$$\text{Քանի որ } \frac{d\tilde{s}}{dt} = \tilde{s} = a = \text{const}, \quad \text{իսկ } \frac{ds}{dt} = \tilde{s},$$

այստեղ հավասարաչափ փոփոխվող շարժման դեպքում

$$\tilde{v} = \tilde{s} = at + b \quad (2, 5, 17)$$

և

$$s = \frac{at^2}{2} + bt + c, \quad (2, 5, 18)$$

որտեղ b և c -ն ինտեգրման հաստատուններն են:

Այսպիսով բուրաքանչյուր հավասարաչափ փոփոխվող շարժման դեպքում արագության թվական արժեքը ժամանակի դժպիսն փոփոխվում է, իսկ հեռավորության դեպքում երկարությունը՝ ժամանակի քառակուսային փոփոխվում է:

Այսպիսով t' ժամանակին համապատասխանող արագության թվական արժեքը $\tilde{v}'$ (կամ $\tilde{s}'$), (2, 5, 17)-ից ստանում ենք

$$\tilde{v}' - \tilde{v} = a(t' - t): \quad (2, 5, 19)$$

(2, 5, 19) նշանակում է, որ բուրաքանչյուր հավասարաչափ փոփոխվող շարժման դեպքում արագության թվական արժեքի տեղ ուղիղ համեմատական է ժամանակամիջոցին:

(2, 5, 17)-ից նաև հետևում է, որ երբ a ու b -ն նույնանշան են, այստեղ $\tilde{s}$ և $\tilde{s}$ -ը նույնպես նույնանշան են՝ շարժումը հավասարաչափ արագացող է:

Իսկ a -ի և b -ի տարանշան լինելու դեպքում $\tilde{s}$ և $\tilde{s}$ -ը տարանշան են, եթե $t < -\frac{b}{a}$ և նույնանշան t -ի այն բոլոր արժեք-

ների համար, որոնք մեծ են $\left(-\frac{b}{a}\right)$ -ից:

Այսպիսով տարանշան a ու b -ի դեպքում սկզբում (այսինքն մինչև $t = -\frac{b}{a}$ մոմենտը) շարժումը հավասարաչափ դանդաղող

է, իսկ հետո դառնում է համասարաչափ արագացնող: Հետևաբար լուրաքանչլուր համասարաչափ դանդաղող շարժում որոշակի մասնակից հետո վերածվում է համասարաչափ արագացող շարժման: 2—7ա և 2—7բ նկարներում պատկերված են արագացող և դանդաղող շարժումներ:

Ակներև է, որ թե արագացող և թե դանդաղող շարժումների դեպքում $\overline{\omega}$ արագացումը կադմում է սուր անկյուն գլխավոր նորմալի հետ:

$\overline{\omega}$ արագացումը սուր անկյուն է կադմում արագության հետ, երբ շարժումը արագացող է, և բաթ անկյուն՝ դանդաղող շարժման դեպքում:

7°. Այժմ, ծանոթանալով կետի կինեմատիկայի հիմնական դադափարների հետ, կարելի է ցույց տալ, որ մեկը մյուսի նկատմամբ անշարժ դիտողների համար միևնույն կետի շարժումը նույնն է:

Դիցուք դիտողները գտնվում են՝ մեկը O կետում, մյուսը O' -ում, դիտարկվող B կետի շառավիղ-վեկտորները կլինեն

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'B}.$$

ալտանդից

$$\vec{r}' - \vec{r} = \overrightarrow{OO'}.$$

Քանի որ դիտողները անշարժ են մեկը մյուսի նկատմամբ,

$$\overrightarrow{OO'} = \text{const.}$$

ուստի երկու դիտողների համար՝

ա. $\vec{r}$ և $\vec{r}'$ շառավիղ-վեկտորների հոդողրաֆները նույնն են, (տես § 1, 1, 2°):

$$\text{բ.} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}.$$

ա և բ-ն նշանակում են, որ երկու դիտողների համար B -ն ունի միևնույն հետադիծը, միևնույն արագությանն ու արագացումը՝ ալտանդից երկու ալդպիտի դիտողների համար կամալական կետի շարժումը նույնն է:

Տ°. Քանի որ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, հետևաբար արագության չափողա-

կանոթյունը կլինի $\frac{\text{երկարութեան միավոր}}{\text{ժամանակի միավոր}}$, այսպիսով, օրինակ

$$v = 27 \frac{\text{մ}}{\text{վ}}, \quad v = 11 \frac{\text{կմ}}{\text{ժամ}} \quad \text{և այլն:}$$

$$\text{Նման ձևով արագացման} \quad \left(\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \right)$$

չափողականությունն է $\frac{\text{երկարութեան միավոր}}{(\text{ժամանակի միավոր})^2}$, օրինակ

$$\bar{w} = 7 \frac{\text{մ}}{\text{վ}^2}, \quad \bar{w} = 15 \frac{\text{սմ}}{\text{վ}^2} \quad \text{և այլն:}$$

§ 2. 6. Խնդիրներ:

Ստորև բերված խնդիրներն ունեն կարևոր կիրառություններ: Խնդիր 1: Ապացուցել, որ շարժումը, որում արագացումը զուգահեռ է արագությանը, ուղղադիմ է:

Լուծում: (2, 3, 5) և (2, 5, 6) հիման վրա՝

$$\bar{v} = \frac{A}{t} \bar{s}, \quad \bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{A}{t} \bar{s}.$$

և ինչպես պարզ է, $\bar{w}$ -ն ընդհանուր առմամբ զուգահեռ չէ $\bar{v}$ -ին, այսինքն ընդհանուր առմամբ $\bar{w}$ զուգահեռ չէ $\bar{v}$ -ին:

$\bar{w}$ -ն և $\bar{v}$ -ն կարող են միմյանց զուգահեռ լինել միայն այն մասնավոր դեպքում, եթե $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{w} = 0$ (այս դեպքում $\bar{w} =$

$= \frac{A}{t} \bar{s}$, $\bar{v} = \frac{A}{t} \bar{s}$, հետևապես $\bar{w} \parallel \bar{v}$): Կարողիմ շարժման դեպքում $\bar{w}_n$ -ը զրո է միայն այն առանձին մոմենտներում, երբ $v = 0$ կամ $R = \infty$: $\bar{w} \parallel \bar{v}$ պարմանը կլինի բավարարված հետագծի բոլոր կետերում, եթե $R = \infty$ հետագծի բութագրանկյունը կետում, այսինքն, երբ հետագծի բոլոր զիմ է:

Խնդիր 2: Յուշց առվ, որ եթե կարողիմ շարժման ընթացքում միշտ բավարարվում է

$$\bar{w} = 2\bar{v} + \bar{r} \quad (2, 6, 1)$$

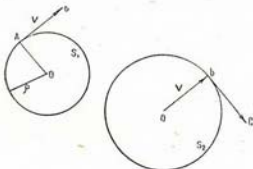
պարմանը, սրտեղ 2, 3 սկալար գործակիցները կարող են կամ լինել հաստատուն, կամ ֆունկցիաներ ժամանակից, ապա հետագիծը պետք է հարթ լինի:

Լ ու ժ ու մ: Այս խնդիրը և § 1, 12, 3 խնդիրը, էջ 45 գրեթե միատեսակ են: Միայն § 1, 12-ում $\bar{r}$ -ը կամ ալտիտուդն վերաբեր է, $\bar{l}$ -ն կամ ալտիտուդն տիպար արդումենա, իսկ ալժմ $\bar{r}$ -ը կետի շառավիղ-վերադարձն է, իսկ $\bar{l}$ -ն ժամանակը: Այն բոլորը, ինչ առված էր հոդդրաֆի մասին § 1, 12 խնդ. 3, կարելի է ալտիտուդ կրկնել հետագծի մասին:

Խնդիր 3: Կետի համաստեղափ շարժման հետագիծն է շառավիղ ունեցող շրջանագիծը: Կառուցել արագության հոդդրաֆը և կրկնելով հոդդրաֆների ընդհանուր հատկություններից, ցույց տալ, որ

$$\bar{\omega} = \frac{h \bar{v}^2}{r}.$$

ալտիտուդ $\bar{\omega}$ -ն արագացումն է, $\bar{v}^2$ — արագության քառակուսին, h — միավոր վերադարձն է, ուղղված շրջանագծի դիտվող կետից դեպի նրա կենտրոնը:



Նկ. 2—8

Լ ու ժ ու մ: Ենթադրենք (Նկ. 2—8), S_1 շրջանագիծը հետագիծն է, A -ն շարժվող կետը, իսկ AB -ն նրա արագության հոդդրաֆը: Նորժաման համաստեղափ լինելու հետևանքով արագության հոդդրաֆը նույնպես շրջանագիծ է, որի շառավիղը $OB = AB$: Ընդունենք, A -ն շարժվում է ժամ-սլաքի ուղղությամբ: Այդ դեպքում b կետը կշարժվի իր շրջանագծով ժամ-սլաքի ուղղությամբ և, երբ A -ն կատարի լրիվ պտույտ S_1 շրջանագծի վրայով b -ն էլ կվերադառնա իր սկզբնական դիրքը, կատարելով լրիվ պտույտ S_2 շրջանագծի վրա:

Երկուսը լրիվ պատկար կատարվում է ∇ մասնանկամիջոցում:
Այդ դեպքում համասարաչափ շարժման արագության չափը

$$v = \frac{2\pi}{T} r, \text{ իսկ } \frac{2\pi}{T} (ob) \text{ կլինի } \frac{d\varphi}{dt} \text{ անկյունային, այսինքն } \overline{\omega}$$
 արագացման չափը:

Փանի որ

$$ob = v, \quad \overline{\omega} = \frac{2\pi v}{T},$$

Այսպիսով

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\overline{\omega}}{v}; \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$

և մենք ստանում ենք, որ

$$\overline{\omega} = \frac{v^2}{r} :$$

Այժմ որոշենք $\overline{\omega}$ արագացման ուղղությունը:

$v = \overline{AB} = \overline{ob}$, $\overline{\omega}$ -ն զուգահեռ է արագության հոդոգրաֆի
 bc շոշափողին և պետք է ուղղված լինի դեպի b -ի շարժման
 կողմը: Այսպիսով $\overline{\omega} \parallel \overline{bc}$, բայց $\overline{bc} \parallel \overline{OA}$, հետևապես $\overline{bc} \parallel \overline{AO}$:
 Եղանակելով $\overline{AO}$ -ի միակողմ դիկտորը $\overset{\Delta}{n}$, ստանում ենք

$$\overline{\omega} = \overset{\Delta}{n} \overline{\omega} = \frac{\overset{\Delta}{n}}{r} v^2, \quad (2, 6, 2)$$

Համասարաչափ շարժման դեպքում

$$\overline{\omega}_1 = 0, \quad \overline{\omega} = \overline{\omega}_2 = \frac{\overset{\Delta}{n}}{R} v^2. \quad (2, 6, 2')$$

Համեմատելով (2, 6, 2) և (2, 6, 2') արտահայտությունները,
 տեսնում ենք, որ $r = R$: Իրոք այդպես էլ պետք է լինի, քանի
 որ շրջանագծի կորագծային շառավիղը համասար է շրջանագծի
 շառավղին:

Յնդիք 4: Ելնելով $v \cdot v = v^2$ նույնությունից, ապացու-
 ցել, որ համասարաչափ շարժման դեպքում արագացումը ուղղա-
 հալաց է արագությանը:

Լուծում: Անանցելով այդ նույնությունը, ստանում ենք

$$2v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dv^2}{dt}$$

կամ, որովհետև

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\omega}, \quad 2\bar{v} \cdot \bar{\omega} = \frac{d\bar{v}^2}{dt};$$

Համասարաչափ շարժման դեպքում $\bar{v}^2 = \text{const}$, ուստի $\bar{v} \cdot \bar{\omega} = 0$
Այստեղից հետևում է՝

$$\text{կամ } \bar{v} = 0, \quad \text{կամ } \bar{\omega} = 0, \quad \text{կամ } \bar{\omega} \perp \bar{v};$$

$\bar{v} = 0$ դեպքը քննարկել իմաստ չունի, քանի որ շարժումը համասարաչափ է, երկրորդ դեպքը՝ $\bar{\omega} = 0$, տեղի ունի, երբ համասարաչափ շարժումը ուղղագիծ է, երրորդ դեպքը՝ $\bar{\omega} \perp \bar{v}$ վերաբերում է կորագիծ համասարաչափ շարժմանը:

Խնդիր 5: Յուշյ տալ, որ եթե մամանակը քառակուսային ֆունկցիա է հետագծի S աղեղի՝

$$t = ps^2 + qs + c \quad (p, q, c \text{ հաստատուններ են}), \quad (2, 6, 3)$$

ապա շոշափող արագացման չափը ուղիղ համեմատական է արագության չափի խորանարդին:

Լուծում: Դիֆերենցելով $(2, 6, 3)$ -ը, ստանում ենք

$$dt = (2ps + q) ds$$

կամ

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \frac{1}{2ps + q};$$

Ածանցենք այդ ածելությունը բոլոր t -ի՝

$$\ddot{s} = -\frac{1}{(2ps + q)^2} \cdot \frac{2pds}{dt} = -\frac{2p\dot{s}}{(2ps + q)^2} = -2p\dot{s}^2;$$

Այստեղ

$$|\dot{s}| = v, \quad |\ddot{s}| = \omega;$$

և այսպիսով

$$\omega = |2p| v^2$$

Խնդիր 6: Կետը շարժվում է xOy հարթության միայն Ox , Oy առանցքները ժախագործաբար ուղղահայաց են միմյանց, իսկ x , y կոորդինատների ածանցյալները բոլոր մամանակի՝

$$\dot{x} = b \cos \psi, \quad \dot{y} = b \sin \psi,$$

ա) Որոշել b մեծության իմաստը.

բ) Դիտենալով, որ հետագիծը կոր է, որոշել արագացման շոշափող և նորմալ բաղադրիչները:

Լ ու ծ ու ժ ու նշանակելով $\dot{i}$, $\dot{j}$ Ox , Oy առանցքների միավոր վեկտորները, ունենք

$$\vec{v} = \dot{i} \dot{x} + \dot{j} \dot{y} = \dot{i} b \cos \psi + \dot{j} b \sin \psi = b (\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi); \quad (2, 6, 4)$$

Այս արտահայտություն մեզ $\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi$ դուրսը միավոր վեկտոր է, որովհետեւ $(\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi)^2 = 1$:

Համեմատելով (2, 6, 4)-ը $\vec{v} = \dot{s} \dot{s}$ արտահայտության հետ, տեսնում ենք, որ

$$\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi = \pm \dot{s}.$$

ընտրելով $+$ նշանը, կունենանք

$$\dot{s} = b \quad (2, 6, 5)$$

Այսպիսով b -ի իմաստը պարզված է:

բ) հարցի լուծմանը անցնելիս հաշվի առնենք, որ ըստ (1, 5, 11)-ի

$$\frac{d(\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi)}{d\psi} = -\dot{i} \sin \psi + \dot{j} \cos \psi$$

նույնպես միավոր վեկտոր է. բացի այդ $(-\dot{i} \sin \psi + \dot{j} \cos \psi) \perp \perp (\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi)$ իսկապես $(\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi) \cdot (-\dot{j} \sin \psi + \dot{j} \cos \psi) = 0$:

Արագացումը արագություն ածանցյալն է

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{i} b \cos \psi + \dot{j} b \sin \psi)}{dt}.$$

$$\vec{w} = (\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi) \frac{db}{dt} + b \cdot \frac{d(\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi)}{d\psi} \frac{d\psi}{dt}$$

ձևով, համաձայն (2, 6, 5)-ի և (2, 5, 18)-ի

$$\vec{w} = (\dot{i} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi) \dot{s} + (-\dot{i} \sin \psi + \dot{j} \cos \psi) \dot{\psi} \dot{s}:$$

Համեմատելով այս արտահայտությունը արագացման ընդհանուր արտահայտության հետ՝

$$\vec{w} = \vec{\tau} \cdot \vec{s} + \frac{n \cdot \vec{s}^2}{R},$$

տեսնում ենք, որ

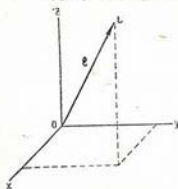
$$-\dot{i} \sin \varphi + \dot{j} \cos \varphi = n \quad \text{և} \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R},$$

Այժմ, որովհետև $\dot{i} \cdot \dot{j} = 0$, $\vec{v} \cdot \dot{i} = b \cos \varphi = \vec{\tau} \cdot \dot{i} \cdot \dot{s}$, ալիքն
 $\vec{\tau} \cdot \dot{i} = \cos \varphi = \cos(\vec{\tau}, OX)$, հետևապես φ -ն այն անկյունն է,
 որ արագությունը կազմում է OX առանցքի հետ:

§ 2, 7. Վեկտորի և նրա ածանցյալների պրոեկցիաները

1. Հաջորդ պարագրաֆներում (§ 2, 8 և § 2, 9) դուրս են
 բերվելու արագության և արագացման կորդինատային արտա-
 հայտությունները: Նախքան արդ արտածման անցնելը նպատակա-
 հարմար է հիշեցնել ուղղանկյալ կորդինատային սխեմաներին
 վերաբերող մի քանի ընդհանուր դրույթներ:

Դիցուք Ox , Oy , Oz ուղղանկյուն կորդինատային սխեմա-



Նկ. 2-9

ների առանցքներն են, իսկ $\dot{i}$, $\dot{j}$, $\dot{k}$
 այդ առանցքների միավոր վեկտորները
 (Նկ. 2-9):

Դիտենք մոտիմալան $\vec{l} = \overline{OL}$
 վեկտորը, որի սկիզբը համընկնում է
 կորդինատային սկզբնակետի հետ:

$\dot{i}$, $\dot{j}$, $\dot{k}$ միավոր վեկտորների
 միջոցով կարելի է առաջին արտա-
 հայտել $\vec{l}$ վեկտորը՝

$$\vec{l} = \dot{i} l_x + \dot{j} l_y + \dot{k} l_z, \quad (2, 7, 1)$$

l_x , l_y , l_z կարելի է դիտել կամ որպես $\vec{l}$ վեկտորի ծալքի կորդի-
 նատներ, կամ որպես $\vec{l}$ վեկտորի պրոեկցիաներ Ox , Oy , Oz
 առանցքների վրա:

Համագրվում համար բաժանված է հիշել $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ միավոր վեկտորների հատկությունները, այն է

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0, \quad \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad (2, 7, 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k}, & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i}, & \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j} \end{aligned} \right\} \quad (2, 7, 3)$$

Համաձայն (2, 7, 2)-ի և (2, 7, 1)-ի

$$\hat{i} \cdot \bar{l} = l_x, \quad \hat{j} \cdot \bar{l} = l_y, \quad \hat{k} \cdot \bar{l} = l_z. \quad (2, 7, 4)$$

(2, 7, 4)-ի ձախ մասերը ներկայացնում են $\bar{l}$ -ի պրոեկցիաները Ox, Oy, Oz առանցքների վրա, այսպիսով տեսնում ենք՝

$\bar{l}$ -ի պրոեկցիան Ox առանցքի վրա հավասար է L կետի l_x կոորդինատին, նման իմաստ ունեն (2, 7, 4) միջոց երկու հավասարությունները:

(2, 7, 2) հիման վրա (2, 7, 1)-ի քառակուսին տալիս է

$$\bar{l} \cdot \bar{l} = l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2. \quad (2, 7, 5)$$

(2, 7, 5)-ում l^2 -ն վեկտորի չափի քառակուսին է: Ըստ (2, 7, 4)-ի

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{l}, Ox) &= \hat{l} \cdot \hat{i} = \frac{l_x}{l} \\ \cos(\bar{l}, Oy) &= \frac{l_y}{l} \\ \cos(\bar{l}, Oz) &= \frac{l_z}{l} \end{aligned} \right\} \quad (2, 7, 6)$$

նման ձևով

3. Դիցուք $\bar{l}$ վեկտորը t արգումենտի ֆունկցիա է՝ $\bar{l} = \bar{l}(t)$: Այս դեպքում, ակներև է, որ l_x, l_y, l_z -ը նույնպես կլինեն t -ի ֆունկցիաներ՝

$$l_x = l_x(t), \quad l_y = l_y(t), \quad l_z = l_z(t). \quad (2, 7, 7)$$

(2, 7, 7) առնչությունները կարող են դիտվել որպես $\bar{l}$ վեկտորի հոդոգրաֆի պարամետրիկ հավասարումներ, արտաքսելով t -ն (2, 7, 7)-ից կհանգենք $\bar{l}$ -ի հոդոգրաֆի սովորական ձևի հավասարումներին:

[1 — F] — ում ապացուցված էր, որ հաստատուն (ալիմենքն 1-ից անկախ) առանցքների դեպքում $\bar{L}$ -ի ածանցյալի պրոեկցիան առանցքի վրա հավասար է $\bar{L}$ -ի պրոեկցիայի ածանցյալին:

Այս դրույթը հաճախ պիտանի է լինում:

§ 2, 8. Արագության և արագացման արտահայտությունները դեկարտյան կոորդինատային սիստեմում

1. Այս պարագրաֆում զուրա կրելովն արագություն և արագացման արտահայտությունները ուղղանկյան կոորդինատային սիստեմում: Կամալական վեկտորներին վերաբերող բոլոր ընդհանուր առնչությունները տրված են § 2, 7-ում: Մեզ միայն մնում է կամալական $\bar{L}$ վեկտորը փոխարինել կետի շտապիղ-վեկտորով, արագությունը կամ արագացումով:

Ինչպես նախորդ պարագրաֆում, արևելք էլ ենթադրվում է, որ շտապիղ-վեկտորի սկիզբը համընկնում է կոորդինատային $Oxyz$ սիստեմի սկզբի հետ: Անհրաժեշտ է նաև հիշել, որ կոորդինատային առանցքների $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ միավոր վեկտորները համարվում են հաստատուն, ալիմենքն՝ մասնակից անկախ, ուստի

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = 0; \quad (2, 8, 1)$$

2. Եթե $\bar{r}$ -ը կետի շտապիղ վեկտորն է, իսկ x , y , z նրա կոորդինատները, ապա

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \\ x &= \hat{i} \cdot \bar{r}, \quad y = \hat{j} \cdot \bar{r}, \quad z = \hat{k} \cdot \bar{r}; \end{aligned} \right\} \quad (2, 8, 2)$$

(2, 8, 2)-ից ստանում ենք՝

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2, 8, 3)$$

իսկ համաձայն (2, 7, 6)-ի

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{r}, Ox) &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos(\bar{r}, Oy) &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos(\bar{r}, Oz) &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2, 8, 4)$$

Քանի որ r -ը ժամանակի ֆունկցիա է. x, y, z նույնպես պետք է ժամանակի ֆունկցիաներ լինեն՝

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2, 8, 5)$$

(2, 8, 5) առնչությունները կոչվում են շարժման հավասարումներ և, առաջին հերթին, որոշում են կետի դիրքը տարածություն մեջ, որպես ժամանակի ֆունկցիա: Շարժման հավասարումները թույլ են տալիս նաև որոշել յուրաքանչյուր մոմենտի համար կետի արագությունը և արագացումը: Սրա համար հարկավոր է միայն ածանցել (2, 8, 5) առնչությունները մեկ անգամ և ապա երկրորդ անգամ:

3. Քանի որ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

ապա ածանցելով (2, 8, 2)-ը ըստ t -ի և նկատի առնելով (2, 8, 1)-ը, ստանում ենք

$$\vec{v} = \dot{i}\dot{x} + \dot{j}\dot{y} + \dot{k}\dot{z},$$

որտեղ

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} = v_z \end{aligned} \right\} \quad (2, 8, 6)$$

Այսպիսով (2, 8, 6) առնչությունը կարողացվի հետևյալ տեսքով՝

$$\vec{v} = \dot{i}v_x + \dot{j}v_y + \dot{k}v_z \quad (2, 8, 7)$$

Նման (2, 8, 3)-ի և (2, 8, 4)-ի, ահենք

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (2, 8, 7)$$

և

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{v}, Ox) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ \cos(\vec{v}, Oy) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ \cos(\vec{v}, Oz) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2, 8, 8)$$

4. Արագացումը $\dot{\omega} = \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$,
 ուստի, դիֆերենցելով (2, 8, 6)-ը, կստանանք

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \dot{i} \dot{x} + \dot{j} \dot{y} + \dot{k} \dot{z}, \\ \text{որտեղ} \quad \dot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_x, \\ \dot{y} &= \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega_y, \\ \dot{z} &= \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \omega_z, \end{aligned} \quad (2, 8, 9)$$

Այսպիսով

$$\dot{\omega} = \dot{i} \omega_x + \dot{j} \omega_y + \dot{k} \omega_z, \quad (2, 8, 10)$$

(2, 8, 10)-ի քառակուսին տալիս է

$$\dot{\omega}^2 = \dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2, \quad (2, 8, 11)$$

Վերջապես, ակ'ս (2, 8, 3) և (2, 8, 8)

$$\begin{aligned} \cos(\dot{\omega}, Ox) &= \frac{\dot{\omega}_x}{\dot{\omega}} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(\dot{\omega}, Oy) &= \frac{\dot{\omega}_y}{\dot{\omega}} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(\dot{\omega}, Oz) &= \frac{\dot{\omega}_z}{\dot{\omega}} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \end{aligned} \quad (2, 8, 12)$$

5. Այստեղ r , v , ω վեկտորները վերլուծված են Ox , Oy , Oz առանցքներին զուգահեռ բաղադրիչների:

Ահմեհը է, որ երբ շարժումը տարածական չէ, այլ հարթ, նպատակահարմար է անպիսի ընտրել կոորդինատային սխեման, որ նրա հարթություններից որեւէ մեկը համընկնի շարժման հարթության հետ:

Այդ դեպքում կոորդինատային սխեմայի O սկզբնակետը և կետի շառավիղ-վեկտորը կլինեն նույն հարթության վրա և երբ որդ առանցքը չի աղտագործվի, ախպիսով սահման ինչ կլինի ամենի պարզ:

Օրինակ, եթե շարժման հարթությունն հետ համասեղիկը կոորդինատային XY հարթությունը, ապա (2, 8, 1)—(2, 8, 12) առնչություններում z , $\dot{z}$, $\ddot{z}$ կցառնան զրո:

Իսկ եթե հարթ շարժման զեպքում կոորդինատային հարթություններից ոչ մեկը չի համընկնում շարժման հարթության հետ, ապա x , y , z կոորդինատները չեն կարող անկախ լինել մեկը մյուսից, նաև անկախ չեն լինի արագություն երեք պրոեկցիաները $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ և արագացման $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ երեք պրոեկցիաները:

Իսկապես, եթե շարժման հարթությունն նորմալի միավոր վեկտորը նշանակենք $\hat{h}$, ապա արդ հարթության համաստեղիկը կլինի

$$\hat{h} \cdot r = \text{const} \quad (2, 8, 13)$$

կամ բառ (2, 8, 2)-ի

$$\hat{h} \cdot (\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}) = \text{const},$$

$$(\hat{h} \cdot \hat{i})x + (\hat{h} \cdot \hat{j})y + (\hat{h} \cdot \hat{k})z = \text{const}. \quad (2, 8, 14)$$

(2, 8, 14)-ը հենց այն առնչությունն է, որ շաղկապում է կետի x , y , z կոորդինատները:

Ածանցելով (2, 8, 14)-ը, գտնում ենք կապը արագություն երեք պրոեկցիաների միջև

$$(\hat{h} \cdot \hat{i})\dot{x} + (\hat{h} \cdot \hat{j})\dot{y} + (\hat{h} \cdot \hat{k})\dot{z} = (\hat{h} \cdot \hat{i})\dot{v}_x + (\hat{h} \cdot \hat{j})\dot{v}_y + (\hat{h} \cdot \hat{k})\dot{v}_z = 0 \quad (2, 8, 15)$$

երկրորդ ածանցումը տալիս է կապը արագացման պրոեկցիաների միջև՝

$$(\hat{h} \cdot \hat{i})\ddot{x} + (\hat{h} \cdot \hat{j})\ddot{y} + (\hat{h} \cdot \hat{k})\ddot{z} = 0 \quad (2, 8, 16)$$

Այն ավելի մասնավոր զեպքում, երբ շարժումը ուղղադիմ է, նպատակահարմար է կոորդինատային առանցքներից մեկը համասեղիկ այն ուղղի հետ, որով կատարվում է շարժումը: Օրինակ, եթե արդ ուղղի հետ համասեղիկում է Ox առանցքը, ապա (2, 8, 2)—(2, 8, 11)-ում կունենանք

$$y = 0, \quad z = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0$$

Հսկառակ զեպքում, երբ առանցքներից ոչ մեկը չի համընկնում այն ուղղի հետ, որով կատարվում է շարժումը, լուրջաբանչլուր հոլովում՝

$$x, y, z; \quad \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \quad \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z};$$

Երեք մեծությունները սկսած է կապված լինեն երկու սկզբանով, այսինքն լուրաքանչյուր եռյակում անկախ կլինի միայն մի մեծություն:

Ապացուցելու նպատակով քնդունենք, որ շարժումը կատարվում է $\dot{l}$ միավոր վեկտորին զուգահեռ ուղղով և հետևապես կետի շտապիղ-վեկտորը կարելի է արտահայտել այսպես՝

$$\vec{r} = \vec{c} + \dot{l}.$$

որտեղ $\vec{c}$ և $\dot{l}$ -ը հաստատուն վեկտորներ են, իսկ $\dot{l} = \dot{l}(t)$ սկալար զործակից է:

Քանի որ $\dot{l} \times \dot{l} = 0$, ապա $\dot{l} \times \vec{r} = \dot{l} \times \vec{c}$ կամ, համաձայն (2, 8, 2)-ի

$$\dot{l} \times \vec{c} = (\dot{l} \times \dot{i})x + (\dot{l} \times \dot{j})y + (\dot{l} \times \dot{k})z. \quad (2, 8, 17)$$

(2, 8, 17)-ի առաջին և երկրորդ անդամները կլինեն (քանի որ $\dot{l} \times \vec{c}$ հաստատուն է)

$$(\dot{l} \times \dot{i})\dot{x} + (\dot{l} \times \dot{j})\dot{y} + (\dot{l} \times \dot{k})\dot{z} = 0, \quad (2, 8, 18)$$

$$(\dot{l} \times \dot{i})\ddot{x} + (\dot{l} \times \dot{j})\ddot{y} + (\dot{l} \times \dot{k})\ddot{z} = 0; \quad (2, 8, 19)$$

Երեք վեկտորական արտադրյալներից լուրաքանչյուրը ուղղահայաց է $\dot{l}$ -ին: Հետևապես (2, 8, 17), (2, 8, 18), (2, 8, 19) անպիսի վեկտորական հավասարումներ են, որոնցում մասնակցող բոլոր վեկտորները $(\dot{l} \times \vec{c}, \dot{l} \times \dot{i}, \dot{l} \times \dot{j}, \dot{l} \times \dot{k})$ ուղղահայաց են $\dot{l}$ -ին: Ինչպես հայտնի է, լուրաքանչյուր աղյուսի հավասարում համարվեք է երկու սկալար հավասարումների, այսինքն

$$x, y, z; \quad \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \quad \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z};$$

ևսականներից լուրաքանչյուրը ենթակա է երկու սկալար սկզբանի. հետևապես լուրաքանչյուր եռյակում անկախ է միայն մեծություններից մեկը:

§ 2, 9. Մ-րազուրյան և արագացման արտահայտությունները բևեռային սխեմայում

Սրազայինները և արագացումը բևեռային, զլանային և զնդային կոորդինատային սխեմաներում արտահայտվում են համար հարմար է $\bar{r}$ -ին առ $\dot{r}$ հետևյալ տեսքը

$$\bar{r} = \dot{r} r, \quad (2, 9, 1)$$

որտեղ $\dot{r}$ միավոր վեկտորը համազուգահեռ է $\bar{r}$ -ին:

Ամանցներ (2, 9, 1) ըստ t -ի, նկատի առնելով, որ

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v},$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\dot{r}}{dt} \quad (2, 9, 2)$$

$\frac{d\dot{r}}{dt}$ ամանցալը, տե՛ս [1-A] ուղղահայաց է $\bar{r}$ -ին. ախպիսով

(2, 9, 2)-ը տալիս է $\bar{v}$ -ի վերլուծումը երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց բաղադրիչների: (2, 9, 2) կարող է կիրառվել թե՛ տարածական և թե՛ հարթ շարժումների դեպքում:

Վերջին դեպքում (2, 9, 2)-ը կարելի է ձևափոխել այսպես:

Ենթադրենք, որ շառավիղ-վեկտորի (O) սկիզբը շարժման P հարթության վրա է: Դիտենք O-ն որպես բևեռ, և կամայական անշարժ OA ուղիղը, որը դասավորված է P-ի վրա, որպես բևեռային առանցք:

($\bar{r}$, OA) անկյունը նշանակենք φ . այժմ

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2, 9, 3)$$

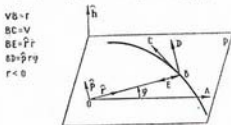
Ինչպես հայտնի է, տե՛ս [1-B], $\frac{d\bar{r}}{d\varphi}$ -ն միավոր վեկտոր է և

կազմում է $\bar{r}$ -ի և OA ուղղի հետ համապատասխանաբար (նկ-2-10), $\frac{\pi}{2}$ և $\varphi + \frac{\pi}{2}$ անկյուններ:

Նշանակելով այս միավոր վեկտորը $\dot{\vec{p}}$, կունենանք

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \dot{\vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} \perp \vec{r}. \quad (2, 9, 4)$$

$\dot{\vec{p}}$ -ն ուղղված է զեպի անկյան մեծացման կողմը:



Նկ. 2-10

Այսպիսով

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{p}} \dot{\varphi}, \quad (2, 9, 3')$$

որտեղ

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Վերջնականորեն (2, 9, 2)-ը ընդանում է հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \dot{\varphi} + \dot{\vec{p}} \dot{\varphi} \quad (2, 9, 5)$$

Մի անգամ ևս նշենք, որ (2, 9, 5)-ում շարժումը ենթադրվում է հարթ, իսկ շառավիղ-վեկտորի O սկիզբը՝ դասավորված է շարժման հարթության վրա:

(2, 9, 5)-ի $\dot{\vec{r}} \dot{\varphi}$ բաղադրիչը դադարեւում է $\vec{r}$ -ին և անվանվում է արագության ռադիալ բաղադրիչ և նշանակվում $\vec{v}_r$, իսկ $\dot{\vec{p}} \dot{\varphi}$ -ին՝ ուղղահայաց $\dot{\vec{p}} \dot{\varphi}$ բաղադրիչը կոչվում է ընդլայնական և նշանակվում $\vec{v}_z$:

Հետևապես

$$\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} \dot{\varphi}, \quad \vec{v}_z = \dot{\vec{p}} \dot{\varphi}, \quad \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_z:$$

$\dot{\vec{r}} \dot{\varphi} = \dot{r} \dot{\varphi}$, եթե $\dot{r} > 0$, ապա նաև եթե շառավիղ-վեկտորի շարժման մեծանում է.

$\dot{r} \dot{r} \uparrow \downarrow \dot{r}$, եթե $\dot{r} < 0$, այսինքն, եթե շառավիղ-վեկտորի չափը նվազում է.

$\dot{r} \dot{r} = 0$, եթե $\dot{r} = 0$, այսինքն, երբ շառավիղ-վեկտորի չափը հանգեւ է էքստրեմումի:

Ունդի բ: Ինչպիսին է կետի հետադիժը, եթե շարժման ընթացքում արագութիւնը դադարեալ է շառավիղ-վեկտորին.

Լուծում: Ըստ (2, 9, 2)-ի $\vec{v} = \dot{r} \dot{r} + r \frac{d\dot{r}}{dt}$, ընդ որում

$\frac{d\dot{r}}{dt} \perp \dot{r}$: Ուրեմն ինդքի պալմանը՝ $\vec{v} \parallel \dot{r}$ նշանակում է, որ

$r \frac{d\dot{r}}{dt} = 0$. Քանի որ կետը շարժվում է, r -ը չի կարող ձեռապես

դրո լինել, հետևապէս դրո պէտք է լինի $\frac{d\dot{r}}{dt}$ ածանցւալը, այսինքն

$\dot{r} = \text{const}$: Աւսպիսով շառավիղ-վեկտորի ուղղութիւնը անփոփոխ է, իսկ հետադիժը մի ուղիղ է, որ անցնում է շառավիղ-վեկտորի սկզբով:

2. Ածանցենք (2, 9, 5), նկատի առնելով, որ $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}$.

$$\vec{w} = \frac{d\dot{r}}{dt} \dot{r} + \dot{r} \ddot{r} + \frac{dp}{dt} r\dot{\varphi} + p \dot{r} \ddot{\varphi} + p r \ddot{\varphi}, \quad (2, 9, 6)$$

Այստեղ

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}.$$

Քանի որ

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{իսկ} \quad \dot{p} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi},$$

տառնում ենք

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2\dot{r}}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt}$$

կամ, համաձայն (1, 6, 5)-ի,

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = -\dot{r} \ddot{\varphi} \quad (2, 9, 7)$$

Այսպիսով (2, 9, 7) և (2, 9, 4)-ի հիման վրա (2, 9, 6) կգրվի՝

$$\ddot{w} = \dot{p} \dot{r} \ddot{\varphi} + \dot{r} \ddot{r} - \dot{r} \dot{r} \dot{\varphi}^2 + \dot{p} \dot{r} \ddot{\varphi} + \dot{p} \ddot{r}.$$

վերջնականապես

$$\ddot{w} = \dot{r} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \dot{p} (2\dot{r} \ddot{\varphi} + r \ddot{\varphi}), \quad (2, 9, 8)$$

Ինչպես արագացվածը, արագացումն էլ աճի երկու՝ մեկը մյուսին ուղղահայաց բաղադրիչներ

$$\ddot{w}_r = \dot{r} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2), \text{ որ կոչվում է սազիսի բաղադրիչ,}$$

$$\ddot{w}_\varphi = \dot{p} (2\dot{r} \ddot{\varphi} + r \ddot{\varphi}), \text{ որ կոչվում է ընդլայնական բաղադրիչ:}$$

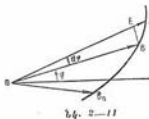
Բեկումեն կոորդինատային սխեմում r և φ մեծություններով որոշվում է կետի դիրքը հարթության վրա. իսկ (2, 9, 5) և (2, 9, 8) արտահայտում են արագացվածը և արագացումը r -ի, φ -ի և նրանց ածանցյալների միջոցով:

3°. Արագացման ընդլայնական բաղադրիչին համարյա տալիս են այլ տեսք: Այդ տեսքին անցնելու համար գտնենք $r^2 \ddot{\varphi}$ արտադրյալի ածանցյալը.

$$\frac{d(r^2 \ddot{\varphi})}{dt} = 2r \dot{r} \ddot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} = r (2\dot{r} \ddot{\varphi} + r \ddot{\varphi}),$$

Համեմատելով (2, 9, 8)-ի հետ, տեսնում ենք, որ

$$\dot{p} (2\dot{r} \ddot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = \frac{\dot{p}}{r} \frac{d(r^2 \ddot{\varphi})}{dt}, \quad (2, 9, 9)$$



$r^2 \ddot{\varphi}$ արտադրյալի իմաստը պարզելու համար գիտնենք 2—11 նկարին:

Նկարում $\overline{OB}$ և $\overline{OD}$ շառավիղ-վեկտորները համապատասխանում են φ և $\varphi + d\varphi$ անկյունների: $\overline{OB}$ և $\overline{OD}$ -ի չափերը հավասար են համապատասխանաբար r , $r + dr$.

$$OE = OB, \quad \sphericalangle BE = rd\varphi; \quad r^2 d\varphi = r(rd\varphi) = 2 \text{ մտկ. } OBE\hat{O}.$$

մակ. $BDE = \frac{1}{2} BE \cdot ED$ երկրորդ կարգից ոչ ավելի ցածր կարգի անասանման փոքր է: Ուստի կարելի է արհամարհել մակ. BDE -ն և ընդունել որ մակ. $OBDO = \frac{1}{2} OB \cdot BE = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$:

$OBDO$ մակերեսը համապատասխանում է φ անկյան $d\varphi$ անիւն dt մասնականիչացում:

Կետի դիրքը t_0 մասնատում նշանակենք B_0 , իսկ շառավիղ-վեկտորը՝ $\overline{OB_0} = \overline{r_0}$:

$B_0 B B'$ թույլ լինի կետի հետագիծը: $OB_0 B O$ մակերեսը նշանակենք ε : ε -ն ալի մակերեսն է, որ գծել է շառավիղ-վեկտորը $t - t_0$ մասնականիչացում, իսկ $OBDO$ մակերեսը կլինի ε մակերեսի դիֆերենցիալը: Հետևապես

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi = d\varepsilon \quad \text{և} \quad \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

(2, 9, 9)-ի միջոցով կարող ենք (2, 9, 8) գրել այսպես

$$\overline{\omega} = \overset{\Delta}{r} (\overset{\Delta}{r} - r \dot{\varphi}^2) + \frac{\overset{\Delta}{p}}{r} \frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt} \quad (2, 9, 10)$$

Ժ. Մասնավոր դեպքեր.

ա) Դիցուք $\overset{\Delta}{r} = \text{const.}$ այսինքն շառավիղ-վեկտորի ուղղությունը անփոփոխ է, $\varphi = \text{const.}$, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$:

Նկատի առնելով $\dot{\varphi}$ և $\ddot{\varphi}$ -ի այս արժեքները, ստանում ենք (2, 9, 5)-ից և (2, 9, 8)-ից

$$\left. \begin{aligned} \overline{v} &= \overset{\Delta}{r} \dot{r}, \quad \overline{\omega} = \overset{\Delta}{r} \ddot{r}, \\ \overset{\Delta}{r} &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2, 9, 11)$$

բ) Դիցուք այժմ $\frac{d\overset{\Delta}{r}}{dt} \neq 0$, իսկ $r^2 = \text{const.}$,

այսինքն $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$:

(2, 9, 5) և (2, 9, 8) վերածվում են՝

$$\left. \begin{aligned} \overline{v} &= \overset{\Delta}{p} r \dot{\varphi} = \overline{v}_\varphi \\ \overline{\omega} &= -\overset{\Delta}{r} r \dot{\varphi}^2 + \overset{\Delta}{p} r \ddot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad \text{և որ } r^2 = \text{const.} \quad (2, 9, 12)$$

Քանի որ շարժումը հարթ է, $r^2 = \text{const}$ պայմանը ցույց է տալիս, որ հեռագիծը մի շրջանագիծ է, որի կենտրոնը համընկնում է շառավիղ-վեկտորի O սկզբնակետի հետ:

Շառավիղ-վեկտորի արդյունի սկզբնակետի և արդյունի հեռագծի զեպքում, շառավիղ-վեկտորը լարաքանչլոր մամենում համընկնում է շրջանագծի շառավղի հետ: Ուստի շոշափողի $\dot{r}$ միավոր-վեկտորը ուղղահայաց է r -ին՝

$$\dot{r} \perp r, \quad \text{հետևապես} \quad \dot{r} \parallel p: \quad (2, 9, 13)$$

Համեմատելով արագություն երկու արտահայտությունները

$$\dot{v} = \dot{r} \dot{s}, \quad \dot{v} = p r \dot{\varphi},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{նկատում ենք, որ} \\ \text{հետևապես (որովհետև} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{v} = \dot{s} = r \dot{\varphi} \\ r = \text{const} \end{array} \quad \dot{s} = r \dot{\varphi} \quad (2, 9, 14)$$

Համեմատենք այժմ (2, 9, 12)-ի արագացման ընդհանուր արտահայտությունը հետ՝

$$\ddot{w} = \dot{r} \ddot{s} + \frac{\dot{r}^2 \dot{s}}{R},$$

$$\ddot{w} = p r \ddot{\varphi} - r r \dot{\varphi}^2,$$

նկատի առնելով (2, 9, 13), կստանանք

$$\dot{r} \ddot{s} = p r \ddot{\varphi}, \quad \frac{\dot{r}^2 \dot{s}}{R} = -r r \dot{\varphi}^2,$$

Այս վերջին արդյունքի ճիշտ լինելը պարզ է. շրջանագծի կորություն շառավիղը (R) համասար է նրա շառավղին՝ $R = r$. Ըստ (2, 9, 14)-ի $v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2$ և վերջապես $\frac{v^2}{R} = r \dot{\varphi}^2$:

Մնում է միայն ցույց տալ, որ $\dot{n} = -\dot{r}$. արդ տեղի է, քանի որ շրջանագծի կենտրոնը և կորություն կենտրոնը համընկնում են, իսկ $\dot{r}$ -ին ուղղահայաց $\dot{r}$ և $\dot{n}$ վեկտորներից աստիճան ուղղված է կենտրոնից զեպի շարժվող կետը, իսկ երկրորդը՝ շարժվող կետից զեպի կենտրոնը:

Այն ավելի մասնավոր դեպքում, երբ $r^2 = \text{const}$ պայմանին
 ավելանում է $\ddot{s} = \dot{r}\dot{\varphi} = 0$ պայմանը, ալիքն է

$$\ddot{s} = \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{s} = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \text{const},$$

շարժումը համաստրաչափ է և ըստ (2, 9, 12)-ի արագացումը վե-
 րածվում է իր նորմալ բաղադրիչին

$$\vec{\omega} = -\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_r = \frac{\dot{s}\dot{\varphi}^2}{R},$$

իսկ արագացումը $\vec{a} = \dot{\varphi}\dot{s}\vec{e}_\varphi = \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, ընդ որում $\vec{\omega} \perp \vec{a}$ ալիքն
 ալիք, ինչ որ հասանել է համաստրաչափ շարժման:

դ) Կա ևս մի շատ կարևոր մասնավոր դեպք, ալի է, երբ

$$\frac{dr}{dt} \neq 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} \neq 0, \quad \frac{d^2r}{dt^2} \neq 0,$$

իսկ

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const} = c^2 \quad (2, 9, 15)$$

Այս դեպքը համակարգի կոստանտային § 4, 7-րդ, ալիք,
 օգտվելով (2, 9, 10)-ից կարելի է տեսլ, որ երբ տեղի ունի (2, 9,
 15) պայմանը, ապա

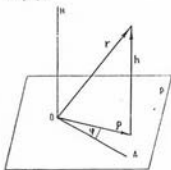
$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{r}(r - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r = \vec{\omega}_r \\ \vec{a} &= \dot{r}\dot{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dot{r}\dot{r} + \frac{\dot{p}}{r}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2, 9, 16)$$

§ 2, 10. Մրագույն և արագացման արանսպոզիցիոնները կարդինալների զանաչին և զեդաչին սխեմներում

Ե. Դիցաք $\vec{r}$ -ը տարածականորեն շարժվող կետի շառավիղ-
 վեկտորն է: Շառավիղ-վեկտորի O սկզբից ասենք կամայական
 OH առանցքը և OH -ին ուղղահայաց P հարթությունը (նկ. 2—12):
 $\vec{r}$ -ը փրլում ենք 2 ալիքիսի բաղադրիչների $\vec{h}$ և $\vec{\varphi}$, որ
 $\vec{h} \parallel OH$, $\vec{\varphi} \perp OH$, (կամ $\vec{\varphi} \perp P$ հարթությանը)

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{\varphi} \quad (2, 10, 1)$$

Համարում ենք OH առանցքի ղերքը տարածություն մեջ առնություն և $\dot{h}$ միավոր վեկտորը հաստատուն, արժեքն t -ից անկախ՝



Նկ. 2-12

$$\dot{h} = \text{const.}, \quad \frac{dh}{dt} = 0.$$

Այսպիսով

$$\dot{h} = \dot{h}h \quad (2, 10, 2)$$

Համատարածության մեջ h -ը r -ի պրոյեկցիան է OH առանցքի վրա և կարող է լինել թե դրական և թե բացասական.

եթե φ -ն արտահայտենք այսպես

$$\varphi = \varphi \quad (2, 10, 3)$$

և քնդառնենք P հարթությունը պատկանող մի $\overline{OA}$ անշարժ կիսաաղիղ և $\angle(\varphi, \overline{OA})$ նշանակենք φ , ապա կետի շարժման շնորհիվ կիսաաղիղի φ վեկտորը, և որտ հետևանքով կիսաաղիղին φ անկյունը և φ միավոր վեկտորը՝

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi) = \dot{\varphi}(t):$$

$$\text{Դանի որ } \varphi = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{\omega} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2, 10, 1)\text{-ից բխում է՝}$$

$$\vec{\omega} = \dot{h} + \dot{\varphi} \quad (2, 10, 4)$$

$$\vec{\omega} = \dot{h} + \dot{\varphi} \quad (2, 10, 5)$$

Օգտվելով (2, 10, 2) և (2, 10, 3)-ից կարելի է (2, 10, 4) և (2, 10, 5)-ը ձևափոխել:

Նախ պարզ է, որ φ բացաղիչքը լիովին համընկնում է նախորդ (§ 2, 9) պարադիգմի r -ի հետ. ահպես որ փոխարինելով (2, 9, 5), (2, 9, 8) և (2, 9, 10)-ում r -ը φ -ով, կստանանք

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi} + p\dot{\varphi} \quad (2, 10, 6)$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} (\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) + \dot{p} (2\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) \quad (2, 10, 7)$$

իսկ

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} (\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) + \frac{\dot{p}}{\dot{\varphi}} \frac{d(\dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi})}{dt}, \quad (2, 10, 8)$$

փոխարինելով $\ddot{r}$ -ը $\ddot{\varphi}$ -ով, բոլոր (2, 9, 4)-ի անհենք

$$\dot{p} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}, \quad \dot{p} \perp \dot{\varphi}$$

ալիսինքն $\dot{p}$ -ն P հարթության վրա է և կազմում է $\frac{\pi}{2}$ անկյուն

$\ddot{\varphi}$ -ի հետ: $\dot{p}$ -ն կարելի է նաև ներկայացնել այլ կերպ՝ $\dot{p} = \dot{h} \times \dot{\varphi}$: Համաձայն (1, 5, 11)-ի այս երկու արտահայտությունները միանգամայն համարժեք են:

Օգտվելով (2, 10, 2)-ից և (2, 10, 6)–(2, 10, 8)-ից վերջնականապես ստանում ենք (2, 10, 4)-ի և (2, 10, 5)-ի փոխարեն

$$\ddot{\varphi} = \dot{h} \dot{h} + \dot{\varphi} \dot{\varphi} + \dot{p} \dot{\varphi} \quad (2, 10, 9)$$

$$\ddot{\omega} = \dot{h} \dot{h} + \dot{\varphi} (\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) + \dot{p} (2\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) \quad (2, 10, 10)$$

$$\ddot{\omega} = \dot{h} \dot{h} + \dot{\varphi} (\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) + \frac{\dot{p}}{\dot{\varphi}} \frac{d(\dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi})}{dt}, \quad (2, 10, 11)$$

h , φ , φ մեծությունների միջոցով որոշվում է կետի գիւրքը գլանային կոորդինատային սխեմում: (2, 10, 9)–(2, 10, 11) ներկայացնում են $\ddot{\varphi}$ -ի և $\ddot{\omega}$ -ի արտահայտությունները h -ի, φ -ի, φ -ի և նրանց ածանցյալների միջոցով:

Ը. Կիրառենք ստացված անհատությունները շարժման այն հասարակ պեղքում (նկ. 2–13), երբ

$$\dot{\varphi}^2 = \text{const}, \quad \dot{h} = c = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{const} \quad (2, 10, 12)$$

Առաջին պարմանը նշանակում է, որ $\ddot{\varphi}$ -ի ծայրը գծում է P հարթության վրա մի (z) շրջանագիծ, որի կենտրոնը համընկնում է r -ի O սկզբի հետ:

Քանի որ $\ddot{r} = \ddot{h} + \ddot{\varphi}$, $\ddot{r}$ -ի ծայրը միշտ կգտնվի z հիմք տնեցող գլանի կողմնային մակերևույթի վրա, այսինքն կետի հետադիմը գլանային կոր է:

$\dot{\varphi}^2 = \text{const}$, $\dot{h} = \text{const} = c$ և $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ պարամետրերով բնորոշվում են կետի արագությունը և արագացումը: Ըստ (2, 10, 9) և (2, 10, 12)-ի

$$\vec{v} = \dot{h} \vec{h} + \dot{\varphi} \vec{\varphi} \quad (\text{քանի որ } \dot{\varphi}^2 = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = 0)$$

$$\vec{v} = \dot{h} c + \dot{\varphi} \omega \quad \text{կամ } v^2 = c^2 + \dot{\varphi}^2 \omega^2 = \text{const}, \quad (2, 10, 13)$$

այսինքն շարժումը համաառարար է:

Համաձայն (2, 10, 12)-ի $\dot{h} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$, այժմ (2, 10, 10)-ը տալիս է

$$\vec{w} = -\dot{\varphi} \vec{\varphi}^2 = -\dot{\varphi} \dot{\varphi}^2 = -\dot{\varphi} \omega^2 \quad (2, 10, 14)$$

այսպիսով արագացումը ուղղված է զլանի շառավիղով դեպի զլանի առանցքը:

Նկատելով, որ $\dot{\varphi} \perp \vec{h}$, $\dot{\varphi} \perp \vec{p}$, (2, 10, 13) և (2, 10, 14)-ից ակնհայտ է, որ $\vec{w} \perp \vec{v}$ ինչպես և պետք է լինի համաառարար շարժման դեպքում:

Մեզ մնում է որոշել հեռավորքը:

Մեզ մնում է որոշել հեռավորքը:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad c = \dot{h} = \frac{dh}{dt}$$

կամ

$$d\varphi = \omega dt, \quad dh = c dt,$$

ընդ որում

$$\omega = \text{const}, \quad c = \text{const}:$$

Ինտեգրելով և նշանակելով φ_0 ու h_0 φ -ի և h -ի արժեքները, որոնք համապատասխանում են ժամանակի $t = 0$ մոմենտին, ստանում ենք

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t, \quad h - h_0 = ct$$

կամ

$$\frac{h - h_0}{\varphi - \varphi_0} = \frac{c}{\omega} = \text{const}:$$

Այստեղից եզրակացնում ենք՝ հեռավորքը զլանի կողմնալին մակերևույթի վրա դասավորված այն կորն է, որում և կոորդինատի փոփոխությունը ուղիղ համեմատական է φ կոորդինատի փոփոխությանը: Այդ կորը պատասխանում է:

Այդ պատասխանին կարելի է հանդել, հենվելով պատասխան-
դիմը բնութագրող մի ևս հատկության վրա:

Որոշենք կորի շոշափողի կազմած անկյունը գլանի OH
առանցքի կամ ձնիչի հետ:

Քանի որ գլանի առանցքի կամ ձնիչի ուղղությունը որոշ-
վում է $\hat{h}$ միավոր վեկտորով, իսկ կորի շոշափողի ուղղությունը՝
միավոր վեկտորով, որոշվելիք անկյան $\cos$ -ը հաժաաար է

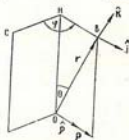
$$\hat{h} \cdot \frac{\dot{s}}{s} = \frac{(\hat{h} \cdot \dot{s})}{s} = \frac{\hat{h} \cdot \dot{\varphi}}{\varphi}$$

կամ (2, 10, 13)-ի հիման վրա

$$\frac{\hat{h} \cdot (\dot{h}c + \dot{p}\omega)}{\sqrt{c^2 + \omega^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \omega^2}} = \text{const.}$$

Միակ կորը, որի բոլոր կետերում շոշափողը կազմում է միև-
նախ անկյունը գլանի առանցքի հետ պատասխանողին է:

3. Եթե արված են O
կետը, OH առանցքը և COH
հարթությունը (նկ. 2—
14ա), ապա կամայական B
կետի գիրքը կարելի է որո-
շել հետևյալ կերպ: Ընդու-
նենք O -ն որպես շառավիղ-
վեկտորների սկիզբը՝ $\overrightarrow{OB} =$
 $= \vec{r}$, առանձնք BOH հարթու-
թյունը:



$\hat{R}1r, \hat{R}1OH$

$\hat{J}1r, \hat{J}2$ ցանկում է
BOH հարթության մեջ

նկ. 2—14ա

B -ի գիրքը BOH հարթության վրա որոշվում է շառավիղ-
վեկտորի r չափով և θ անկյունով, իսկ BOH հարթության գիրքը՝
այն φ անկյունով, որ կազմում է BOH -ը COH հարթության հետ:

Այսպիսով r , θ , φ մեծություններով կարելի է որոշել կամա-
յական կետի գիրքը, այսինքն կետի $\vec{r}$ շառավիղ-վեկտորը:

r , φ , θ կոչվում է սֆերիկ կոորդինատներ:

Համադրելով $\vec{r}$ -ի որոշելու այդ մեթոդը $\vec{r}$ -ի հետևյալ արտա-
հայտության հետ՝

$$\vec{r} = r\hat{r},$$

առնիշտապես տեսնում ենք, որ $\hat{r}$ -ը ֆունկցիա է θ , φ անկյունների՝

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}(\hat{b}, \varphi);$$

Համեմատելի է, որ կետի արագություն

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (2, 10, 15)$$

արտահայտված մեջ

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (2, 10, 16)$$

այստեղ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Իսկ ըստ (1, 6, 7), (1, 6, 6)-ի

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \hat{k} \sin \theta, \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{j};$$

Այսպիսով

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{k} \sin \theta \dot{\varphi} + \hat{j} \dot{\theta}, \quad (2, 10, 17)$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + \dot{\theta} r \hat{j} + \dot{\varphi} k r \sin \theta; \quad (2, 10, 18)$$

(2, 10, 18)-ից դանում ենք

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{v}} = \dot{r} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{\theta} \frac{d}{dt}(r\hat{j}) + r\hat{j} \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\varphi} \frac{d}{dt}(r \sin \theta \hat{k}) + \\ + r \sin \theta \dot{\varphi} \frac{d\hat{k}}{dt} \end{aligned} \quad (2, 10, 19)$$

(2, 10, 16)-ին նման

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{\partial \hat{j}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial \theta} \dot{\theta},$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\partial \hat{k}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial \theta} \dot{\theta}.$$

որ մասերի մասնակի ածանցյալները մեզ արդեն ծանոթ են, ահ'ա (1, 6, 10) (1, 6, 6), (1, 6, 8) և (1, 6, 9):

$$\frac{\dot{\partial j}}{\partial \varphi} = \dot{k} \cos \theta, \quad \frac{\partial j}{\partial \theta} = -\dot{r}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \varphi} = -\dot{r}, \quad \frac{\partial \dot{k}}{\partial \theta} = 0$$

Այսպիսով

$$\frac{dj}{dt} = \dot{k} \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{r} \dot{\theta} \quad (2, 10, 20)$$

$$\frac{dk}{dt} = -\dot{r} \dot{\varphi}$$

Սակայն մեր նպատակն է $\overline{\omega}$ -ն արտահայտել $\dot{r}$, $\dot{k}$, $\dot{j}$ միասին վեկտորների միջոցով, հետևապես պետք է $\overline{\rho}$ -ն արտահայտել ալի միավոր վեկտորների միջոցով:

2-14ր նկարից պարզ է, որ

$$\dot{\rho} = \dot{r} \sin \theta + \dot{j} \cos \theta$$

և այժմ

$$\frac{dk}{dt} = -(\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + \dot{j} \dot{\varphi} \cos \theta): \quad (2, 10, 21)$$



նկ. 2-14ր

Տեղադրելով (2, 10, 20) և (2, 10, 21)-ը (2, 10, 19)-ի մեջ ստանում ենք

$$\begin{aligned} \overline{\omega} = & \dot{r} \ddot{r} + (\dot{k} \dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + \dot{j} \dot{r} \dot{\theta}) + \left[\dot{j} \frac{d(r \dot{\theta})}{dt} + r \dot{\theta} (\dot{k} \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{r} \dot{\theta}) \right] + \\ & + \dot{k} \frac{d(r \sin \theta \dot{\varphi})}{dt} + r \sin \theta \dot{\varphi} (-\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta - \dot{j} \dot{\varphi} \cos \theta) \end{aligned}$$

Վերադաստիարենք դոմարելները, միացնելով այն անդամները, որոնք ունեն միևնույն միավոր վեկտորը.

$$\begin{aligned} \overline{\omega} = & \dot{r}(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \dot{j} \left[\dot{r} \dot{\theta} + \frac{d(r \dot{\theta})}{dt} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right] + \\ & + \dot{k} \left[\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \frac{d(r \sin \theta \dot{\varphi})}{dt} \right] \quad (2, 10, 22) \end{aligned}$$

$\dot{j}$ -ին և $\dot{k}$ -ին կից վեկտորների արտաձայնում թույլ ենք շատ հաճախ ձևափոխում ևն.

$$\dot{r} \dot{\vartheta} + \frac{d(r\dot{\vartheta})}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\vartheta})}{dt}$$

$$r \sin \vartheta \dot{\varphi} + r \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{d(r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta)}{dt},$$

Վերջնականորեն

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} = & \dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 + r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \dot{j} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\vartheta}) - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \right] + \\ & + \dot{k} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta); \end{aligned} \quad (2, 10, 23)$$

$$\S \text{ 2, 11. Թեորեմ } \frac{d v^2}{2} = \overline{\omega} \cdot d\vec{r}$$

1. Երեք երեկոց ենք $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ նույնությամբ՝

$$2\vec{v} \cdot d\vec{v} = dv^2; \quad (2, 11, 1)$$

Հիշելով, որ

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \overline{\omega}, \quad d\vec{v} = \overline{\omega} dt,$$

կարող ենք գրել

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \overline{\omega} dt = d\vec{r} \cdot \overline{\omega} = \overline{\omega} \cdot d\vec{r}; \quad (2, 11, 2)$$

(2, 11, 1) և (2, 11, 2)-ը ստիպ են

$$\frac{dv^2}{2} = \overline{\omega} \cdot d\vec{r} \quad (2, 11, 3)$$

Այս հասարակ, շատ կարևոր թեորեմը, սովորաբար, ապացուցվում է ոչ թե կենսամասնկալում, այլ մի քիչ ձևափոխված, դիմամիկալում և ավանդ կոչվում է կենդանի ամերիկ թեորեմ:

2. (2, 11, 3) թեորեմի ձևի և աշխատանքի կարելի է արտա-
հայտել տարբեր եղանակներով:

Օրինակ, ըստ (1, 7, 1) և (2, 5, 6)-ի

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}} ds$$

$$\vec{\omega} = \frac{\dot{n} v^2}{R} + \dot{\vec{r}} \ddot{s},$$

հետևապես, քանի որ

$$\dot{n} \perp \dot{\vec{r}}, \quad \dot{n} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \ddot{s} ds, \quad (2, 11, 4)$$

նկատի առնելով $\vec{r}$ -ի արտահայտությունը՝

$$\vec{r} = \dot{i}x + \dot{j}y + \dot{k}z,$$

վարդի ևնք դրել

$$d\vec{r} = \dot{i}dx + \dot{j}dy + \dot{k}dz$$

$$\vec{\omega} = \dot{i} \ddot{x} + \dot{j} \ddot{y} + \dot{k} \ddot{z} \quad (2, 11, 5)$$

$$\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz$$

Դիցուք $\vec{r} = \dot{r}\vec{r}$, հարթ շարժման դեպքում ըստ (2, 9, 5) և (2, 9, 8)-ի

$$d\vec{r} = \dot{r}dr + \dot{p}rd\varphi,$$

$$\vec{\omega} = \dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \dot{p}(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}),$$

$$\dot{r} \perp \dot{p}, \quad \dot{r} \cdot \dot{p} = 0,$$

և, սակայն

$$\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)dr + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})rd\varphi \quad (2, 11, 6)$$

կամ, սրովհետև

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}, \quad [\text{տե՛ս } (2, 9, 9)]$$

$$\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)dr + \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}d\varphi$$

3. Տեղադրելով (2, 11, 4), (2, 11, 5) կամ (2, 11, 6)-ը

$$\frac{d\varphi^2}{2} = \bar{\omega} \cdot dr \quad (2, 11, 6)$$

առնչությունն աջ մասը, կստանանք

$$\frac{d\varphi^2}{2} = \bar{s} ds, \quad (2, 11, 7)$$

$$\frac{d\varphi^2}{2} = \bar{x} dx + \bar{y} dy + \bar{z} dz, \quad (2, 11, 8)$$

$$\frac{d\varphi^2}{2} = (\bar{r} - r\bar{r}) dr + (2\bar{r}\bar{r} + r\bar{r}) r d\bar{r}, \quad (2, 11, 9)$$

Այն դեպքում, երբ (2, 11, 3)-ի, (2, 11, 7)–(2, 11, 9)-ի ինտեգրումը հնարավոր է, ձախ մասում ստացվում է արագությունների քառակուսիների կիսաստորեկերով բնական:

Առանձնապես կարևոր են այն մասնավոր դեպքերը, երբ (2, 11, 3)-ի աջ մասը լրիվ դիֆերենցիալ է: Սրանցից պարզագույնն աին է, երբ $\bar{\omega} = \text{const}$:

Վերջին դեպքում

$$\bar{\omega} \cdot dr = d(\bar{\omega} \cdot r)$$

և (2, 11, 3)-ի վերջավոր ձևը կլինի՝

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \quad (2, 11, 10)$$

կամ

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \bar{x}(x_2 - x_1) + \bar{y}(y_2 - y_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) \quad (2, 11, 11)$$

$\bar{s} = \text{const}$ դեպքում (2, 11, 7)-ի հիման վրա

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \bar{s}(s_2 - s_1) \quad (2, 11, 12)$$

(2, 11, 10)–(2, 11, 12)-ում 1 և 2 ինդեքսները համապատասխանում են մասնանկի t_1 և t_2 մասնաններին, կամ կետի 1 և 2 զերքերին:

4. Ակնհայտ է, որ v^2 և $d\frac{v^2}{2}$ նույնպես կարելի է արտահայտել տարրեր ձևերով:

§ 2, 12. Խնդիրներ

Խնդիր 1. S -ը նեաղձի աղեղի երկարությունն է, v -ն կետի արագությունը: Առկա տալ, որ եթե v և S -ը բավարարում են $v^2 = pS$ (p , q -ն հաստատուններ են, $S > 0$) (2, 12, 1) պայմանին, ապա շարժումը համասարաչափ փոփոխող է, արժեքն շոշափող արագացման չափը հաստատուն է:

Լուծում: Այս խնդրում մամանակը չի մասնակցում, հետևապես նպատակահարմար է պահել (2, 11, 3) թևերի միջև, որ պարունակում է v , S , $S \cdot p$

$$d\frac{v^2}{2} = \ddot{s}ds$$

Ինքերենցիկով (2, 12, 1) պարմանք, ստանում ենք

$$dv^2 = pds$$

Համեմատենք վերջին համասարությունները՝

$$2\ddot{s}ds = pds \quad \text{կամ} \quad \ddot{s} = \frac{p}{2} = \text{const.}$$

Խնդիրը լուծված է: Երան p -ի դեպքում շարժումը համասարաչափ արագացող է, հակառակ դեպքում ($p < 0$) շարժումը համասարաչափ դանդաղող է:

Խնդիր 2. A և B կալարանների միջև ճանապարհի երկարությունը համասար է l (նկ. 2—15): Դճանապարհի AC մասում շարժումը համասարաչափ արագացող է՝

$\ddot{s} = \alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$, A և C կետերում արագություն չափերն են $v_A = 0$, $v_C = v = v_B$, CD մասում շարժումը համասարաչափ է, DB մասում շարժումը համասարաչափ դանդաղող է՝ $\ddot{s} = \beta < 0$, $\beta = \text{const}$, $v_B = 0$:

Որոշել՝ զնացքը սրբան (τ) մամանակում է անցնում AB ճանապարհը:



Նկ. 2—15

Լ. Ն. Ժ. Ս. Մ.: Ընդունելով աղեղների մեծացման արգելիչներ
 Ա-ից դեպի B, տեսնում ենք, որ երբ $\bar{s} = \alpha > 0$, շարժումը իրար
 համադրաբար արագացող է, իսկ $\bar{s} = \beta < 0$ դեպքում շար-
 ժումը համադրաբար դանդաղող է: Դիտում ենք պնացքը սրվա-
 կետ: Նշանակենք ճանապարհի մասերը՝ $\cup AC = S_1$, $\cup CD = S_2$,
 $\cup DB = S_3$, իսկ համապատասխան մասնակի միջոցները՝

$$t_C - t_A = \tau_1, \quad t_D - t_C = \tau_2, \quad t_B - t_D = \tau_3$$

Այս նշանակումներով ունենք՝

$$s_1 + s_2 + s_3 = l,$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau$$

AC և DB մասերում ըստ (2, 5, 19)-ի

$$v_C - v_A = \alpha(t_C - t_A), \quad v_B - v_D = \beta(t_B - t_D):$$

Բանի որ $v_A = 0$, $v_B = 0$, ապա

$$v_C = v = \alpha\tau_1, \quad -v_D = -v = \beta\tau_3$$

իսկ

$$\tau_1 = \frac{v}{\alpha}, \quad \tau_3 = -\frac{v}{\beta}.$$

CD ճանապարհամասում, շարժման համադրաբար լինելու պատ-
 ճառով,

$$\tau_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{l - (s_1 + s_3)}{v}.$$

Այսպիսով

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{v}{\alpha} + \frac{l - (s_1 + s_3)}{v} - \frac{v}{\beta}, \quad (2, 12, 2)$$

Բայց խնդրի տվյալներն են՝ $v = v_C = v_D$, α, β, l , իսկ $s_1 =$
 $= \cup AC$ և $s_3 = \cup DB$ անհայտ են և պետք է արտաքսվեն τ -ի
 (2, 12, 2) արտահայտությունից:

Այդ հարմար է կատարել (2, 11, 3)-ի միջոցով. քանի որ
 հեռացվի AC և DB մասերում շարժումը համադրաբար փո-
 փոխվող է: Ըստ (2, 11, 12)-ի

$$\frac{v_1^2 - v_1'^2}{2} = SS_1 = 2S_1 \quad \text{կամ} \quad \frac{v_1'^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} = 2S_1, \quad S_1 = \frac{v_1^2}{2\alpha}$$

$$\frac{v_B^2 - v_D^2}{2} = SS_2 = 3S_2, \quad \frac{-v_D^2}{2} = \frac{-v^2}{2} = 3S_2, \quad S_2 = -\frac{v^2}{2\beta} \quad (\beta < 0):$$

S_1 և S_2 -ի արժեքներով (2, 12, 2)-ը կգրվի այսպես՝

$$\tau = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{l}{v} \quad (2, 12, 3)$$

Վանի որ α, β, l -ը հաստատուններ են, և գիտելով τ որպես v -ի ֆունկցիա տեսնում ենք, որ τ կարող է ունենալ էքստրեմում: Էքստրեմումը որոշելու համար հարկավոր է գտնել τ -ի առաջին և երկրորդ ածանցյալները բաց v -ի՝

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) - \frac{l}{v^2}$$

$$\frac{d^2\tau}{dv^2} = \frac{2l}{v^3} > 0;$$

Քանի որ τ -ի առաջին ածանցյալի նշանի երաշխանքում ենք, որ τ -ի էքստրեմումը միակիսում է: Նշանակելով v_m -ով v -ի այն արժեքը, որի դեպքում τ -ն միակիսում է, ստանում ենք

$$v_m = \frac{l\alpha\beta}{2(\beta - \alpha)}$$

այս կոտորակը դրական է $(\beta < 0, \alpha\beta < 0, \beta - \alpha < 0)$:

Ենդիս 3. Տրված է արագացման և արագության կապը՝

$$\overline{a} = -\alpha^2 \overline{v}, \quad (2, 12, 4)$$

α^2 — հաստատուն դրական սկալար է.

Յույց առնել, որ ա) անցած աղեղի երկարությունը ուղիղ համեմատական է արագության նվազմանը:

բ) այդպիսի շարժում չի կարող առաջանալ ինքն իրենից $v = 0$ դիմակից:

Լուծ ունի: ա) Համաձայն (2, 12, 4)-ի արագացումը հակադրադաս է արագությանը: Իսկ մենք արդեն գիտենք, որ աղեղի գեղձերում շարժումը պետք է ուղղադիմ լինի, ևն'ս $\S 2, 6$ -ի առաջին խնդիրը:

Այս խնդրում ևս մտադրություն չկա շաղկապել աղեղի երկարությունը կամ արագությունը և արագացումը ժամանակի հետ։ Այսպիսով նպատակահարմար է կիրառել (2, 11, 3) առնչությունը՝

$$\frac{d\bar{v}^2}{2} = \bar{\omega} \cdot d\bar{r}$$

կամ (2, 12, 4)-ի հիման վրա

$$v dv = - \tau^2 \bar{v} \cdot d\bar{r}:$$

Ընդունելով, որ աղեղների մեծացման ուղղությունը համընկնում է շարժման ուղղության հետ, սենենք

$$\bar{v} = \tau^2 v, \quad d\bar{r} = \tau^2 ds, \quad \bar{v} \cdot d\bar{r} = v ds:$$

Այսպիսով

$$v dv = - \tau^2 v ds, \quad \text{կամ} \quad dv = - \tau^2 ds:$$

Ինտեգրենք, նկատի առնելով, որ τ^2 հաստատուն է՝

$$v_2 - v_1 = - \tau^2 (s_2 - s_1), \quad \tau^2 (s_2 - s_1) = v_1 - v_2:$$

Այստեղ 1 և 2 ինդեքսները համապատասխանում են ժամանակի t_1 , t_2 մոմենտներին կամ կետի 1 և 2 դիրքերին հետագծի վրա։

Ստացված արդյունքը ցույց է տալիս, որ եթե աղեղի երկարությունը մեծանում է ($s_2 - s_1 > 0$), արագությունը պետք է նվազի ($v_2 - v_1 < 0$)։

բ) (2, 12, 4) պայմանից անմիջապես հետևում է, որ երբ $\bar{v} = 0$ նաև $\bar{\omega}$ պետք է զրո լինի։

Հետևապես, եթե արագությունը զրո է, ապա այն երբեք չի կարողանա փոխվել (քանի որ միաժամանակ $\bar{\omega} = 0$)։ Այսպիսով

$$\bar{\omega} = - \tau^2 \bar{v}$$

պայմանին ենթակա շարժումը երբեք ինքն իրենից չի դուրսնա, եթե կետը հանգստի մեջ է ($\bar{v} = 0$)։

ԿԵՏԻ ՀԱՌԱՎԱՆ ՄԱՍՆԱՎՈՐ ԳԵՊԵՆՐ

§ 3, I. Շրջանային շարժում

1. Երբ շատավիդ վեկտորը տրված է որպես ժամանակի ֆունկցիա, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, արագությունը և արագացումը կարելի է ստանալ, ամենցելով $\vec{r}$ -ը ըստ ժամանակի: Միաժամանակ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ներկայացնում է հետագծի պարամետրական հավասարումը:

Եթե տրված է կետի հետագիծը, ապա հետագծի բարձրացույցը կետում հալանի են շոշափողի և զիստվոր նորմալի $\hat{e}_t$, $\hat{e}_n$ միավոր վեկտորների ուղղությունները, կորություն շատավիդը: Այդ իսկ պատճառով արագությունը և արագացումը որոշելու համար անհրաժեշտ է անենալ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ֆունկցիան, այլ բավական է իմանալ հետագծի աղեղի երկարությունը որպես ժամանակի ֆունկցիա՝

$$s = s(t):$$

Եւ իսկապես s -ի առաջին և երկրորդ ամենցումները ըստ t -ի կլինեն

$$\dot{s} = \dot{s}, \quad \ddot{s} = \ddot{s},$$

գիտենալով բացի ուղղ $\hat{e}_t$, $\hat{e}_n$ միավոր վեկտորները և կորություն շատավիդը R , ստանում ենք

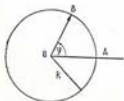
$$\vec{v} = \dot{s} \hat{e}_t = \dot{s} \hat{e}_t, \quad \vec{a} = \ddot{s} \hat{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{e}_n$$

2. Որպես տրված հետագծի օրինակ, գիտենք շրջանային շարժումը. նպատակահարմար է շատավիդ-վեկտորի սկիզբը համա-

աղեղի շրջանի կենտրոնի հետ: Նշանակենք շրջանի շառավիղը R և կենթադրենք, որ աղեղները հաշվում են շրջանագծի λ կետից (նկ. 3-1):

$s = \cup AB$ աղեղին համապատասխանում է կենտրոնական $\varphi = \angle AOB$ անկյունը, բնդ որում

$$s = R\varphi \quad (3.1.1)$$



Նկ. 3-1

կենթադրենք, թե $s = s(t)$ ֆունկցիան հալանի է, հետևապես հալանի են նաև $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$, $\frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ ածանցյալները. արտադրով նաև հալանի կլինեն

$$\varphi = \frac{s}{R}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R} \quad (3.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} = \dot{s} = R\dot{\varphi}, \quad \dot{w} = \ddot{s} = R\ddot{\varphi}, \quad w_n = -\frac{v^2}{R} = -R\dot{\varphi}^2 \\ \ddot{w}_n = -\dot{R}R\dot{\varphi}^2 - R\ddot{\varphi}^2 = -\dot{R}\frac{v^2}{R}, \quad \ddot{w} = \dot{R}\ddot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

Այստեղ $\vec{R} = \vec{OB}$ — շարժվող (B) կետի շառավիղ-վեկտորն է, $-\vec{R} = \vec{BO}$, $-\dot{\vec{R}} = \dot{n}$; $(-\dot{\vec{R}})$ միավոր վեկտորը ուղղված է շարժվող կետից դեպի շրջանագծի կենտրոնը:

Գրեթե ամենաբեր $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ և $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ածանցյալները

համապատասխանորեն անմիջապես են անկյունային արագություն և անկյունային արագացում:

Սակայն պետք է նկատի առնել, որ անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը վեկտորներ են, այդ ցույց կարգի § 5, 1-ում: Իրապես $\dot{\varphi}$ և $\ddot{\varphi}$ հանդիսանում են այդ վեկտորների շափերը կամ թվական արժեքները:

3. (3.1.1)-ից երևում է, որ արված $s = s(t)$ ֆունկցիայով անմիջապես որոշվում է $\varphi = \varphi(t)$ ֆունկցիան (քանի որ շրջանագծի R շառավիղը հաստատուն է) և բնդ հակառակը. այսինքն հալանի R -ի գնալքում $\varphi = \varphi(t)$ և $s = s(t)$ ֆունկցիաները համարժեք են:

Դիտենք շրջանային շարժումը տարբեր $s = s(t)$ | կամ $\varphi = \varphi(t)$ | ֆունկցիաների գնալքում:

Ընդամենը, որ $\Delta(t)y$ կորագրվածություն սխեմա՝ դրսևում է շրջանագծի հալթաթվան վրա, կարող ենք գրել

$$r = \overline{OB} = \dot{x}x = \dot{y}y \quad (3.1.4)$$

Ենթադրենք, որ Ox առանցքը անցնում է շրջանագծի ակն A կետով, որից հաշվվում են անկյունները: Այժմ (նկ. 3-2ա),

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad (3.1.5)$$

բայց (3.1.4) և (3.1.5)-ի $\dot{v} = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}$,

$$\dot{v} = \dot{x} = -R \sin \varphi \dot{\varphi},$$

$$\dot{v} = \dot{y} = R \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (3.1.6)$$

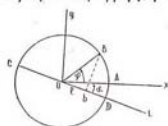
Սահմանափակելով համասարաչափ շարժումով (երբ $\dot{\varphi} = \text{const}$, $\ddot{\varphi} = 0$), ստանում ենք արագացման պրոեկցիաները

$$\ddot{x} = \ddot{x} = -R \cos \varphi \dot{\varphi}^2, \quad \ddot{y} = \ddot{y} = R \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \quad (3.1.7)$$

(3.1.5)-ից (3.1.7)-ից հետևում է

$$\ddot{x} = -\dot{\varphi}^2 x, \quad \ddot{y} = \dot{\varphi}^2 y \quad (3.1.8)$$

Պրոեկցիաներ շրջանակին համասարաչափ շարժում կատարող B կետի նույն մի երրորդ, կամայական OL առանցքի վրա (նկ. 3-2բ):



Նկ. 3-2բ

Անվանենք l այդ պրոեկցիայի համաժայթումը O -ից, իսկ հաստատուն LOx անկյունը՝ α : LOB անկյունը համապար է $\varphi + \alpha$, հետևապես

$$l = R \cos (\varphi + \alpha),$$

$$\frac{dl}{dt} = \dot{l} = -R \sin (\varphi + \alpha) \dot{\varphi},$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \ddot{l} = -R \cos (\varphi + \alpha) \dot{\varphi}^2,$$

$$\text{այսինքն նորից} \quad \ddot{l} = -\dot{\varphi}^2 l \quad (3.1.8')$$

Այսպիսով, երբ շառավիղ-վեկտորի սկիզբը համընկնում է շրջանագծի կենտրոնին հետ, համասարաչափ շրջանակին շարժում կատարող կետի շառավիղ-վեկտորի և արագացման պրոեկցիաների

կապը արտահայտվում է $(3, 1, 8')$ -ով, ընդ որում φ^2 -ն հաստատուն անկյունային արագությունը քառակուսին է: Մենք որ շրջանային հաճախության շարժման դեպքում $\dot{\varphi} = \text{const}$ կարելի է գրել

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1},$$

որտեղ φ_1 և φ_2 մասնակի t_1 , t_2 մոմենտներին համապատասխանող անկյուններն են: Դիցուք կետը կատարում է լրիվ պտույտ T ժամանակամիջոցում, այժմ, երբ $t_2 - t_1 = T$, ապա $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, հետևապես

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T},$$

Այսպիսով հաճախության շրջանային շարժման դեպքում անկյունային արագությունը կարելի է արտահայտել տարրեր ձևերով,

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{2\pi}{T}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{իսկ սկալար արագությունը} \\ v = \frac{ds}{dt} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{2\pi R}{T}, \end{array} \right\} \quad (3, 1, 9)$$

Այդ շարժման դեպքում $\ddot{s} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, այսինքն շոշափող արագացումը զրո է և $(3, 1, 3)$ -ից ու $(3, 1, 9)$ -ից հետևում է, որ

$$\ddot{\mathcal{W}} = \ddot{\mathcal{W}}_n = \frac{h\dot{\mathcal{W}}^2}{R} = -R \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad (3, 1, 10)$$

Ինչպես տեսնում ենք, հաճախության շրջանային շարժման դեպքում լրիվ արագացումը ուղղված է դեպի շրջանի կենտրոնը, արագացման չափը հաստատուն է և հաճախ $R\dot{\varphi}^2 = R \frac{4\pi^2}{T^2}$,

4. Անցնենք հաճախության փոփոխվող շրջանային շարժման, երբ ըստ $(2, 5, 13)$ -ի

$$s = a + bt + ct^2, \quad (3, 1, 11)$$

որտեղ a , b , c հաստատուններ են,

$$\dot{v} = \dot{s} = b + 2ct$$

4. Համաձայն (3, 1—2)՝

$$\ddot{\varphi} = \frac{b + 2ct}{R}$$

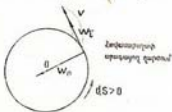
Արագացումների համար ունենք

$$\ddot{s} = \ddot{w} = 2c, \quad \ddot{\varphi} = \frac{2c}{R}, \quad \ddot{w}_c = \frac{2c}{R}$$

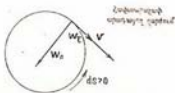
$$\begin{aligned} \ddot{w}_c &= \frac{\dot{w}_c}{R} = -\dot{R}R\dot{\varphi}^2 = -\overline{R}\dot{\varphi}^2 = -\frac{\overline{R}}{R^2}(b + 2ct)^2 = \\ &= -\frac{\dot{R}}{R}(b + 2ct)^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{w} &= \overline{w}_c + \overline{w}_s = -\overline{R}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{R}\dot{R}\dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} \perp \overline{R} \\ w &= R\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3, 1, 12)$$

(3, 1, 11) շարժումը համասարաչափ արագացող է, երբ b և c հաստատունները նույնանշան են (նկ. 3—3ա, բ)։ Եթե b և c -ն



Նկ. 3—3ա



Նկ. 3—3բ

տարանշան են, շարժումը կլինի համասարաչափ արագացող t -ի ափս արժեքների համար, երբ $(b + 2ct)$ ու c նույնանշան են, t -ի այլ արժեքների դեպքում շարժումը համասարաչափ դանդաղող է (նկ. 3—3ա, բ)։ (Տե՛ս § 2, 5, 6², որտեղ ընդունված են այլ նշանակումներ)։

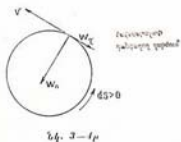
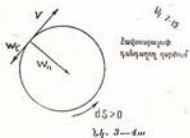
Դիցուք t_1 և t_2 մոմենտներին համապատասխանում են աղեղի s_1 , s_2 երկարությունները, և v_1 , v_2 սկալար արագությունները,

իսկ $\ddot{s} = 2c = \text{const}$: Այս պայմաններում (2, 11. 7) թեպետև
կընդունի

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \ddot{s} (s_2 - s_1) \quad (3, 1, 13)$$

տեսքը. (3, 1, 1) և (3, 1, 2)-ի հիման վրա կստանանք

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \ddot{\tau} (\tau_2 - \tau_1); \quad (3, 1, 13')$$



Խնդիր: Անվանենք $(\overline{w}, n)$ անկյունը և Որոշել լքշ որպես
ժամանակի ֆունկցիա համապատասխան փոփոխվող շարժման դեպ-
քում: Ինչպիսի գործակիցների դեպքում լքշ հակադարձ համեմա-
տական է ժամանակին:

§ 3, 2. Կերպագրող տատանումներ (հիմնական առնչություններ)

1. Շրջանագծով կամախականորեն շարժվող կետը կարելի է
պրոյեկտել մի կամախական հաստատառան տառնցքի վրա և ախպի-
սով ստանալ տարբեր տեսակի ուղղադիմ շարժումներ: Սրանցից
մեկը շատ կարևոր է:

Դիցուք B կետը գտնվում է Մ շրջանագծի վրա, որի կեն-
տրոնն է O, իսկ շտապիրը R: Ենթադրենք, COL տառնցքը գա-
սավորված է շրջանագծի հարթության վրա և անցնում է Մ-ի O
կենտրոնով (նկ. 3-5):

B-ի պրոյեկցիան COL տառնցքի վրա նշանակենք b: Եթե
B-ն շարժվում է շրջանագծով միշտ միևնույն ուղղությամբ, իսկ
նրա արագության չափը փոփոխվում է կամախականորեն, b-ն
կշարժվի COL տառնցքի հետ համընկնող CD տրամագծով, գտր-
չդալով վերջինիս սահմաններից:

Հասնելով արամագծի ծայրերից մեկին, օրինակ C -ին, b -ն փոխում է շարժման ուղղությունը, մոտենում է D -ին, ապա հասնելով D -ին սկսում է շարժվել դեպի C և այլն:

b -ի ուղղության շարժումը կոչվում է ուղղացիժ տատանումներ (հոնումներ): Երբ B -ի առ շրջանալին շարժումը հավասարաչափ է, b -ի շարժումը կոչվում է հարմոնիկ (ներդաշնակ) տատանումներ:

2. Նշանակենք LOB անկյունը

φ , իսկ b -ի հեռավորությունը O -ից՝

$$Ob = l,$$

առ նշանակումներով կունենանք՝

$$Ob \quad l = R \cos \varphi \quad (3, 2, 1)$$

B -ի արագության չափը ընդ $R\dot{\varphi}$

($\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$) բառ (3, 1, 3)-ի. բանի

որ B -ի շարժումը հավասարաչափ է

$$\begin{aligned} v &= R\dot{\varphi} = \text{const} \quad | \\ \dot{\varphi} &= \text{const}, \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad | \end{aligned} \quad (3, 2, 2)$$

Հետևապես b -ի արագությունը և արագացումը կլինեն

$$\dot{l} = -R \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (3, 2, 3)$$

$$\ddot{l} = R \cos \varphi \dot{\varphi}^2 = -l \dot{\varphi}^2 \quad (3, 2, 4)$$

(3, 2, 1) և (3, 2, 3)-ից ստացվում է

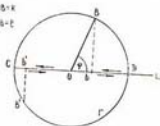
$$(\dot{l})^2 + \ddot{l} = (R \dot{\varphi})^2$$

կամ

$$\dot{l}^2 = (R^2 - l^2) \dot{\varphi}^2 \quad (3, 2, 5)$$

Լնդանվում է տատանվող կետի երկու դիրքերի մեկնամեծ հեռավորությունը (այսինքն շրջանագծի DC արամագծի երկայնությունը) անվանել թափի կետը (այսինքն շրջանագծի շառավիղի երկարությունը կամ տատանվող կետի մեկնամեծ հեռավորությունը արագացման կենտրոնից կոչվում է տատանումների ամպլիտուդ):

LOB անկյունը (նկ. 3—5) կոչվում է տատանումների փուլ (կամ ֆազ):

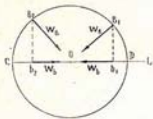


Նկ. 3—5

§ 3, 3. Ներդասանակ տատանումների հատկությունները

Ներդաշնակ տատանումներին վերաբերող մի բանի այլ առնչություններ կարտածվեն § 3, 4-ում: Իսկ այժմ պարզենք հարմոնիկ տատանումների հատկությունները, ելնելով (3, 2, 4), (3, 2, 5) առնչություններից և հիշելով, որ հարմոնիկ տատանումները b կետի շարժումն է այն դեպքում, երբ B կետը կատարում է համասարաչափ շարժում շրջանագծով:

1. Շրջանային համասարաչափ շարժման դեպքում արագացումը միշտ ուղղված է դեպի շրջանագծի O կենտրոնը: Հետևապես ներդաշնակ ուղղագիծ տատանումների դեպքում էլ արագացումը պետք է ուղղված լինի դեպի կենտրոնը: Նույնը անմիջապես հետևում է նաև (3, 2, 4) բանաձևից:



Նկ. 3—6

Իսկապես, դիցուք (Նկ. 3—6), b կետը գրավում է b_1 , դիրքը, այսինքն դասավորված է O -ից աջ: Այդ դեպքում $l_1 = Ob_1 > 0$ և համաձայն (3, 2, 4)-ի $\ddot{l} < 0$ այսինքն արագացումը ուղղված է b_1 -ից դեպի O : Եթե, ընդհակառակը b -ն գրավում է b_2 դիրքը (գտնվում է O -ից ձախ) ապա $l_2 = Ob_2 < 0$ և ըստ

(3, 2, 4)-ի $\ddot{l} > 0$, արեմն արագացումը նորից ուղղված է դեպի O :

Այն հաստատուն կետը, դեպի որը միշտ ուղղված է արագացումը, կոչվում է արագացումների կենտրոն: Ներկա դեպքում շրջանագծի O կենտրոնը հանդիսանում է B և b կետերի արագացումների կենտրոնը:

2. Ներդաշնակ ուղղագիծ տատանումների դեպքում արագացման չափը ուղիղ համեմատական է կետի հեռավորությունը արագացումների կենտրոնից:

Իբրք

$$\ddot{l} = -\dot{\varphi}^2 l, \quad \dot{\varphi}^2 = \text{const},$$

Հետևապես

$$|\ddot{l}| = \dot{\varphi}^2 |l|:$$

Այսպիսով արագացման չափը համեմատ է մեծագույն արժեքի CD արամագծի C, D ծայրակետերում, երբ կետը մոտենում է O կենտրոնին արագացման չափը, աստիճանաբար նվազելով, գաւնում է դրա O կետում:

$$I^2 = -\dot{I}^2 (R^2 - I^2) \quad (3, 2, 5)$$

բանաձևից հետևում է, որ $l = O$ Նևտոնյան շափր մեծանալիս, l կետի արագության շափր փոքրանում է, և ընդհանրապես Այսպիսով արագության շափր, որ գրա է C, D կետերում (որովհետև $I^2 = R^2$) հասնում է մաքսիմումի O կենտրոնում: Այս մաքսիմումը՝

$$I|_{\max} = R\dot{I}^2 \quad (3, 3, 1)$$

(3, 3, 1)-ը ստացվում է (3, 2, 5)-ից, եթե ընդունենք $I^2 = 0$ և բխում է նաև դուռ երկրաչափական դատողություններից: Ահա թե ինչպես, l կետի l արագությունը հանդիսանում է B կետի v արագության պրոնկցիան COL առանցքի վրա: Երբ $OB \perp COL$, $v_B \parallel COL$, հետևաբար

$$[I]_{\max} = [v_B] = R\dot{I}^2$$

4. Հարժենիկ տատանումների ընթացքում CD արամագծի լուրաքանչյուր կետով b -ն անցնում է երկու տարրեր ուղղություններով՝ շարժվելով D -ից դեպի C և C -ից D : Այդ է հասկացվում, երբ ասում են, թե CD արամագծի լուրաքանչյուր կետը անցնում է երկու հակառակ ուղղություններով:

(3, 2, 5) բանաձևում մտնակցում են l -ի և l -ի քառակուսիները, ուրեմն (3, 2, 5)-ից կարող ենք եզրակացնել.

ա) միևնույն զիրքում ներդաշնակ տատանումներ կատարող կետի արագության շափր նույնն է երկու տարրեր ուղղությունների համար:

բ) արագացման O կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկ դիրքերում կետի արագության շափր նույնն է:

5. Դիցուք B կետը կատարում է հավասարաչափ շրջանային շարժում և անցնելով $BCB'DB$ ճանապարհը վերադառնում է իր B ելակետը:

B կետի շարժման հետ միաժամանակ շարժվում է b կետը $bCB'Db$ հետագծով և վերադառնում է իր b ելակետը, որում ունենում է իր ելակետային արագությունը: Այսպիսի դեպքում ասում են, որ B կետը կատարել է լրիվ պտույտ շրջանագծով, իսկ b կետը կատարել է լրիվ տատանում:

Լրիվ տատանումը բաղկացած է bC, Cb, bD և Db հատվածներից և լրիվ տատանման սահմանման մեջ ընդգծված է «որում

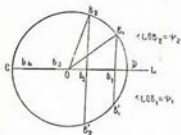
ունենում է իր ելավիճն արագությունը՝ արտահայտությունը. որովհետեւ bC հատվածի սկզբում, և D -ի վերջում b -ի արագությունները բացի միևնույն չափից ունեն միևնույն ուղղվածություն, իսկ bC -ի սկզբում և C -ի վերջում արագությունները միմյանից հակադրական են: Այսպիսով լրիվ տատանում հանդիսանում է bC^2D -ն, այլ ոչ թե bC կամ bD :

Այն T ժամանակամիջոցը, որում B կետը կատարում է լրիվ պտույտ կոչվում է լրիվ պտույտի ժամանակ կամ լրիվ պտույտի պարբերություն

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ,$$

նույն ժամանակամիջոցը, որում b կետը կատարում է լրիվ տատանում, կոչվում է լրիվ տատանման պարբերություն:

6. Հարմոնիկ ուղղադիմ տատանման դեպքում միևնույն հատվածը անցվում է երկու հակառակ ուղղությունների միևնույն ժամանակամիջոցում: Նաև միևնույն ժամանակամիջոցում անցվում



Նկ. 3—7

և O կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկ երկու հատվածները, օրինակ b_1b_2 և b_3b_4 -ը (Նկ. 3—7):

Ապացուցելու համար տանենք COL տանցքին ուղղահայաց լարերը $B_1B'_1$ և $B_2B'_2$ (Նկ. 3—7): B_1 և B'_1 կետերին համապատասխանում է b_1 կետը, իսկ B_2 և B'_2 կետերին՝ b_2 -ը:

Պարզ է, որ b կետը անցնում է b_1b_2 հատվածը այն τ ժամանակամիջոցում, ինչ որ B կետը՝ $\cup B'_2B'_1$ աղեղը: Քանի որ B -ի շարժումը հավասարաչափ է, իսկ $\cup B_1B_2 = \cup B'_1B'_2$, ապա նույն τ ժամանակամիջոցում B -ն անցնում է $B'_2B'_1$ աղեղը, իսկ b -ն b_2b_1 հատվածը:

Այսպիսով, իսկապես b_1b_2 և b_2b_1 հատվածները անցվում են b կետով միևնույն ժամանակամիջոցում:

Նման ձևով ապացուցվում է նաև b_1b_2 ու b_3b_4 սիմետրիկ հատվածների անցման ժամանակամիջոցների հավասար լինելը:

7. Երբ b_1 , b_2 կետերը հայտնի են, τ ժամանակամիջոցը հեշտ է որոշելու Իսկապես B_1B_2 աղեղի երկարությունը՝

$$s = R(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1),$$

որտեղ

$$\dot{\varphi}_1 = \angle B_1 O L, \quad \dot{\varphi}_2 = \angle B_2 O L,$$

B -ի արագությունը $z = R\dot{\varphi}$, ուստի

$$z = \frac{s}{\tau} = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1}{\tau}, \quad (3, 3, 2)$$

Այստեղ

$$\tau_1 = \arccos \frac{l_1}{R}, \quad \tau_2 = \arccos \frac{l_2}{R}, \quad l_1 = Ob_1, \quad l_2 = Ob_2,$$

հետևապես

$$z = \left(\arccos \frac{l_2}{R} - \arccos \frac{l_1}{R} \right) : \dot{\varphi}, \quad (3, 3, 3)$$

Օգտագործելով և նկատելով, որ (3, 3, 3)-ի փոխարեն կարելի է նաև գրել

$$z = \left(\arcsin \frac{l_2}{R} - \arcsin \frac{l_1}{R} \right) : \dot{\varphi}, \quad (3, 3, 4)$$

(3, 3, 3), (3, 3, 4) բանաձևերը համարժեք են ահա թե ինչու.

$$\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 = \left(\dot{\varphi}_2 - \frac{\pi}{2} \right) - \left(\dot{\varphi}_1 - \frac{\pi}{2} \right),$$

իսկ

$$\cos \left(\dot{\varphi}_1 - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \dot{\varphi}_1, \quad \cos \left(\dot{\varphi}_2 - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \dot{\varphi}_2$$

§ 3, 4. Կերպագրման աստանոսման (շարունակություն)

1. Մի քանի մանրամասնություններ պարզելու համար դիտենք շրջանագծով համաստարաչափ շարժվող B կետի պրոեկցիաները Ox , Oy առանցքների վրա, ենթադրելով, որ xOy կոորդինատային սիստեմը դաստիարակված է շրջանագծի հարթության վրա, կոորդինատային սիստեմի O սկիզբը համընկնում է շրջանագծի կենտրոնի հետ, իսկ Ox առանցքը հասում է շրջանագծի ակն առում, որից հաշվվում են անկյունները (նկ. 3—2բ):

Նշանակելով $\angle xOB = \varphi$, իսկ OB -ի պրոեկցիաները՝ x , y , աստանում ենք

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} = \dot{I}x + \dot{j}y,$$

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi,$$

որտեղ R -ը շրջանագծի շառավիղն է:

Եթե պարամետրիկներ նաև մամռնակը հաշվել այն մոմենտից, երբ β -ն անցնում է A կետով, ապա

$$\varphi = \dot{\varphi}t \left(\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \right), \quad \varphi = 0, \quad \text{երբ} \quad t = 0.$$

Հետևապես

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \dot{\varphi}t, & y &= R \sin \dot{\varphi}t \\ \dot{x} &= -R \dot{\varphi} \sin \dot{\varphi}t, & \dot{y} &= R \dot{\varphi} \cos \dot{\varphi}t \\ \ddot{x} &= -R \dot{\varphi}^2 \cos \dot{\varphi}t, & \ddot{y} &= -R \dot{\varphi}^2 \sin \dot{\varphi}t \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

$$\ddot{x} = -\dot{\varphi}^2 x, \quad \ddot{y} = -\dot{\varphi}^2 y, \quad (3.4.2)$$

Նախորդ § 3, 1-ում գիտված COL առանցքը միանգամայն կամարակա՛ն է (նկ. 3—2բ): Անվանենք α հաստատուն LOX անկյունը՝

$$\alpha = \angle LOx$$

արժև

$$\psi = \varphi + \alpha = \dot{\varphi}t + \alpha \quad (3.4.3)$$

և (3.4.1) (3.4.2) տանջաթիւնները կարտագրվեն այսպես՝

$$l = R \cos (\dot{\varphi}t + \alpha), \quad \dot{l} = -R \dot{\varphi} \sin (\dot{\varphi}t + \alpha),$$

$$\ddot{l} = -R \dot{\varphi}^2 \cos (\dot{\varphi}t + \alpha), \quad (3.4.4)$$

$$\ddot{l} = -\dot{\varphi}^2 l, \quad (3.4.5)$$

Համեմատելով, տեսնում ենք, որ անկախ պրոեկցիոման առանցքի դիրքից (3.4.2) և (3.4.5) բանաձևերի աջ մասերը միանգամայն նման են, իսկ (3.4.1) և (3.4.4)-ի աջ մասերը արտաքուստ մի փոքր տարբերվում են իրարից: Սակայն նկատի առնելով, որ

$$\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \varphi, \quad \cos \left(\dot{\varphi}t - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \dot{\varphi}t,$$

Համագումարում ենք, որ հարմարեցնելով տատանումների հաճախության ամենաընդհանուր տեսքը (3, 4, 4)-ն է, որում հաստատուն x անկյունը կարող է, նախած զեղբի, ունենալ այն կամ այն արժեքը:

2. Հալանի են բաղմամբիվ զեղբեր, երբ ուղղադիմ ներդաշնակ տատանումներ կատարող կետը բոլորովին էլ չի հանդիսանում շրջանագծով հավասարաչափ շարժվող կետի պրոեկցիան:

Այդպիսի զեղբերում, անվանելով Ox առանցք այն ուղիղը, որով կատարվում են կետի տատանումները, կարող ենք նրանց հավասարումը գրել այսպես

$$x = a \cos(kt + \alpha), \quad (3, 4, 6)$$

որտեղ շրջանագծի R շառավիղը փոխարինված է a հաստատունով, իսկ հաստատուն $\frac{1}{2}$ անկյունային արագությունը՝ k հաստատունով:

Այժմ (3, 4, 2)-ի կամ (3, 4, 5)-ի փոխարեն կունենանք

$$\ddot{x} = -k^2 x: \quad (3, 4, 7)$$

Հաճախ հարմարեցնելով տատանումների հավասարմանը ապիս ենք արե տեսքը

$$x = b \cos kt + c \sin kt, \quad (3, 4, 8)$$

որտեղ b , c հաստատուն զործակիցներ են:

(3, 4, 8)-ը անմիջապես ստացվում է (3, 4, 6)-ից, եթե նկատի առնենք, որ

$$\cos(kt + \alpha) = \cos kt \cos \alpha - \sin kt \sin \alpha$$

և հետևապես,

$$x = a \cos \alpha \cos kt - a \sin \alpha \sin kt: \quad (3, 4, 9)$$

Համեմատենք (3, 4, 8) և (3, 4, 9), պարզ է, որ

$$\left. \begin{aligned} b &= a \cos \alpha, \quad c = -a \sin \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{c}{b}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c}{b}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{c}{b} \end{aligned} \right\} \quad (3, 4, 10)$$

(3, 4, 10)-ից նույն ստանում ենք

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad (3, 4, 11)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad (3, 4, 12)$$

(3, 4, 6) հավասարման մեջ α -ն ամպլիտուդն է. ($k l = 2$)—ֆազը: (3, 4, 8) հավասարման մեջ անմիջապես չեն մասնակցում ոչ ամպլիտուդը, ոչ էլ ֆազը. բալց արդ երկու մեծությունները արտահայտվում են b և c -ի միջոցով, համաձայն (3, 4, 10) և (3, 4, 11)-ի:

3. Մինչև այժմ ենթադրվում էր, որ արագացման կենտրոնը համընկնում է x առանցքի O սկզբի հետ: Հետաքրքիր է նաև այն դեպքը, երբ արագացման O' կենտրոնը գտնվում է Ox առանցքի սկզբից $z = OO'$ կամայական հեռավորության վրա (նկ. 3—8). որտեղ b -ն տատանվող կետն է. b -ի հեռավորությունը արագացման O' կենտրոնից՝

$$x' = O'b = Ob - OO' = x - z,$$

Հեռեապես (3, 4, 6) կգրվի
ախպես՝

$$\left. \begin{aligned} x - z &= a \cos(kt + \alpha) \\ \text{կամ } x &= a \cos(kt + \alpha) + z \end{aligned} \right\} \quad (3, 4, 13)$$

նկ. 3—8

ընդ որում z կարող է լինել և բացասական, և դրական. նկատման $z > 0$:

Ախտեղից ստացվում է

$$\ddot{x} = -a k^2 \cos(kt + \alpha)$$

կամ

$$\ddot{x} = -k^2(x - z), \quad (3, 4, 14)$$

Այսպիսով (3, 4, 13) և (3, 4, 14)-ը ներկայացնում են ներդաշնակ ուղղադիֆ տատանումների հավասարումները, երբ արագացման O' կենտրոնը գտնվում Ox առանցքի վրա, և $OO' = z$:

Ակնհերե է, որ

$$\ddot{x} = -k^2 x + z \quad (3, 4, 15)$$

հավասարումը, որտեղ z հաստատուն է

կամ $\ddot{x} - z = -k^2 x \quad (3, 4, 15)$

հավասարումը բերվում է (3, 4, 14) տեսքի. բաժանելով z -ը երկուսով, որ

$$\ddot{\xi} = k^2 \xi,$$

և մենք կստանանք

$$\ddot{x} = -k^2(x - z)$$

առնչությունը, որը, ինչպես ասված է, հանդիսանում է ներդաշնակ ուղղադիմ տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը:

4. Փոխարինելով (3, 2, 5)-ում $\dot{\varphi}$, R , l , $\dot{l}$ համապատասխանորեն k , a , x , $\dot{x} = \dot{\varphi}$ -ով, որտեղ a -ն տատանումների ամպլիտուդն է, կատանանք

$$\dot{\varphi}^2 = k^2 (a^2 - x^2)$$

կամ

$$\dot{\varphi}^2 + k^2 x^2 = k^2 a^2, \quad (3, 4, 16)$$

Այստեղից ունենք

$$\dot{\varphi} = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm k \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$dt = \pm \frac{dx}{k \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (3, 4, 17)$$

Անտրոշ ինտեգրումով հանգում ենք

$$t = \pm \frac{1}{k} \arcsin \frac{x}{a} + \xi \quad (3, 4, 18)$$

բանաձևին (որում ξ — ինտեգրման հաստատունն է):

Երցուք $t = t_0$ -ին համապատասխանում է x -ի x_0 արժեքը, այդ դեպքում

$$t - t_0 = \pm \frac{1}{k} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \arcsin \frac{x_0}{a} \right), \quad (3, 4, 19)$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $t_0 = 0$ (3, 4, 19)-ը տալիս է

$$t = \pm \frac{1}{k} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \arcsin \frac{x_0}{a} \right), \quad (3, 4, 19')$$

$t - t_0$ այն τ ժամանակամիջոցն է, որում կեսը x_0 -ից անցնում է x դիրքը: Այսպիսով (3, 3, 3) և (3, 3, 4)-ը համարվել են (3, 4, 19) բանաձևին, որը ասացվել է բուլբուլին այլ ևզանակով:

Խնդիրներ:

Խնդիր 1. CD -ն հարմոնիկ ուղղադիմ տատանումների թափն է (նկ. 3—9). $OC = OD$: Ցույց տալ, որ ա) եթե OA և AC հասկանալի անցվում են հավասար ժամանակամիջոցներում, ապա



Նկ. 3—9

$$AC:OA = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) : \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{3}{7}$$

բ) հավասար OE , EC հաստատունները անցվում են անդամների τ_1, τ_2 ժամանակամիջոցներում, որոնց հարաբերությունը հավասար է

$$\arccos \frac{1}{2} : \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{2}\right),$$

և ն դ ի թ 2: CD -ն հարմոնիկ ուղղադիմ տատանումների թափն է: Ապացուցել, որ C, D կետերի միջև միջին արագությունը $v = 0,637 v_m$, որտեղ v_m -ը հարմոնիկ տատանման մեծագույն արագությունն է:

և ն դ ի թ 3: A_1, A_2 կետերը կատարում են հարմոնիկ ուղղադիմ տատանումներ, ունենալով միևնույն k դորժակիցը. A_1 -ի արագացման կենտրոնն է O_1 , A_2 -ինը O_2 : Անվանենք $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ A_1 ու A_2 -ի արագությունները, երբ $O_1A_1 = O_2A_2$: Ընդունելով $\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{v}$ տարբերությունը անսահման փոքր, որոշել երկու տատանումների a_1, a_2 ամպլիտուդաների և φ_1, φ_2 ֆազերի տարբերությունները ($a_2 - a_1 = \delta a$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \delta \varphi$):

Լ ու լ ծ ա լ մ: Ըստ (3, 4, 16)

$$v_1^2 + k^2 x_1^2 = k^2 a_1^2, \quad v_2^2 + k^2 x_2^2 = k^2 a_2^2,$$

որտեղ v_1 և v_2 արագությունները, համաձայն խնդրի պայմանի՝ համապատասխանում են հավասար x -երի՝ $x_1 = x_2$:

Այսպիսով

$$v_2^2 - v_1^2 = k^2 (a_2^2 - a_1^2)$$

կամ, քանի որ $\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{v}$ տարբերությունը անսահման փոքր է,

$$2\bar{v}_1\bar{v} = 2k^2 a_1 \delta a,$$

Բայց ըստ (3, 4, 6)-ի $\bar{v}_1 = -a_1 k \sin \varphi_1$, $\varphi_1 = kt + \tau_1$, այսինքն

$$-(a_1 k \sin \varphi_1) \bar{v} = k^2 a_1 \delta a,$$

$$\delta a = -\frac{\bar{v}}{k} \sin \varphi_1.$$

Ամենաընդհանուր դեպքում, (3, 4, 6)

$$x_1 = a_1 \cos \varphi_1 = a_1 \cos (kt + \alpha_1)$$

$$x_2 = a_2 \cos \varphi_2 = a_2 \cos (kt + \alpha_2)$$

Կամ, սրտիկեան $x_1 = x_2$,

$$a_1 \cos \varphi_1 = a_2 \cos \varphi_2 = (a_1 + \delta a) (\cos \varphi_1 - \delta \cos \varphi_1),$$

Եթե $\cos \varphi_2 = \cos \varphi_1$ տարբերությունը նշանակենք $\delta \cos \varphi_1$:

Այսպիսով

$$\frac{a_1}{a_1 + \delta a} = 1 - \frac{\delta a}{a_1} = \frac{\cos \varphi_1 + \delta \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1} = 1 - \frac{\sin \varphi_1 \delta \varphi}{\cos \varphi},$$

$$\frac{\delta a}{a_1} = \frac{\sin \varphi_1 \delta \varphi}{\cos \varphi_1},$$

$$\delta \varphi = \frac{\delta a}{a_1 \sin \varphi_1}.$$

Խնդիր 4: M կետը կատարում է ներդաշնակ տատանումներ $CA_1A_2A_3D$ ուղղով (նկ. 3-10). A_1 և A_2 դիրքերում M -ը առի նախն արագությունը, իսկ A_3 -ը M -ի ամենահեռա դիրքն է (հաշված արագացման կենտրոնից):

Գրանալով, որ $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$

նկ. 3-10

և որ M -ը անցնում է A_1A_2 հատվածը

չ ժամանակահատվածում և $t = 0$ մոմենտում գտնվում է A_3 -ում, արտահայտել M -ի դիրքը որպես ժամանակի ֆունկցիա:

Լուծում: Անվանենք CD ուղիղը Ox առանցք, ընդունելով O -ն որպես արագացման կենտրոն: M -ի արագիւր և արագությունը անվանենք x և $\dot{x}$, իսկ A_1 և A_2 կետերի արագիւրները՝ x_1 , x_2 :

Համաձայն (3, 4, 16)-ի

$$\dot{x}_1^2 + k^2 x_1^2 = \dot{x}_2^2 + k^2 x_2^2$$

և քանի որ $\dot{x}_1^2 = \dot{x}_2^2$, ստանում ենք՝ $x_1^2 = x_2^2$:

Ըստ խնդրի պայմանի A_1 և A_2 -ը տարբեր կետեր են, $x_1 \neq x_2$.

հետևապես

$$x_1 = -x_2;$$

Բացի այդ

$$x_2 - x_1 = A_1 A_2 = a.$$

աբևեմ

$$x_2 = \frac{a}{2}, \quad x_1 = -\frac{a}{2}.$$

Ընդ որում արտախնները հաշվվում են արագացման O կենտրոնից:

Այսպիսով A_1 և A_2 կետերը սխեմայի կեն O -ի նկատմամբ: «Ամպլիտուդ» դադարի ասանման միջ հետևում է, որ այս խնդրում ամպլիտուդը՝

$$R = \frac{a}{2} + b;$$

(3, 3, 3)-ի հիման վրա:

$$\tau = \frac{\arccos \frac{a}{2\left(\frac{a}{2} + b\right)} - \arccos \frac{-a}{2\left(\frac{a}{2} + b\right)}}{\dot{\varphi}}$$

կամ

$$k = \dot{\varphi} = \frac{2 \arccos \frac{a}{a + 2b}}{\tau}.$$

Ուսենալով R ամպլիտուդը և k դորժակիցը, դժվար չէ, օգտվելով (3, 4, 6)-ից, որոշել $x = x(t)$ ֆունկցիան:

Խնդիր 5: CD -ն հարմոնիկ առանձնության թափն է



(նկ. 3—11), իսկ E, F կետերը ընտրված են այնպես, որ $CE = FD$: Տառանվոդ կետը անցնում է CE և CF հատվածները համապատասխանորեն τ_1 և τ_2 ժամանակահատվածներում:

Նկ. 3—11

Որոշել լրիվ առանձնաժամանակները:

Խնդիր 6: Ox առանցքի վրա դասավորված են արագացման երկու կենտրոններ O_1, O_2 : M կետը կունենար $\ddot{x}_1 = -\kappa^2 x_1$ արագացում, եթե լիներ միայն O_1 կենտրոնը, միայն O_2 կենտրոնը կառաջացներ ($-\kappa^2 x_2$) արագացում:

Դռնել M -ի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը արա-
դացման երկու կենտրոնների անկախության դեպքում և ցույց տալ,
որ M -ը կիսաարի ուղղադիմ հարժանիկ տատանումներ:

§ 3, 5. Ուղղադիմ հավասարաչափ փոփոխվող շարժում

1. Այս և հաջորդ 3, 7 ու 3, 8 պարադրաֆներում ուսում-
նասիրված են՝

ա) ուղղադիմ հավասարաչափ փոփոխվող շարժում,

բ) շարժում, որի դեպքում արագացումը հաստատուն է
որպես վեկտոր.

գ) շարժում, որի ընթացքում անփոփոխ է արագացման ուղ-
ղությունը:

Ա. և Բ. շարժումները զ-ի մասնավոր դեպքերն են. ցույց
ներառնելով ներկայացնում են բացառիկ կարևորություն և այդ պատ-
ճառով քննարկվում են առանձին-առանձին, զ-ից անկախ, և ոչ թե
որպես զ-ի մասնավոր դեպքեր:

2. Յուրաքանչյուր ուղղադիմ շարժման դեպքում՝ հետազոծի
շոշափողի միավոր վեկտորը հաստատուն է

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \text{const} \\ \overline{v} &= \dot{\tau} \cdot \dot{s}, \quad \overline{\omega} = \dot{\tau} \cdot \ddot{s}, \quad \overline{v} \parallel \overline{\omega} \end{aligned} \quad \left| \quad (3, 5, 1) \right.$$

Յուրաքանչյուր հավասարաչափ փոփոխվող շարժման
դեպքում

$$\ddot{s} = \text{const} = c, \quad \dot{s} = ct + b, \quad s = \frac{ct^2}{2} + bt + a, \quad (3, 5, 2)$$

որտեղ a , b հաստատուն սկալարներ են: Անվանելով $\overline{v}_0$ արագու-
թյան թվական արժեքը $t = 0$ մոմենտում, տեսնում ենք, որ
 $b = \overline{v}_0$

Համառոտեցնելով (3, 5, 1) և (3, 5, 2)-ը ստանում ենք հավա-
սարաչափ փոփոխվող ուղղադիմ շարժման համար

$$\overline{v} \parallel \overline{\omega} \parallel \dot{\tau}, \quad \dot{\tau} = \text{const}, \quad \overline{\omega} = \text{const} \quad (3, 5, 3)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega} &= \dot{\tau} c, \quad \overline{v} = \dot{\tau} (b + ct), \quad \dot{\tau} b = \overline{v}_0 \\ \overline{v} &= \overline{v}_0 + \overline{\omega} t \end{aligned} \right\} \quad (3, 5, 4)$$

և որովհետև

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

ապա

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{ct^2}{2} + bt \right) + \bar{r}_0, \quad (3, 5, 5)$$

որտեղ $\bar{r}_0$ շառավիղ-վեկտորն է՝ $t = 0$ մոմենտում:

Այսպիսով տեղափոխումը դրո մոմենտից մինչև t մոմենտը՝

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{ct^2}{2} + b \right), \quad (3, 5, 6)$$

3°. Շարժման բնույթը որոշվում է b և c դործակիցների նշաններով (այդ մասին արդեն ասված է § 3, 1, 4°): Երբ b ու c նույնանշան են, շարժումը համասարաչափ արագացող է. արագությունը, արագացումն ու տեղափոխումը ունեն միևնույն ուղղավածությունը, ընդ որում տեղափոխման՝ չափը մեծանում է ժամանակի ընթացքում քառակուսային օրենքով:

Շարժումը համասարաչափ արագացող է նաև ա՛յն դեպքում, երբ $b = 0$ ալիսնքն սկզբնական արագությունը $\bar{v}_0 = 0$: Իրոք այս դեպքում (3, 5, 4)-ը տալիս է $\bar{v} = \bar{v}_0$, ուրեմն արագությունը և արագացումը միմյանց համադրված են:

b և c դործակիցների տարանշան լինելու դեպքում արագությունը դառնում է դրո

$$t_1 = -\frac{b}{c} = -\frac{v_0}{c} = -\frac{v_0}{\bar{v}_0} > 0$$

մոմենտում: Պարզ է, որ 0 մոմենտից մինչև t_1 -ը

$$\bar{v} \uparrow; \bar{v} \quad (\bar{v} \uparrow; \bar{v} \downarrow; \bar{v})$$

արագության չափը նվազում է ($d\bar{v} < 0$): Իսկ t_1 -ից սկսած արագության չափը անընդհատ աճում է $\bar{v} \uparrow; \bar{v}$: Այսպիսով 0-ից մինչև t_1 շարժումը համասարաչափ դանդաղող է, իսկ t_1 -ից հետո հավասարաչափ արագացող:

Համասարաչափ փոփոխվող շարժման ուղղադիմ լինելու երկու պայմանները

$$1. \quad \overline{v} \parallel \overline{w}, \quad \text{հետևապես նաև} \quad \overline{v}_0 \parallel \overline{w}$$

$$2. \quad v_0 = 0 \quad (\text{կամ } b = 0)$$

Հարևելի է արտահայտել մի հավասարությունը

$$\overline{v}_0 \times \overline{w} = 0; \quad (3, 5, 7)$$

4. Բացի t_1 մոմենտից, որում հավասարաչափ դանդաղող կետի արագությունը հավասար է 0, հետաքրքիր է նաև որոշել, թե ուղղադիրձ հետագծի σ -ը B_1 կետում ալդ տեղի ունի. $\overline{w}$ -ի հաստատուն էինելու հետևանքով, կարող ենք (2, 11, 3)-ը ինտեգրել B_0 -ից մինչև B_1 և կատանանք

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \overline{w} \cdot \overline{B_0 B_1}; \quad (3, 5, 8)$$

Այստեղ $\overline{v}_1 = 0$, $\overline{v}_0$ -ն սկզբնական արագությունն է (ալիքնքն արագություն է B_0 կետում), $\overline{v}_0 \uparrow \overline{w}$, հետևապես

$$\overline{w} \cdot \overline{B_0 B_1} = -w B_0 B_1;$$

Մանի որ ըստ (3, 5, 4)-ի.

$$w = |c|, \quad v_0^2 = b^2$$

ապա

$$B_0 B_1 = \frac{v_0^2}{2w} = \frac{b^2}{2|c|}; \quad (3, 5, 9)$$

Այսպիսով, ենթադրելով, որ $\overline{v}_0 \uparrow \overline{w}$, տեսնում ենք՝ սկզբից մինչև t_1 մոմենտը կետը շարժվում է ուղղադիրձ հետագծի $B_0 B_1$ հատվածով, t_1 մոմենտից հետո շարժումը կատարվում է հակառակ ուղղությամբ: Հետևապես $B_0 B_1$ հատվածի բոլոր կետերը անցվում են երկու անգամ՝ նախ, մինչև t_1 մոմենտը, $B_0 B_1$ ուղղությամբ և ապա, t_1 մոմենտից հետո $B_1 B_0$ ուղղությամբ:

Ալդ պատճառով կարելի է $B_0 B_1$ -ը անվանել հետագծի «ընդհանուր հատված»: Ապացուցենք հետևյալ երկու կարևոր դրույթները.

[3—A] ա) հավասարաչափ փոփոխվող ուղղադիրձ շարժման ընդհանուր հատվածի յուրաքանչյուր կետում արագության չափը անկախ է նրա ուղղվածությունից:

բ) Ընդհանուր հատվածի կամայական B կետից B_1 -ին հասնելու ժամանակամիջոցը հավասար է B_1 -ից B -ին հասնելու ժամանակամիջոցին:

Ապացուցելու նպատակով պատկերացնենք թե B կետում արագութիւնը հավասար է՝

$\bar{v}'$, երբ շարժումը կատարւում է B_0 -ից դեպի B_1 ,

$\bar{v}''$, երբ շարժումը կատարւում է B_1 -ից դեպի B_0

և նկատի առնենք, որ հետադի BB_1 մասին հաշորդում է B_1B մասը. BB_1B նախադարձին համապատասխանող տեղափոխումը զրո է: Ուստի, գրելով (3, 5, 8)-ը BB_1B նախադարձի համար, կունենանք

$$\frac{v''^2 - v'^2}{2} = 0, \quad (3, 5, 10)$$

որտեղից՝

$$v'' = v':$$

(3, 5, 10)-ը $[3-A]$ -ն է:

Ինչպես վերևում ասված է, ընդհանուր հատվածի B , B_1 կետերին, երբ շարժումը կատարւում է դեպի B_1 կետը, համապատասխանում են $\bar{v}'$, $\bar{v}_1$ արագութիւնները և t' , t_1 մոմենտները. համաձայն (3, 5, 4)-ի

$$\bar{v}_1 - \bar{v}' = \dot{\zeta}c(t_1 - t'):$$

Երբ կետը շարժւում է B_1 -ից դեպի B -ն, արագութիւններն ու մոմենտները կլինեն $\bar{v}_1 = 0$, $\bar{v}''$, t_1 , t'' և ըստ (3, 5, 4)-ի

$$\bar{v}'' - \bar{v}_1 = \dot{\zeta}c(t'' - t_1):$$

Քանի որ $\bar{v}_1 = 0$, իսկ $\bar{v}'' = -\bar{v}'$, տեսնում ենք, որ

$$\dot{\zeta}c(t_1 - t') = \dot{\zeta}c(t'' - t_1)$$

ալիքն

$$t_1 - t' = t'' - t_1$$

Այս էլ $[3-A]$ -ն է:

4°. Այժմ արտածենք մի ընդհանուր առնչութիւն, որը նիշտ է հետադի կամալական կետերի, կամ ժամանակի կամալական մոմենտների դեպքում: Դիցուք t_A , t_B մոմենտներին համապատասխանում են $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ արագութիւնները, իսկ $\frac{t_A + t_B}{2} = t_D$ մոմենտում արագութիւնը հավասար է $\bar{v}_D$:

Յուլյ ասնք, որ $\bar{v}_D = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2}$,

Իսկապես՝ ըստ (3, 5, 4)-ի

$$\bar{v}_D - \bar{v}_A = \frac{1}{2}c(t_D - t_A) = \frac{1}{2}c\left(\frac{t_B - t_A}{2}\right),$$

$$\bar{v}_B - \bar{v}_D = \frac{1}{2}c(t_B - t_D) = \frac{1}{2}c\left(\frac{t_B - t_A}{2}\right).$$

Երկու հավասարությունների աջ մասերը հավասար են՝ ուստի՝

$$\bar{v}_D - \bar{v}_A = \bar{v}_B - \bar{v}_D$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{կամ} \\ \text{և՛} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{v}_D = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2}, \\ t_D = \frac{t_A + t_B}{2}, \end{array} \quad (3, 5, 11)$$

Այսպիսով՝

[3—B] երե ուղղադիմ հավասարաչափ փոփոխվող շարժման դեպքում t_A , t_B մոմենտներից համապատասխանում են $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ արագությունները, ապա t_D մոմենտում, որ հավասար է $\frac{t_A + t_B}{2}$,

արագությունը հավասար է $\frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2}$,

(3, 5, 11)-ից հետևում է, որ $t_B - t_A$ ժամանակամիջոցում կատարվող $\overline{AB}$ տեղափոխումը՝

$$\overline{AB} = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2}(t_B - t_A) = \bar{v}_D(t_B - t_A), \quad (3, 5, 12)$$

և իսկապես (3, 5, 5)-ի հիման վրա կարող ենք գրել

$$\begin{aligned} \bar{r}_B - \bar{r}_A = \overline{AB} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ct_B^2}{2} + bt_B \right) - \left(\frac{ct_A^2}{2} + bt_A \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2}(t_B - t_A) \left[\frac{c(t_B + t_A)}{2} + b \right], \end{aligned}$$

Բայց ըստ (3, 5, 4) և (3, 5, 11)-ի

$$\frac{1}{2} \left(c \frac{t_B + t_A}{2} + b \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{ct_B + b}{2} + \frac{ct_A + b}{2} \right) = \frac{\bar{v}_B + \bar{v}_A}{2} = \bar{v}_D;$$

Այստեղից անմիջապես ստացվում է (3, 5, 12)-ը: Վերջապես, դիտենք հետագծի F , H կամալական կետերը: Միանգամայն նման (3, 5, 8)-ին

$$\frac{v_F^2 - v_H^2}{2} = \bar{w} \cdot \overline{HF}, \quad (3, 5, 13)$$

ևթև $\overline{HF} \nparallel \bar{w}, \quad \bar{w} \cdot \overline{HF} > 0, \quad v_F^2 > v_H^2,$

$$HF = \frac{v_F^2 - v_H^2}{2\bar{w}}.$$

ևթև $\overline{HF} \nparallel \bar{w}, \quad \bar{w} \cdot \overline{HF} < 0,$

$$HF = \frac{v_H^2 - v_F^2}{2\bar{w}}.$$

(3, 5, 13) առնչությունը ստանում է ավելի պարզ ձև, եթև H -ի փոխարեն վերցնենք B_1 կետը, որում $\bar{v}_1 = 0$ արժեք

$$\frac{v_F^2}{2} = \bar{w} \cdot \overline{B_1 F}, \quad (3, 5, 14)$$

Համասարաչափ փոփոխվող ուղղագիծ շարժման ամենակարևոր դեպքերից մեկը այն է, երբ հաստատուն արագացումը ուղղաձիգ է և ուղղված դեպի ներքև: Մարմիններն արբիտսի արագացումով կատարում են ուղղագիծ ուղղաձիգ (կամ կորագիծ, տևա § 3, 7) շարժում երկրադնդի մակերևույթի մոտ: Քննարկվելիք դեպքերում մարմինները դիտվում են որպևս կետեր:

Այդ ուղղաձիգ, դեպի ներքև ուղղված արագացումը նշանակվում է $\bar{g}$. Նրա չափը $g = 9,81 \frac{\text{մ/սր}}{\text{վայրկ.}^2} = 981 \frac{\text{սմ.}}{\text{վայրկ.}^2}$:

Ներքևը բերված խնդրում հաստատուն արագացման չափը և ուղղությունը կամալական են. § 3, 6-ի առաջին երկու խնդիրներում մանրամասնորեն քննարկված է $\bar{g}$ արագացումով կատարվող ուղղաձիգ շարժումը:

Են դիբ: Պատկերել համասարաչափ փոփոխվող ուղղագիծ շարժման դեպքում արագություն հոդողաֆը:

§ 3, 6 ԽճՊԻՐՆԵՐ

ԽճՊԻՐ 1: Միենույն կետից, միենույն սկզբնական $\bar{v}_0$ ուղղածից արագությամբ նկատվում են վերև սկզբում առաջին (1) քարը, իսկ τ վայրկյան հետո երկրորդ (2) քարը:

Արտշնչի որպես ժամանակի ֆունկցիա քարերի հեռավորությունը և նրանց $\bar{v}_2$, $\bar{v}_1$ արագությունների տարրերությունը:

Լուծում: Պայմանավորվենք հաշվել ժամանակը երկրորդ քարի նկատման մոմենտից: Ըստ (3, 5, 4)-ի այդ քարի արագությունը՝

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_0 + \bar{g}t. \quad (3, 6, 1')$$

Քանի որ առաջին քարը նկատված է τ վայրկյան առաջ, նրա արագությունը կլինի՝

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{g}(t + \tau); \quad (3, 6, 1'')$$

Հետևապես

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = -\bar{g}\tau; \quad (3, 6, 2)$$

Այդ տարրերությունը հաստատուն է և ուղղված ուղղակի զեպի վեր (որովհետև $\bar{g}$ -ն ուղղածից է և ուղղված զեպի ներքև):

Հաշվելով ուղղածից հեռավորությունները նկատման կետից, համաձայն (3, 5, 5)-ի ունենք

$$\bar{h}_2 = \bar{v}_0 t + \frac{\bar{g}t^2}{2}; \quad (3, 6, 3)$$

Նույն t մոմենտին առաջին քարի հեռավորությունը՝

$$\bar{h}_1 = \bar{v}_0(t + \tau) + \frac{\bar{g}(t + \tau)^2}{2}; \quad (3, 6, 3')$$

Այսպիսով

$$\bar{h} = \bar{h}_1 - \bar{h}_2 = \tau \left(\bar{v}_0 + \bar{g}t + \frac{\bar{g}\tau}{2} \right). \quad (3, 6, 4)$$

$\bar{h}$ -ը առաջին կետի հեռավորությունն է երկրորդ կետից:

Դիցուք $\hat{k}$ միավոր վեկտորը ուղղածից է և ուղղված զեպի վեր: Այդ զեպում

$$\hat{k} \cdot \bar{h}_1 = h_1 > 0, \quad \hat{k} \cdot \bar{h}_2 = h_2 > 0,$$

$$\dot{k} \cdot \bar{v}_0 = v_0 > 0, \text{ իսկ } \dot{k} \cdot \bar{g} = -g.$$

ալժժ (3, 6, 4) կգրվի առաջին

$$\bar{h} = h_1 - h_2 = \tau \left(v_0 - gt - \frac{g\tau}{2} \right) \quad (3, 6, 4')$$

(3, 6, 4')-ից կգրակացնում ենք

$\bar{h} > 0$ (ախնճն առաջին քարը բարձր է երկրորդից), եթե

$$v_0 - gt - \frac{g\tau}{2} > 0.$$

$\bar{h} < 0$ (ախնճն երկրորդ քարն է բարձր առաջինից), եթե

$$v_0 - gt - g\tau_2 < 0:$$

Վերջապես քարերը կդառնան միեկնաբան բարձրություն վրա ($h=0$), եթե

$$v_0 - gt = \frac{g\tau}{2} = 0$$

կամ

$$t = \frac{v_0}{g} - \frac{\tau}{2}, \quad (3, 6, 5)$$

(3, 6, 4) արտահայտությունը կարելի է ստանալ և այլ կերպ: $t=0$ մոմենտում, երբ երկրորդ քարը նոր պետք է սկսի շարժվել, առաջին քարը շարժման մեջ է արդեն τ վայրկյան և նրա հետադարձությունը երկրորդից՝

$$\bar{h}_0 = \bar{v}_0\tau + \frac{g\tau^2}{2},$$

Մյուս կողմից $\bar{h} = \bar{h}_1 - \bar{h}_2$, հետևապես բառ (3, 6, 2)-ի

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{d\bar{h}_1}{dt} - \frac{d\bar{h}_2}{dt} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{g}\tau.$$

ախնճն առաջին քարի հետադարձությունը երկրորդից աճում է $\bar{g}\tau$ -ով մեկ վայրկյանում, իսկ t վայրկյանում՝ $\bar{g}\tau t$ -ով:

Այսպիսով

$$\bar{h} = \bar{h}_2 = \bar{h}_0 + \bar{g}\tau t.$$

այս է հենց՝ (3, 6, 4)-ը:

Որոշենք $\bar{h} = \bar{h}_1 - \bar{h}_2$ հեռավորությունը այն մոմենտում, երբ
 ա) առաջին քարը հասել է ամենաբարձր կետին,
 բ) երկրորդ քարն է հասել ամենաբարձր կետին:

Նշելով ա, Բ ինդեքսներով այդ մոմենտներին համապատասխանող մեծությունները և նկատի առնելով, որ ամենաբարձր կետերում քարերի արագությունները զրո են, ստանում ենք
 (3, 6, 1')-ից և (3, 6, 1)-ից

$$\bar{v}_2 + \bar{g}t_{\infty} = -\bar{g}\tau$$

$$\bar{v}_0 + \bar{g}t_r = 0:$$

Այսպիսով (3, 6, 4)-ն տալիս է՝

$$\bar{h}_{\infty} = -\frac{\bar{g}\tau^2}{2}, \quad \bar{h}_r = +\frac{\bar{g}\tau^2}{2}.$$

$\bar{h}_{\infty}$ -ի և $\bar{h}_r$ -ի հակադրադասիս լինելը հասկանալի է՝ t_{∞} մոմենտում երկրորդ քարը ցածր է առաջինից, իսկ t_r մոմենտում առաջին քարն է ցածր երկրորդից:

Խնդիր 2. Հորիզոնական P հարթության մի կետից առաջին (1) քարը նետվում է ուղղաձիգ վերև $\bar{u}_1$ սկզբնական արագությունով, իսկ τ վայրկյան հետո, P -ի մի այլ կետից, նետվում է վերև երկրորդ քարը (2), որի սկզբնական ուղղաձիգ արագությունը հավասար է $\bar{u}_2$: $\bar{u}_1$ և $\bar{u}_2$ $\vec{v}$ արժեքների և ժամանակի $\vec{v}$ մոմենտում քարերը կդառնան միևնույն բարձրության վրա:

Լուծում: Հաշվելով ժամանակը երկրորդ քարի նետման մոմենտից, և նշանակելով արագությունները $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, իսկ քարերի հեռավորությունները P -ից $\bar{h}_1$ և $\bar{h}_2$ ունենք

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 + \bar{g}t, \quad \bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{g}(\tau + t) \quad (3, 6, 6)$$

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{g}\tau = \text{const}... \quad (3, 6, 7)$$

$$\bar{h}_2 = \bar{u}_2 t + \frac{\bar{g}t^2}{2}, \quad \bar{h}_1 = \bar{u}_1(t + \tau) + \frac{\bar{g}(t + \tau)^2}{2} \quad (3, 6, 8)$$

կամ

$$\bar{h} = \bar{h}_1 - \bar{h}_2 = (\bar{u}_1 + \bar{g}\tau - \bar{u}_2)t + \left(\bar{u}_1 + \frac{\bar{g}\tau}{2}\right)\tau \quad (3, 6, 9)$$

$\bar{h}$ -ը առաջին քարի հեռավորությունն է երկրորդից՝ երբ քարերը միևնույն բարձրության վրա են,

$$\bar{h} = 0, \quad (\bar{u}_1 + \bar{g}\tau - \bar{u}_2) t + \left(\bar{u}_1 + \frac{\bar{g}\tau}{2} \right) \tau = 0; \quad (3, 6, 10)$$

է-ի արժեքը որոշելու համար, բաղմանայանք (3, 6, 10) տեղադրեն ուղղաձիգ, դեպի վեր ուղղված միավոր $\hat{k}$ վեկտորով: Դանի որ

$$\hat{k} \cdot \bar{u}_1 = u_1 > 0, \quad \hat{k} \cdot \bar{u}_2 = u_2 > 0, \quad \hat{k} \cdot \bar{g} = -g,$$

ստանում ենք

$$t = - \frac{\tau \left(u_1 - \frac{g\tau}{2} \right)}{u_1 - u_2 - g\tau}, \quad (3, 6, 11)$$

Անմիջապես հասկանալի է, որ է-ն չի կարող լինել բացասական: Է-ն կլինի որոշ միայն այն դեպքում, եթե երկրորդ քարի նեաման մոմենտում առաջին քարը վերադառնար P հարթությանը: Անտեսելով այդ դեպքը, պետք է դիտել է-ն որպես դրական: Այդ հնարավոր է, եթե (3, 6, 11)-ի համարիչն ու հայտարարը լինեն առանշան:

Նշանակենք $\bar{h}_0$ առաջին կետի հեռավորությունը P -ից այն մոմենտում, երբ նետվում է երկրորդ քարը, պարզ է որ

$$\bar{h}_0 = \tau \left(\bar{u}_1 + \frac{\bar{g}\tau}{2} \right), \quad h_0 = \tau \left(u_1 - \frac{g\tau}{2} \right) > 0;$$

Միայն այն սահմանալին դեպքում (որը մենք պաշմանադրվել ենք անտեսել), երբ առաջին քարը, վերադառնալիս, հասնում է P հարթությանը երկրորդ քարի նեաման մոմենտում,

$$\tau \left(u_1 - \frac{g\tau}{2} \right) = 0;$$

Այսպիսով (3, 6, 11)-ի համարիչը հավասար է h_0 և պետք է դրական լինի, իսկ բացասականը (3, 6, 11)-ի հայտարարն է: Դրանում կարելի է համոզվել ախպես, ըստ (3, 6, 9)-ի

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \bar{u}_1 + \bar{g}\tau - \bar{u}_2, \quad \frac{dh}{dt} = u_1 - g\tau - u_2 \quad (3, 6, 12)$$

(3, 6, 12)-ը ցույց է տալիս, թե որքանով է փոխվում մեկ վայրկյանում $\bar{h} = \bar{h}_1 - \bar{h}_2$ ($h = h_1 - h_2$) հեռավորությունը, եթե $\frac{dh}{dt}$ բա-

ցասական չլինի, քարերի հեռավորությունը դրո չի դառնա, ուստի

$$u_1 - g\tau - u_2 < 0; \quad (3, 6, 13)$$

(3, 6, 11)-ի աչ մասն ունի նաև մի այլ մեկնարանություն:

Բաժանենք (3, 6, 11)-ի համարիչն ու հայտարարը g -ի

$$t = \frac{\tau \left(\frac{u_1}{g} - \frac{\tau}{2} \right)}{\frac{u_2}{g} - \left(\frac{u_1}{2} - \tau \right)}, \quad (3, 6, 14)$$

$\frac{u_2}{g}$ այն ժամանակամիջոցն է, որում երկրորդ քարը հասնում է

մաքսիմալ բարձրության. $\left(\frac{u_1}{g} - \tau \right)$ այն ժամանակամիջոցն է, որը

պետք է անցնի երկրորդ քարի նեղաման մոմենտից, որպեսզի առաջին քարը հասնի իր ամենաբարձր դիրքը:

Ըստ (3, 6, 13)-ի (3, 6, 14)-ի հայտարարը դրական է. արդ նշանակում է, որ երկրորդ քարը հասնում է իր ամենաբարձր կետին ավելի ուշ քան առաջինը իր ամենաբարձր կետին: Հետևապես երկրորդ քարը ավելի ուշ կհասնի (իջնելով) P հարթությանը, քան առաջինը: Ուրեմն երկու քարերը մի մոմենտում պետք է դանդիկ միևնույն բարձրություն վրա:

(3, 6, 11)-ում և (3, 6, 14)-ում τ , g , u_1 , u_2 մեծությունները հաստատուն են. ուրեմն խնդիրն ունի միայն մի լուծում, որի համար անհրաժեշտ է, որ (3, 6, 11)-ի հայտարարը լինի բացասական, իսկ համարիչը՝ դրական:

Պարզ է, որ այս խնդիրը կվերածվի նախորդ խնդրին, եթե $u_1 = u_2 (= v_0)$. այս դեպքում (3, 6, 14)-ը տալիս է

$$t = \frac{u_1}{g} - \frac{\tau}{2} = \frac{v_0}{g} - \frac{\tau}{2},$$

այսինքն նախորդ խնդրի (3, 6, 5)-ը:

Խնդիր 3. Համաատարաչափ արագացող շարժում կատարող կետը անցնում է S ճանապարհը τ ժամանակամիջոցում. որոշել կատարողության չափի միջինը 1) ըստ ժամանակի (u) 2) ըստ ճանապարհի (U) և ցույց տալ, որ այդ միջինների տարբերությունը՝

$$U - u = \frac{1}{6} \frac{(V - v_0)^2}{V + v_0},$$

որտեղ v_0 և V արագութիւն չափերն են S ճանապարհի սկզբում և վերջում:

Լ ա լ ծ ու մ: Լստ միջին մեծութիւն սահմանումի

$$u = \frac{\int_0^{\tau} v dt}{\tau} = \frac{S}{\tau}, \quad U = \frac{\int_0^S v ds}{S}$$

Սակայն $v = \frac{ds}{dt}$, $ds = v dt$, ուստի $U = \frac{\int_0^{\tau} v^2 dt}{S}$ նշանակելով

հաստատուն շոշափող արագացման թիվական արժեքը c , ունենք՝
արագութիւն չափը t մոմէնտում՝ $v = v_0 + ct$,

արագութիւն չափը ճանապարհի վերջում $V = v_0 + c\tau$,

$c\tau = V - v_0$ և ճանապարհը՝ $S = v_0\tau + \frac{c\tau^2}{2} = \tau \left(v_0 + \frac{c\tau}{2} \right) =$

$$= \tau \left(\frac{V + v_0}{2} \right);$$

Այսպիսով

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{V + v_0}{2} = v_0 + \frac{c\tau}{2}, \quad u^2 = v_0^2 + v_0 c\tau + \frac{c^2 \tau^2}{4}$$

իսկ

$$U = \frac{\int_0^{\tau} v^2 dt}{S} = \frac{v_0^2 \tau + 2v_0 c \frac{\tau}{2} + \frac{c^2 \tau^2}{3}}{S} = \frac{u^2 + \frac{1}{12} c^2 \tau^2}{u}.$$

Այստեղից

$$U - u = \frac{1}{12} \frac{c^2 \tau^2}{u} = \frac{1}{6} \frac{(V - v_0)^2}{V + v_0}.$$

§ 3. 7. Շարժումը այն դեպքում, երբ արագացումը հաստատուն է որպէս վեկտոր

1°. Ինչպէս տեսանք նախորդ պարագրաֆում, շարժումը կլինի ուղղադիւրս և հավասարաչափ փոփոխովոյ, եթէ միաժամանակ բազմաթիւ ճանապարհներ

$$\ddot{\omega} = \text{const} \quad (3, 7, 1)$$

$$\ddot{v}_0 \times \ddot{\omega} = 0 \quad (3, 7, 2)$$

պայմանները:

Այժմ ուսումնասիրվելու է շարժում, որը ենթակա է միայն (3, 7, 1) պայմանի, այսինքն՝ որի ընթացքում արագացումը հաստատուն է որպես վեկտոր, իսկ ակզրնական արագությունը ոչ զրո է, ոչ էլ զուգահեռ արագացմանը, ուրեմն

$$\ddot{v}_0 \times \ddot{\omega} \neq 0: \quad (3, 7, 3)$$

(3, 7, 1) պայմանին ենթակա շարժումները շատ կարևոր են, որովհետև ալիպսիք են շարժումները երկրագնդի մակերևույթին մոտ դատարկության մեջ, կամ այն դեպքում, երբ կարելի է արհամարհել օդի դանդաղեցնող ազդեցությունը (օդի «զինադրուխտություն»):

Ալիպսի շարժման մի այլ օրինակ է ներկայացնում էլակտրականացրած մասնիկի շարժումը հարթ խտացուցիչի լիցքափոխյալ թիթեղների միջև:

$$2^{\circ}. \text{ Ըստ սահմանումի } \ddot{\omega} = \frac{d\ddot{v}}{dt} \text{ կամ } d\ddot{v} = \ddot{\omega} dt: \text{ Ինտեգրենք.}$$

նկատի առնելով (3, 7, 1)-ը, անվանելով ինտեգրման հաստատունը $\bar{b}$, կստանանք

$$\ddot{v} = \bar{b} + \ddot{\omega} t. \quad (3, 7, 4)$$

Իսկ, եթե ակզրնական $t_0 = 0$ մոմենտում արագությունը հավասար է $\ddot{v}_0$, ապա

$$\ddot{v} = \ddot{v}_0 + \ddot{\omega} t: \quad (3, 7, 5)$$

Նշենք, որ համաձայն (3, 7, 3)-ի հետագծի ոչ մի կետում արագությունը զուգահեռ չի արագացմանը:

Քանի որ $\ddot{v} = \frac{d\ddot{r}}{dt}$, ինտեգրելով (3, 7, 5)-ը կստանանք

$$\ddot{r} = \frac{\ddot{\omega} t^2}{2} + \ddot{v}_0 t + \ddot{r}_0, \quad (3, 7, 6)$$

որտեղ $\ddot{r}_0$ -ն շտապիկ-վեկտորն է $t_0 = 0$ մոմենտում:

(3, 7, 3)-ի հետ միասին (3, 7, 6) առնչությունը հանդիսանում է պարարտի հավասարում: Այդ պարարտը անցնում է

$\bar{r}_0$ կետով, իսկ նրա հարթությունը պարունակում է $\bar{v}_0$ վեկտորը և զուգահեռ է $\bar{\omega}$ արագացմանը: Պարարովը լիտվին բնորոշվում է իր գիրեկարիտով և ֆոկուսի գերքով:

(3, 7, 6) պարարովի գիրեկարիտը և ֆոկուսը որոշելու համար գիմենք պարարովի (1, 2, 3) հավասարմանը:

Համեմատելով (3, 7, 6)-ը (1, 2, 3)-ի հետ, տեսնում ենք, որ

$$\bar{a} = \frac{\bar{\omega}}{2}, \quad \bar{b} = \bar{v}_0.$$

հետևապես, ըստ (1, 2, 14)-ի, (3, 7, 6) պարարովի ֆոկուսի հեռավորությունը զաղաթից (SF) կամ զաղաթի հեռավորությունը գիրեկարիտից (DS).

$$\overline{SF} = \overline{DS} = \frac{\bar{\omega} (\bar{v}_0 \times \bar{\omega})^2}{2\bar{\omega}} \quad (3, 7, 7)$$

իսկ գիրեկարիտի հեռավորությունը ֆոկուսից

$$-2\bar{h} = -\frac{\bar{\omega} (\bar{v}_0 \times \bar{\omega})^2}{\bar{\omega}}, \quad (3, 7, 7')$$

Այսպիսով, (3, 7, 3) պայմանի առկայության դեպքում հաստատուն արագացումով շարժվող կետի հետագիծը հենց նոր նկարագրված պարարովն է:

3°. Նպատակահարմար է շաղկապել գիտվող շարժումը § 3, 5 և § 3, 6-ի շարժման հետ: Սրա համար պետք է վերլուծել արագությունը երկու բաղադրիչների՝ զուգահեռ արագացմանը ($\bar{p}$) և ուղղահայաց նրան ($\bar{q}$) (նկ. 3—12ա)

$\bar{v} = \bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{p} \parallel \bar{\omega}, \quad \bar{q} \perp \bar{\omega} \quad (3, 7, 8)$
 Ըստ (3, 7, 5)-ի

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{\omega} (\bar{v} \cdot \bar{\omega}) = \bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} t + \bar{\omega} \cdot \bar{v}_0) = \\ &= \bar{\omega} (\bar{\omega} t + \bar{\omega} \cdot \bar{v}_0): \end{aligned}$$

Այստեղ $\bar{\omega}$ արագացման չափն է, իսկ փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը արագության պրոեկցիան է $\bar{\omega}$ -ի ուղղությամբ:

Սրան դրա: Նշանակելով $\bar{\omega} = c$, $\bar{\omega} \cdot \bar{v}_0 = b$, կստանանք

$$\bar{p} = \dot{\omega}(ct + b); \quad (3, 7, 9)$$

Արագության երկրորդ բաղադրիչը՝

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{v} \cdot \bar{p} = \bar{v} - \dot{\omega}(\bar{v} \cdot \dot{\omega}) = \dot{\omega} \times (\bar{v} \times \dot{\omega}) = \\ &= \dot{\omega} \times (\bar{v}_0 \times \dot{\omega}) = \text{const} \end{aligned} \quad (3, 7, 10)$$

տե՛ս (§ 1, 11, 1^o): Վերջնական արտահայտության մեջ $\bar{v}$ -ն փոխարինված է $\bar{v}_0$ -ով, որովհետեւ $\dot{\omega}t \times \dot{\omega} = 0$: Այսպիսով $\bar{q}$ բաղադրիչը հաստատուն է:

(3, 7, 9)-ը լիովին համընկնում է (3, 5, 4)-ի հետ, ուստի (3, 7, 9) և (3, 7, 10)-ից հզորացնում ենք.

Հաստատուն արագացման դեպքում կետի պրոսեկցիան $\bar{\omega}$ -ի ուղղության վրա կատարում է ուղղադիմ համառոտաչափ փոփոխվող շարժում:

Կետի պրոսեկցիան $\bar{\omega}$ -ին ուղղահայաց առանցքի վրա կատարում է համառոտաչափ շարժում:

(3, 7, 9)-ից պարզ է, որ $\bar{p} \uparrow \bar{\omega}$ և $\bar{p}$ արագության չափը անընդհատ մեծանում է, երբ $\bar{v}$ -ն դրական է, որովհետեւ c -ն ընդունված է դրական. իսկ $\bar{v}$ -ի բացասական լինելու դեպքում, $\bar{p} \uparrow \bar{\omega}$ և $\bar{p}$ արագության չափը նվազում է սկզբից մինչև $t = -\frac{b}{c}$ մոմենտը,

որում $\bar{p} = 0$:

t -ի ավելի մեծ բոլոր արժեքների համար $\bar{p} \uparrow \bar{\omega}$ և $\bar{p}$ -ի չափն անընդհատ աճում է ժամանակի ընթացքում:

Նկատի առնելով $\bar{p}$ և $\bar{q}$ բաղադրիչների փոխադարձ ուղղահայացությունը հզորացնում ենք, որ հաստատուն արագացման դեպքում կետի արագության չափը փոքրագույն է, երբ $\bar{v} = \bar{q} = \dot{\omega} \times (\bar{v}_0 \times \dot{\omega})$: Այդ $\bar{q}$ արագությունը կետը ունի պարարտիկ դադարվում: Իրոք, պարարտիկ առանցքը զուգահեռ է $\bar{\omega}$ -ին: Այսպիսով պարարտիկ դադարվում $\bar{v} \perp \bar{\omega}$ ալիքնքն $\bar{v} = \bar{q} = \dot{\omega} \times (\bar{v}_0 \times \dot{\omega})$, իսկ $\bar{p} = 0$: Այստեղից պարզ է, որ եթե սկզբնական ($t=0$) մոմենտում $\bar{p}_0 \uparrow \bar{\omega}$, ապա կետը կհասնի պարարտիկ դադարվելու $t = -\frac{b}{c}$ մոմենտում:

Դիցուք H -ը և F -ը պարաբոլական հետագծի կետերն են, իսկ $\overline{v}_H = \overline{p}_H + \overline{q}$ և $\overline{v}_F = \overline{p}_F + \overline{q}$ — արագություններն են այդ կետերում: Ըստ (3, 7, 8)-ի $v_H^2 = p_H^2 + q^2$, $v_F^2 = p_F^2 + q^2$ և շնորհիվ $\overline{w}$ -ի հաստատուն լինելուն, կարող ենք (3, 5, 13)-ի նման գրել՝

$$\frac{v_F^2 - v_H^2}{2} = \frac{p_F^2 - p_H^2}{2} = \overline{w} \cdot \overline{HF}; \quad (3, 7, 11)$$

Այստեղ $\overline{HF}$ տեղափոխումը պարաբոլի $\cup HF$ աղեղի ծայրակետերը միացնող լարն է: Եթե $\overline{HF}$ -ը կազմում է սուր անկյուն $\overline{w}$ -ի հետ, ապա

$$\overline{w} \cdot \overline{HF} > 0, \quad v_F^2 > v_H^2, \quad p_F^2 > p_H^2; \quad (3, 7, 11')$$

Երբ $\overline{HF}$ -ը բուխ անկյուն է կազմում $\overline{w}$ -ի հետ,

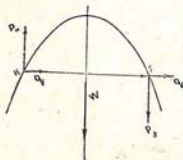
$$\overline{w} \cdot \overline{HF} < 0, \quad v_F^2 < v_H^2, \quad p_F^2 < p_H^2; \quad (3, 7, 11'')$$

Վերջապես, երբ $\overline{HF} \perp \overline{w}$,

$$\overline{w} \cdot \overline{HF} = 0, \quad v_F^2 = v_H^2, \quad p_F^2 = p_H^2; \quad (3, 7, 11''')$$

Բայց $\overline{w}$ -ին ուղղահայաց լարի H , F ծայրակետերը սիմետրիկ են առանցքի նկատմամբ: Այսպիսով՝

Պարաբոլի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ երկու կետերի արագությունների չափերը միևնույնն են, այդ կետերում արագության $\overline{p}$ բաղադրիչները հակադասակա են և համասար ըստ չափի (նկ. 3–12 բ):



Նկ. 3–12 բ:

4°. Համաձայն (3, 7, 5)-ի $\overline{v} = \overline{w}t + \overline{v}_0$ ախտնքն $\overline{v}$ ն t -ի դժալին ֆունկցիա է: Սառիս բերված են այդ հանգամանքի մի քանի կարևոր հետևանքներ:

ա. Դիցուք շարժվող կետը դանվում է պարաբոլի A , B , C կետերում t_A , t_B , t_C մոմենտներում, ունենալով համապատասխանաբար $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$, $\overline{v}_C$ արագություններ:

Ապացուցենք, որ

$$\text{Եթե } t_C = \frac{t_A + t_B}{2}, \quad \text{ապա } \overline{v}_C = \frac{\overline{v}_A + \overline{v}_B}{2}, \quad (3, 7, 12)$$

Ըստ (3, 6, 5)-ի

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}t_A + \bar{v}_0, \quad \bar{v}_B = \bar{\omega}t_B + \bar{v}_0, \quad \bar{v}_C = \bar{\omega}t_C + \bar{v}_0.$$

սեղագրելով t_C -ի փոխարեն $\frac{t_A + t_B}{2}$, անմիջապես ստանում ենք

$$\bar{v}_C = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2},$$

բ. Համաձայն (3, 7, 6)-ի

$$\bar{r}_A = \frac{\bar{\omega}t_A^2}{2} + \bar{v}_0t_A + \bar{r}_0, \quad \bar{r}_B = \frac{\bar{\omega}t_B^2}{2} + \bar{v}_0t_B + \bar{r}_0.$$

սխեմայից ստանում ենք սեղագրվածան արտահայտությունը՝

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \bar{r}_B - \bar{r}_A = \frac{\bar{\omega}}{2}(t_B^2 - t_A^2) + \bar{v}_0(t_B - t_A) = \\ &= (t_B - t_A) \left[\frac{\bar{\omega}}{2}(t_B + t_A) + \bar{v}_0 \right] \end{aligned}$$

սխեմայից

$$\overline{AB} = (t_B - t_A)(\bar{\omega}t_C + \bar{v}_0),$$

կամ (3, 7, 12)-ի հիման վրա

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \bar{v}_C(t_B - t_A) = \left(\frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2} \right) (t_B - t_A); \quad (3, 7, 13)$$

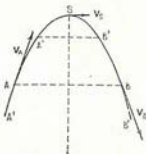
5°. Ինչպես հայտնի է (տե՛ս § 1, 2, 1°) դժվարին ֆունկցիայի հոդոգրաֆը ուղիղ գիծ է, ուրիշն ընդհանուր առաջությամբ կլինի արագացմանը զուգահեռ ուղիղ գիծ (նկ. 3—13):

Ինչպիսիք O -ն այն կետն է, որից տանում ենք $\bar{v}$ վեկտորները հոդոգրաֆը կառուցելու համար:

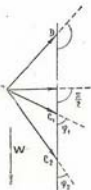
Իրականում հոդոգրաֆը, նկատում ենք, որ հաստատուն արագացման դեպքում ժամանակի ընթացքում աստիճանաբար նվազում է արագության ու արագացման միջև եղած անկյունը: Այսպես, եթե օրինակ, $\overline{OC}_1$ և $\overline{OC}_2$ -ն արագություններն են t_1 և t_2 մոմենտներում, ընդ որում $t_2 > t_1$ և $\varphi_1 = \angle(\overline{OC}_1, \bar{\omega})$, $\varphi_2 = \angle(\overline{OC}_2, \bar{\omega})$, ապա φ_2 անկյունը ավելի սուր է քան φ_1 անկյունը:

էթե մի որեւէ մոմէնտում $\angle(\vec{v}, \vec{\omega}) = \angle(\vec{OD}, \vec{\omega})$ բաժնի է. ապա անընդհատ փոքրանալով, այդ անկյունը վերածվում է $\frac{\pi}{2}$ -ի և հետո դառնում է ամէկի ու ամէկի սուր:

Այս հանգամանքը բերում է մի քանի կարեւորագոյթ յետևանքի: Նախ նկատի առնենք, որ արագութիւնն ունի հետագծի շոշափողի ուղղութիւնը. հետևապէս, երբ բաժնի անկյունը փոքրանում է և դառնում ուղիղ, իսկ հետո սուր, այդ նշանակում է, որ կետը նախ մոտենում է պարաբոլի գագաթին և ապա հեռանում նրանից: Բացի այդ, նկ. 3—13-ից երևում է, որ բաժնի անկյունների փոքրացման հետ արագութեան չափն էլ փոքրանում է, իսկ սուր անկյունների փոքրանալու հետ արագութեան չափը մեծանում է:



Նկ. 3—12 դ:



Նկ. 3—13:

Այսպիսով.

էթե հաստատուն արագացման դեպքում շարժման սկզբում արագութիւնը կադմում է բաժնի անկյուն արագացման հետ, կետը մոտենում է պարաբոլի գագաթին, հասնում նրան և ապա հեռանում է նրանից պարաբոլի մյուս ճյուղով, ընդ որում, երբ կետը մոտենում է գագաթին շարժումը զանդադող է, իսկ երբ հեռանում է գագաթից, շարժումը արագացող է:

Մի այլ կարևոր կարեւորագոյթ շահագործելու համար նշանակենք պարաբոլի գագաթը S (նկ. 3—12 դ), վերցնենք նաև երկու այլ կետեր՝ A , B : Թող այդ կետերում արագութիւնները լինեն՝

$$\vec{v}_s = \vec{OS}, \quad \vec{v}_A = \vec{Oa}, \quad \vec{v}_B = \vec{Ob}; \quad \vec{OS} \perp \vec{\omega}.$$

Քանի որ գագաթում արագութիւնը ուղղահայաց է պարաբոլի առանցքին, բոլոր (3, 7, 5)-ի

$$\overline{as} = \overline{v_s} - \overline{v_A} = \overline{\omega}(t_s - t_A), \quad \overline{sb} = \overline{v_B} - \overline{v_s} = \overline{\omega}(t_B - t_s); \quad (3, 7, 14)$$

Դիցուք A , B կետերը բնութված են այնպես, որ $AS = SB$.
 ալի գեղբում $OA = OB$ այսինքն $v_A = v_B$.

$$\angle aOs = \angle sOb, \quad \angle Oas = \angle Obs$$

և բոլոր (3, 7, 14)-ի $t_s - t_A = t_B - t_s$:

Նշված անկյունների հավասարությունը ցույց է տալիս, որ
 ալիգուլս բնութված A , B կետերում, պարագույն շաղկապները կադ-
 ժում են միևնույն անկյունները նրա առանցքի հետ, այսինքն
 ալի կետերը սիմետրիկ են առանցքի նկատմամբ:

Առաքի վերը բերված հավասարությունները կարելի է ձևա-
 կերպել այսպես.

Առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ A , B կետերում արագու-
 թյունների չափը նույնն է (տե՛ս 3, 7, 11) A -ից S -ին հասնելու
 ժամանակամիջոցը հավասար է S -ից B -ին հասնելու ժամանակա-
 միջոցին:

Այս վերջին դրույթից հետևում է մի եզրակացություն հա-
 ղերյանք կրկու գույզ սիմետրիկ կետեր՝ A , B և A' , B'
 (նկ. 3—12դ):

$$t_s - t_A = t_B - t_s; \quad t_s - t_{A'} = t_{B'} - t_{s'},$$

առաքի

$$t_{A'} - t_A = t_B - t_{B'}.$$

այսինքն $\cup AA'$ աղեղը անցնելու ժամանակամիջոցը հավասար է
 $\cup AA'$ -ին սիմետրիկ $\cup B'B$ աղեղը անցնելու ժամանակամիջոցին:

§ 3. Տ. Մի բանի լացուցիչ առնչություններ

Եթե t_A և t_B ժամանակներում կետը գրավում է A , B
 Դիրքերը, ապա հաստատուն $\overline{\omega}$ արագացման գեղբում ունենք՝
 բոլոր (3, 7, 4)-ի և (3, 7, 13)-ի

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega} &= \frac{\overline{v_B} - \overline{v_A}}{t_B - t_A} \\ \overline{AB} &= \overline{r_B} - \overline{r_A} = \frac{\overline{v_B} + \overline{v_A}}{2} (t_B - t_A); \end{aligned} \right\} \quad (3, 8, 1)$$

Գիրը պարզեցնելու համար փոխենք այս պարագրաֆում ստորական նշանակումները. $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ -ի փոխարեն գրենք համապատասխանորեն $\bar{u}$ և $\bar{v}$, $\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$ նշանակենք $\bar{s}$ ($\overline{AB} = s$), իսկ անցած ժամանակամիջոցը անվանենք τ , $t_B - t_A = \tau$: Նոր նշանակումներով

$$\bar{w} = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{\tau}, \quad (3, 8, 2)$$

$$\bar{s} = \left(\frac{\bar{v} + \bar{u}}{2} \right) \tau, \quad (3, 8, 3)$$

(3, 8, 2) և (3, 8, 3)-ի վեկտորական արտադրյալը կլինի

$$\bar{w} \times \bar{s} = \frac{(\bar{v} - \bar{u}) \times (\bar{v} + \bar{u})}{2}$$

կամ

$$\bar{w} \times \bar{s} = \bar{v} \times \bar{u}, \quad (3, 8, 4)$$

A , B կետերի համար (3, 7, 11) կդրվի այսպես

$$v_B^2 - v_A^2 = 2\bar{w} \cdot \overline{AB}$$

կամ նոր նշանակումներով

$$v^2 - u^2 = 2\bar{w} \cdot \bar{s}, \quad (3, 8, 5)$$

(3, 8, 4)-ի և (3, 8, 5)-ի օգտագործումը հեշտացնում է մի շարք խնդիրների լուծումը:

2°. (3, 8, 4)-ի և (3, 8, 5)-ի մի քանի կարևոր կիրառումները: Այն դեպքում, երբ $\bar{w} = \bar{g}$ (3, 8, 4) և (3, 8, 5)-ը ստանում են հետևյալ տեսքը՝

$$\bar{g} \times \bar{s} = \bar{v} \times \bar{u} \quad (3, 8, 6)$$

$$v^2 - u^2 = 2\bar{g} \cdot \bar{s}, \quad (3, 8, 7)$$

Վեկտորներից իրենց չափերին անցնելու համար ($\bar{v}$, $\bar{u}$) անկյունը անվանենք φ և վերլուծենք $\bar{s}$ -ը երկու բաղադրիչների՝ մեկը զառհեստ $\bar{g}$ -ին, մյուսը $\bar{g}$ -ին ուղղահայաց (այսինքն հորիզոնական)՝

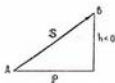
$$\left. \begin{aligned} \bar{s} &= \bar{g}h + \bar{\rho}, \\ h &= \bar{g} \cdot \bar{s}, \quad \bar{\rho} = \bar{s} - \bar{g} \cdot \bar{s}. \end{aligned} \right\} \quad (3, 8, 8)$$

որտեղ

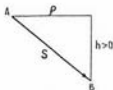
և-ը դրական է, եթե B կետը ցածր է A -ից, և բացասական, երբ B -ն է բարձր A -ից (նկ. 3-14, 3-15):

(3, 8, 6) և (3, 8, 8) առկա են՝

$$g\bar{z} = v\bar{u} \sin \bar{\varphi} \quad (3, 8, 9)$$



Նկ. 3-14:



Նկ. 3-15:

Այստեղ g , φ , v , u -ն համապատասխան վեկտորների չափերն են, իսկ $\sin \bar{\varphi} > 0$ միշտ, որովհետև $(\bar{v}, \bar{u})$ անկյունը միշտ փոքր է π -ից: Երբ $\sin \bar{\varphi} = 1$ ստանում ենք (3, 8, 9)-ից

$$\varphi = \frac{v\bar{u}}{g} \quad (3, 8, 9')$$

(3, 8, 7)-ը և (3, 8, 8)-ը առկա են

$$\bar{v}^2 - u^2 = 2\bar{g} \cdot \bar{s} = 2gh: \quad (3, 8, 10)$$

Նշենք, որ (3, 8, 9)-ը պարունակում է միայն տեղափոխման հարկանական (շ) պրոնկցիան, իսկ (3, 8, 10)-ը՝ միայն տեղափոխման ուղղանկյ h պրոնկցիան:

3'. Դիցուք կետը կարող է նաև անցնել B դիրքով, ունենալով A -ում մի առ $\bar{u}'$ արագություն, որի չափը հավասար է $\bar{u}$ -ի չափին՝

$$u' = u: \quad (3, 8, 11)$$

Ինչպիսիքն կլինի B -ում նոր $(\bar{v}')$ արագության չափը v' :

Ինչպիսիքն կլինի $(\bar{v}', \bar{u}')$ անկյունը:

Բանի որ A և B կետերը չեն փոխվել, և և ի-ն կմնան նույնը և (3, 8, 10)-ը կզրվի արագնա

$$\bar{v}'^2 - u'^2 = 2gh.$$

Պարզելով (3, 8, 11)-ից ստանում ենք

$$\bar{v}'^2 = \bar{v}^2, \quad v' = v: \quad (3, 8, 12)$$

(3, 8, 9)-ի հիման վրա ստանում ենք $[\bar{\varphi}' = \angle(\bar{v}', \bar{u}')]]$

$$vu \sin \varphi = v'u' \sin \varphi'$$

Համապատասխանը, կամ համաձայն (3, 8, 11)-ի և (3, 8, 12)-ի

$$\sin \varphi = \sin \varphi', \quad (3, 8, 13)$$

Պարզ է, որ $\bar{u}$ -ին և $\bar{u}'$ -ին համապատասխանող հեռացմերը տարրեր պարարտներ են և արդ պատճառով ($\bar{v}$, $\bar{u}$) ու ($\bar{v}'$, $\bar{u}'$) անկյունները ընդհանուր առմամբ իրար համասար չեն, հեռեւորակա (3, 8, 13)-ից բխում է

$$\varphi' = \pi - \varphi, \quad (3, 8, 14)$$

Այն մասնավոր դեպքում,

$$\text{երբ } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{նաև } \varphi' = \frac{\pi}{2}, \quad (3, 8, 15)$$

Այս դեպքին դեպքում՝

$$\bar{u}' = \bar{u}, \quad \bar{v}' = \bar{v};$$

Այսպիսով՝

Եթե φ անկյունը համասար չէ $\frac{\pi}{2}$, ապա A -ում երկու ($\bar{u}$, $\bar{u}'$)

տրագումբայինների միջևն ունի համապատասխանում ևն երկու տարրեր պարարտներ, որոնցով կարելի է հասնել A -ից B ։

Երբ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, կա միայն մի արդյուրի պարարտ։

4. Ինչպես հայտնի է

$$v^2 - u^2 = (\bar{v} + \bar{u}) \cdot (\bar{v} - \bar{u}), \quad (3, 8, 16)$$

ընդ որում համաձայն (3, 8, 2)-ի և (3, 8, 3)-ի (քանի որ $\bar{w} = \bar{g}$)

$$\bar{v} - \bar{u} = \bar{g}, \quad (3, 8, 17)$$

$$\left(\frac{\bar{v} + \bar{u}}{2} \right) \tau = \overline{AB} \quad \text{կամ} \quad \bar{v} + \bar{u} = \frac{2\bar{s}}{\tau}, \quad (3, 8, 18)$$

որակի τ -ն անցած մասնակն է։

Այն դուգահեռագիծը (նկ. 3-16), որի անկյունագծերն են $\bar{v} - \bar{u}$ և $\bar{v} + \bar{u}$ վերադրները, շատ պիտանի է։

$$\bar{u} = \overline{OC}, \quad \bar{v} = \overline{OD};$$

նշանակենք

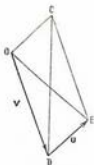
$$\bar{v} - \bar{u} = \overline{OD} - \overline{OC} = \overline{CD} = \bar{g},$$

$$\bar{v} + \bar{v} = \overline{OD} + \overline{OC} = \overline{OE} = \frac{2s}{\tau};$$

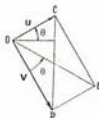
5. Այն դեպքում, երբ $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\bar{v} \perp \bar{u}$, դուրսեւանալիս դառնում է ուղղանկյուն (նկ. 3-17) և անկյունագծերը իրար հավասար են՝

$$CD = OE \text{ կամ } g\tau = \frac{2s}{\tau},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad (3, 8, 19)$$



Նկ. 3-16:



Նկ. 3-17:

Այժմ, երբ $OCED$ -ն ուղղանկյուն է, հաշվի առնելով (3, 8, 19)-ը, կարող ենք գրել

$$v^2 + u^2 = g^2 \tau^2 = g^2 \frac{2s}{g} = 2sg. \quad (3, 8, 20)$$

(3, 8, 10) և (3, 8, 20) տալիս են

$$v = \sqrt{g(s+h)} \quad (3, 8, 21)$$

$$u = \sqrt{g(s-h)} \quad (3, 8, 22)$$

Օգտվելով (3, 8, 21)-ից և (3, 8, 22)-ից պետք է հիշել, որ h -ը կարող է լինել թե՛ դրական (նկ. 3-15) և թե՛ բացասական (նկ. 3-14): Վերջապես (նկ. 3-17)

$$\frac{u}{v} = tg\theta$$

կամ ըստ (3, 8, 21)-ի և (3, 8, 22)-ի

$$tg\psi = \sqrt{\frac{s-h}{s+h}} \quad (3, 8, 23)$$

Այստեղ (նկ. 3—17) $\theta = \angle(\bar{v}, \bar{g}) = \angle(\bar{u}, \bar{r})$ որը A կետում արագություն կազմած անկյունն է հորիզոնի հետ:

Ի մի բերելով նոր ստացված արդյունքները, գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը.

Երբ արված են A , B կետերը և կետի արագության չափը A -ում, ապա, կախված արդ. չափից, հնարավոր են երեք դեպքեր.

ա) ինչպիսին էլ լինի A -ում կետի արագության ուղղությունը նա չի անցնի B -ով:

բ) արագության նշված չափին A կետում համապատասխանում են երկու որոշակի ուղղություններ, որոնցով շարժվելիս, կետը կանցնի B -ով:

գ) կետի արագության չափը A -ում այնպիսին է, որին համապատասխանում է միայն մի ուղղություն, որպեսզի նա անցնի B -ով:

Այս դերքին (դ) դեպքում.

1. A -ում կետի արագության չափը և կազմած θ անկյունը հորիզոնի հետ արտահայտվում են (3, 8, 22) և (3, 8, 23) բանաձևերով.

2. կետի A գիրքից B -ն հասնելու ժամանակամիջոցը (τ) որոշվում է (3, 8, 19) բանաձևով.

3. կետի արագությունները A և B գիրքերում իրար ուղղահայաց են.

4. $\overline{AB}$ տեղափոխման հորիզոնական (թ) պրոեկցիան որոշվում է (3, 8, 9') բանաձևով:

6°. (3, 8, 9)-ից անմիջապես հետևում է, որ եթե տված են φ և h -ը, իսկ $\bar{u}$ -ի ուղղությունը այնպիսին է, որ $\sin \varphi$ հասել է իր մաքսիմալ արժեքին $\left| (\sin \varphi)_{\max} = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \right|$, ապա $u\bar{v}$ արտա-

դրյալը ստանում է միևնույն արժեք: Այստեղից, քանի որ ըստ (3, 8, 10)-ի $v^2 = u^2 + 2gh$, եզրակացնում ենք, որ այդ պայմաններում $u = u_{\min}$, $v = v_{\min}$:

Եթե, ընդհանրապես, տված են $\bar{u}$ -ի չափը և h -ը և միաժամանակ $\bar{u}$ -ի ուղղությունը այնպիսին է, որ $\sin \varphi = (\sin \varphi)_{\max}$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, ապա (3, 8, 9)-ի հիման վրա φ -ն հասնում է իր մաքսիմալ արժեքին:

Այդ նշանակում է, որ $\bar{u}$ -ի բոլոր այլ ուղղությունների ղեկավարում հորիզոնական տեղափոխումը կլինի ավելի փոքր և կետք, անցնելով A -ով (կամ նետվելով A -ից), չի անցնի B -ով:

Այստեղից առաջանում է անվտանգությունն պարարտի գաղափարը: $\bar{u}$ -ի տվյալ չափի համար որոշենք $\varphi_{\max}$ որպես h -ի ֆունկցիա: Այս դիմը՝ $\varphi_{\max} = f(u = \text{const}, h)$ բաժանում է հարթությունը երկու մասի՝ A -ից մինչև կորը և կորից դուրս: Կորի հատկությունը այն է, որ եթե $\bar{u}$ -ի չափը տված է, ապա ինչպիսին էլ լինի $\bar{u}$ -ի ուղղությունը, կետք կմնա առաջին մասի սահմաններում:

Այդ կորը, ինչպես ցույց կտրվի, պարարտ է և կոչվում է անվտանգության պարարտ:

(3, 8, 9)-ից ստանում ենք

$$\varphi_{\max} = \frac{u\varphi}{g}$$

էամ, ողավելով (3, 8, 10)-ից,

$$\varphi_{\max} = \frac{u}{g} \sqrt{u^2 + 2gh},$$

$$\varphi_{\max}^2 = \frac{u^4}{g^2} + \frac{2u^2}{g} h: \quad (3, 8, 24)$$

Քանի որ $g = \text{const}$ և $\bar{u}$ -ի չափը ընդունված է հաստատուն, (3, 8, 24) ներկայացնում է պարարտի հավասարում:

Պետք է հիշել, որ h -ը կարող է լինել բացասական (նկ. 3—14) և դրական (նկ. 3—15): $h = 0$, երբ A և B -ն միևնույն բարձրություն վրա են: Այդ դեպքում

$$\varphi_{\max} = \frac{u^2}{g}, \quad t g \vartheta = 1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}:$$

Խնդիր 1. P հարթության A կետից նետված քարը ընկնում է P -ի վրա B կետում: P -ն կազմում է հորիզոնի հետ α անկյուն. քարի $\bar{u}$ արագությունը (A կետում) կազմում է P -ի հետ φ անկյուն (նկ. 3—18): B -ն բարձր է A -ից:

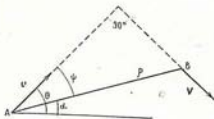
Որոշել՝ 1. ϕ անկյան ափսոսանքը, որի զեպում AB հետադարձվում է մեծագույնը է.

2. մեծագույն AB -ի չափը.

3. τ մամռանախառնիչը, որում քարը A -ից հասնում է B :

Լուծում: Պահպանելով § 3.8-ի նշանակումները, անհնր

$$S_{\max} = \frac{r_{\max}^2}{\cos \alpha}, \quad h = -r_{\max} \tan \alpha, \quad \tau = \frac{\pi}{2},$$



Նկ. 3-181

արինքն, բայց (3, 8, 24)-ի

$$B^2 r_{\max}^2 + 2g u^2 r_{\max} \tan \alpha - u^4 = 0$$

կամ

$$g r_{\max} = -u^2 \tan \alpha \pm \frac{u^4}{\cos \alpha},$$

որակից

$$g r_{\max} = u^2 \left(\frac{\pm 1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right), \quad (3, 8, 25)$$

Նկատի առնելով, որ $g r_{\max} > 0$, պահանջում ենք առ մասի առաջին գումարելիի + նշանը:

Ուստի

$$S_{\max} = \frac{u^2}{g} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = \frac{u^2}{g^2} \frac{1}{1 + \sin \alpha}, \quad (3, 8, 26)$$

Համաձայն (3, 8, 19)-ի $\tau = \sqrt{\frac{2S_{\max}}{g}}$,

$$\tau = \frac{u}{g} \frac{\sqrt{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (3, 8, 27)$$

Մեզ մնում է որոշել ϕ անկյունը: Այդ կարելի է անել օգտվելով (3, 8, 23)-ից, որովհետև $\phi = \theta - \alpha$:

Բայց դանդաղան ձևափոխությունները կիրառվեն, եթե վարվել հետևյալ կերպ:

Արագության հորիզոնական պրոեկցիան հաստատուն է և հավասար

$$u \cos \theta,$$

իսկ $S_{\max}$ -ի հորիզոնական պրոեկցիան հավասար է

$$S_{\max} \cos \alpha = \rho_{\max}$$

Պարզ է, որ եթե τ ժամանակամիջոցում անցնում է նախադարձը A -ից մինչև B , ապա

$$\rho_{\max} = S_{\max} \cos \alpha = u \cos \theta \tau = u \cos \theta \sqrt{\frac{2S_{\max}}{g}},$$

Այստեղից

$$\cos \theta = \frac{S_{\max}}{u \tau} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{g S_{\max}}}{\sqrt{2} u} \cos \alpha$$

կամ (3, 8, 26)-ի հիման վրա

$$\cos \theta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \alpha}},$$

$$\cos \theta = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right);$$

Վսեմի որ

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4},$$

ստանում ենք

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right);$$

Բայց $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ սուր անկյուն է, ուստի

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad (3, 8, 28)$$

Ուշադրով է, որ $\frac{\pi}{2}$ անկյունը անկախ է սկզբնական արագությունից և որոշվում է միայն α անկյանով:

Խնդիր 2. Առափնյա ամրոցի և հակառակորդի ռազմական հրանոթները արձակում են արկեր, որոնց սկզբնական արագությունների չափերը նույնն են և հավասար $\sqrt{2gk}$ (k -ն գրական հաստատուն է):

Ամրոցի հրանոթները h -ով բարձր են ռազմական հրանոթներից: Ապացուցել, որ արկերի (հորիզոնական) հեռահարությունների ($\rho = \rho_x$) հարաբերությունը՝

$$\rho_{\infty} : \rho_s = \sqrt{\frac{k+h}{k-h}}$$

1. ս. ծ. ս. մ. Հետաշարաթյուն ասեղով հասկանում են $\rho_{\max}$ բառ (3, 8, 9')-ի և § 3, 8, 6-ի առհասարակ

$$\rho_{\max} = \frac{vH}{g}$$

որակի u -ն արձակման արագության չափն է. իսկ v -ն արագության չափն է հարվածման մոմենտում: Համաձայն խնդրի պայմանների

$$u_{\infty} = u_s \equiv u$$

$$u = \sqrt{2gk}, \quad v^2 = u^2 + 2gh, \quad \text{կամ} \quad v^2 = 2g(k+h).$$

§ 3, 8, 2-ում ստիպված է, որ $h > 0$, երբ B կետը ցածր է A -ից և $h < 0$, եթե B -ն A -ից ավելի բարձր է: Այսպիսով ամբողջի արկի համար

$$h > 0, \quad v^2 = 2g(k+h),$$

իսկ սահմանային արկի համար $v^2 = 2g(k-h)$, եթե h -ը բարձրություն չափն է:

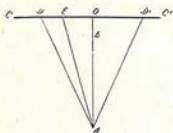
Վերջնականորեն ստանում ենք

$$\rho_{\infty, \max} = \frac{u\sqrt{2g(k+h)}}{g},$$

$$\rho_{s, \max} = \frac{u\sqrt{2g(k-h)}}{g}$$

կամ

$$\frac{\rho_{\infty, \max}}{\rho_{s, \max}} = \frac{\sqrt{k+h}}{\sqrt{k-h}}$$



Նկ. 3—19:

Խնդիր 3. Ինքնաթիռը թռչում է ուղղադիրձ h բարձրության վրա: Գետնի վրա տեղադրված A հրանքի հետախույժությունը ինքնաթիռի հետադժով անցնող ուղղաձիգ (P) հարթությանից հավասար է b (Նկ. 3—19): Հրանքի արկի թվաբան արագության չափը հավասար է u : Անվանելով l հետադժի ափն մասի երկարությունը, որում ինքնաթիռը ենթակա է խոցման, ցույց տալ, որ

$$l = \frac{\sqrt{u^4 - 2ghu^2 - b^2g^2}}{g},$$

1. ու ծ ու մ: Ենթադրենք, թե հրանոթը կարելի է պտտել ուղղաձիգ առանցքի շուրջը և այդ պատճառով արկի հետադիժը պտտանալու ուղղաձիգ Q հարթությունը կարող է կազմել P հարթության հետ ցանկացած անկյուն:

Թող P և Q հարթությունները հատեն արկի սկզբնական A դիրքով անցնող հորիզոնական հարթությունը համապատասխանաբար CC' և AD կամ AD' ուղիղներով: AB -ի պրոեկցիան հորիզոնական հարթության վրա նշանակենք $AE = \varphi$. հետևապես, տե՛ս (3, 8, 9), (3, 8, 10)

$$\rho_{\max} = \frac{uv}{g} = \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g} = \frac{\sqrt{u^4 - 2ghu^2}}{g},$$

Հասկանալի է, որ եթե $b > \rho_{\max}$, արկը չի կաշի ինքնաթիռին, իսկ եթե $b < \rho_{\max}$, ապա հարվածումը հնարավոր է: Դիցուք $\rho_{\max} = AD = AD'$: Այդ դեպքում DD' կլինի հետադի ալն հատվածը, որի վրա ինքնաթիռը ենթակա է խցման.

$$DD' = 2 \cdot OD =$$

$$= 2\sqrt{AD^2 - AO^2} = 2\sqrt{\rho_{\max}^2 - b^2} = \frac{\sqrt{u^4 - 2ghu^2 - b^2g^2}}{g},$$

§ 3. 9. Կեֆի շարժումը. երբ հասնասուն է արագացման ուղղությունը: Խնդիրներ:

Դ. Դիցուք արագացման ուղղությունը հաստատուն է. իսկ թվական արժեքը՝ ժամանակի կամայական ֆունկցիա.

$$\ddot{w} = \dot{h}w, \quad w = w(t), \quad \dot{h} = \text{const.} \quad (3, 9, 1)$$

(3, 9, 1)-ից ստանում ենք

$$\ddot{v} = \dot{h}\Phi(t) + \ddot{v}_0. \quad (3, 9, 2)$$

որտեղ

$$\Phi(t) = \int_0^t w dt, \quad w = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad (3, 9, 3)$$

իսկ $\ddot{v}_0$ -ն արագությունն է $t = 0$ ժամկետում:

Պարզ է, որ արագության չափը և ուղղությունը կախված են $\ddot{v}_0$ -ից և $\Phi = \Phi(t)$ ֆունկցիայից.

(3, 9, 2)-ի ինտեգրումը բերում է r շառավիղ վեկտորի արտահայտությունը:

(3, 9, 1) և (3, 9, 2)-ից անմիջապես (ստանդ անհնարահատվածի հավասարումը) կարելի է եզրակացնել, որ հետագիծը հարթ կոր է:

Իսկապես կազմենք $\bar{\psi} \times \hat{h}$ արտադրյալը. ըստ (3, 9, 2)-ի

$$\bar{\psi} \times \hat{h} = \bar{\psi}_0 \times \hat{h} = \text{const:} \quad (3, 9, 4)$$

Քանի որ $\bar{\psi}$ -ն (հետևապես $\hat{h}$ -ը) և $\bar{\psi}$ -ն դառափորված են հըդման հարթություն վրա, $\bar{\psi} \times \hat{h}$ արտադրյալը ուղղահայաց է այդ հարթությանը, այսինքն զուգահեռ է հետագծի բինորմալին: (3, 9, 4)-ը ցույց է տալիս, որ բինորմալի ուղղությունը հաստատուն է, հետևաբար հպման հարթությունը մնում է ինքն իրեն զուգահեռ: Այդ հնարավոր է միայն հարթ հետագծի դեպքում:

2°. Ներքևը բերված են թե՛ անալիտի խնդիրներ, երբ արագացման ուղղությունը հաստատուն է և թե՛ անալիտիկները, որոնցում արագացումը փոխվում է թե՛ ըստ չափի, թե՛ ըստ ուղղության:

Որևէ միջավայրում շարժվելիս մարմինը կրում է միջավայրի դանդաղեցնող ազդեցությունը. աղ նշանակում է, որ միջավայրից առաջացող լրացուցիչ $\bar{\delta}$ արագացումը միշտ հակազուգահեռ է արագությանը:

$$\bar{\delta} \parallel \bar{\psi}, \quad (3, 9, 4)$$

Լրացուցիչ արագացման չափը սովորաբար կախված է արագության չափից՝

$$\bar{\delta} = \delta(v):$$

Երբեմն $\bar{\delta}$ -ն համարվում է հաստատուն. փոքր արագությունների դեպքում $\bar{\delta} = kv$, որտեղ $k = \text{const}$. մեծ արագությունների դեպքում $\bar{\delta}(v)$ -ն արագության չափի բարդ ֆունկցիա է:

Եթե, օրինակ, մարմինը նետվում է վերև փոքր ուղղածից՝ արագությամբ, ապա շարժման վերելքի մասում արագացումը՝

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{g} + \bar{\delta}, & \omega &= g + \delta, \\ \text{շարժման վաղեջքի մասում} \\ \bar{\omega} &= \bar{g} + \bar{\delta}, & \omega &= g - \delta: \end{aligned} \right\} \quad (3, 9, 5)$$

Նշողի 1: Փարը նեղում է գերե ուղղաձիգ $\bar{v}_0$ արագությամբ

ա) մի անգամ անոց տարածություն մեջ (և շարժվում է $\bar{g}$ արագացումով):

բ) մյուս անգամ օդի մթնոլորտի մեջ, ընդ որում արագացումը՝ $\bar{w} = \bar{g} + \bar{z}$, $\bar{z} = -\bar{v}_0^2$, իսկ նա հաստատուն է:

Փարը գերազանցում է սկզբնական դիրքը ա) դեպքում T մամանակից հետո, իսկ բ) դեպքում τ մամանակից հետո.

Արտելի γ , և գտնել, թե ինչպիսի դեպքերում $\tau = T$:

Լուծում: Մենտրեկենք սկզբում բ) դեպքը, շարժումը ուղղադիմ է և ադ պատճառով նպատակահարմար է վերադարձնելից անցնել սկալար մեծությունների. նշանակելով $\bar{z}$ -ի չափը $\bar{z}$, կարող ենք գրել [(3, 9, 5)-ի հիման վրա] շարժման վերընթաց մասի համար, $\bar{w} = \bar{g} + \bar{z} = \text{const}$, վերելքի մամանակը $t_1 = \frac{v_0}{\bar{g} + \bar{z}}$:

Հանապարհի վարընթաց մասում արագացումը $\bar{w} = \bar{g} - \bar{z}$, իսկ մամանակը՝ $t_2 = \frac{v_0}{\bar{g} - \bar{z}}$, որտեղ v_0 ան արագությունը չափն է, որով քարը, վերադառնալիս, հասնում է նեղման դիրքը:

$$\tau = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{\bar{g} + \bar{z}} + \frac{v_0}{\bar{g} - \bar{z}}$$

Այստեղ v_0 գետ անհատ է, $\frac{v_0}{\bar{g} - \bar{z}}$ կոտորակը կարելի է արտահայտել v_0 , $\bar{z}$ և $\bar{g}$ -ի միջոցով Իսկապես, ըստ (3, 5, 14)-ի վերելքի բարձրությունը

$$h = \frac{v_0^2}{2(\bar{g} + \bar{z})} \quad \text{կամ} \quad v_0 = \sqrt{2h(\bar{g} + \bar{z})}, \quad \frac{v_0}{\bar{g} + \bar{z}} = \sqrt{\frac{2h}{\bar{g} + \bar{z}}}$$

նման ձևով

$$h = \frac{v_0^2}{2(\bar{g} - \bar{z})}, \quad \frac{v_0}{\bar{g} - \bar{z}} = \sqrt{\frac{2h}{\bar{g} - \bar{z}}}$$

Այսպիսով

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g+\bar{z}}} + \sqrt{\frac{2h}{g-\bar{z}}} = \sqrt{2h} \left(\frac{1}{\sqrt{g+\bar{z}}} + \frac{1}{\sqrt{g-\bar{z}}} \right) =$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{g+\bar{z}}} \left(\frac{1}{\sqrt{g+\bar{z}}} - \frac{1}{\sqrt{g-\bar{z}}} \right) = v_0 \left(\frac{1}{g+\bar{z}} + \frac{1}{\sqrt{g^2-\bar{z}^2}} \right),$$

Ինչպես հայտնի է

$$T = \frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g} = 2 \frac{v_0}{g},$$

Համեմատելով τ և T -ի արտահայտությունները, տեսնում ենք, որ $\tau = T$ երկու դեպքերում՝ $\bar{z}=0$, $\bar{z} = \frac{g}{\sqrt{2}}$,

Պարզ է թե ինչու $\tau = T$, երբ $\bar{z} = 0$. արդ դեպքում քարի շարժումը օդում ոչնչով չի տարբերվում նրա շարժումից դատարկութան մեջ: $\bar{z}$ -ի մյուս արժեքը ($\bar{z} = \frac{g}{\sqrt{2}}$) նույնպես ունի հասարակ բացատրություն: Երբ $\bar{z} \neq 0$ քարի վերելքի բարձրությունը ու վերընթաց և վարընթաց շարժումների միջին արագություններն ավելի փոքր են, քան նույն մեծությունները անօդ տարածության մեջ: Ուստի $\bar{z}$ -ի որոշակի արժեքի դեպքում բարձրության և միջին արագությունների քանոթյունների գումարը օդի մեջ կարող է հավասար լինել բարձրության և միջին արագության քանոթյունի կրկնապատիկին դատարկության մեջ:

Խնդիր 2: $\bar{v}_0$ ուղղաձիգ արագությամբ գնդի վերև նետված քարը՝

ա) օդի միջնորոտում հասնում է h բարձրության և, վերադառնալով, նետման կետում ունի $\bar{v}_0$ արագություն.

բ) անօդ տարածության մեջ կհասնի H բարձրության և վերադառնալով կունենար նետման կետում ($-\bar{v}_0$) արագություն.

Ապացուցել, որ ինչպիսին էլ լինի $\bar{z} = f(v)$ ֆունկցիան,

$$h < H, \quad \bar{v}_0 < v_0$$

Լուծում: Համաձայն (3, 9, 5)-ի օդում, ուղղաձիգ վերելքի ընթացքում արագացումը

$$\bar{w} = \bar{g} + \bar{z} = \bar{g} - v f(v), \quad \bar{g} \uparrow \bar{v}, \quad \bar{g} \uparrow (-v).$$

Նեաեապես ցանկացած $f(v)$ -ի դեպքում $\omega > g$: Այսպիսով բարձրացման ընթացքում արագացումը ուղղված է ուղղաձիգ ներքև և ըստ չափի դերագանցում է g , իսկ արագութիւնը $\vec{v} \uparrow, \vec{\omega}$, ուստի շարժումը դանդաղող է՝ $d\vec{v} \uparrow \vec{\omega}$: Որոշ h բարձրութիւն վրա արագութիւնը դառնում է զրո և ապա քարը սկսում է ուղղաձիգ իջնել, այն էլ մոմենտում, երբ $v=0$, արագացումն էլ համասար է լինում g : Բարի իշեցման ընթացքում արագացումը, պահպանելով իր ուղղվածութիւնը, փոքրանում է ըստ չափի, իսկապես, այժմ $\vec{v} \uparrow, \vec{g}$ և $\vec{\omega} = \vec{g} - \vec{v}f(v)$, այսինքն $\omega < g$: Նկատի առնելով, որ ամենարարձր կեանում արագութիւնը զրո է, կարող ենք գրել վերելքի համար՝

անոց տարածութիւն դեպքում

$$\frac{0 - v_0^2}{2} = \int_0^H g \cdot d\bar{r} = -gH, \quad (a)$$

օդի մթնոլորտում

$$\frac{0 - v_0^2}{2} = \int_0^h \bar{\omega} \cdot d\bar{r} = -\omega \cdot h.$$

Այստեղ ω ներկայացնում է վերելքի միջին արագացման չափը, որ որոշվում է

$$\omega \cdot h = \int_0^h \omega dh$$

պարմանից և որովհետեւ վերելքի լուրաքանչյուր կետում $\omega = g$ ապա նաեւ $\omega > g$:

Այսպիսով ունենք

$$\frac{v_0^2}{2} = gH = \omega \cdot h \text{ և քանի որ } \omega > g, \text{ ապա } h < H:$$

Նշանակելով վայրէջքի միջին արագացման չափը ω' , վերում ստածից տեսնում ենք, որ $\omega' < g$: Բացի արդ վայրէջքի համար կարող ենք գրել

$$\frac{v_0^2 - 0}{2} = \int_h^0 \bar{\omega}' \cdot d\bar{r} = \omega' \cdot h, \quad (a')$$

Բաժանելով (ω')-ը (ω)-ի վրա, ստանում ենք

$$\left(\frac{\dot{v}_0}{v_0}\right)^2 = \frac{\omega_0}{g} \frac{h}{H},$$

Այս արտահայտության աջ մասի լուրջքանչյուր կոտորակ փոքր է մեկից, ուստի $v_0' < v_0$ ։ Այսպիսով խնդիրը լիովին լուծված է։

Նշելով 3։ Ուսումնասիրել

$$\bar{\omega} = -k\bar{v} \quad (3, 10, 1)$$

(k -ն դրական հաստատուն դործակից է)

արագացում ունեցող քարի շարժումը։

Դիտողության վերևում սոված էր, որ միջավայրի դանդաղեցնող ազդեցության դեպքում արագացումը սովորաբար ունի $\bar{\omega} = \bar{g} + \bar{\delta}$ տեսքը, այստեղ $\bar{\omega} = \bar{\delta} = -k\bar{v}$, այսինքն բացակայում է ազատ անկման $\bar{g}$ արագացումը։

Լուծում։ Նախ և առաջ հիշեցնենք (տե՛ս խնդիր 1, § 2, 6), որ արագության և արագացման կոլինեառություն դեպքում $(\bar{v} \parallel \bar{\omega})$ շարժումը ուղղադիրձ է, այսինքն՝ հետադիրձ ուղիղ դիժ է։

Ցանկանալով շաղկապել տեղափոխումը արագության փոփոխման հետ, բաղմադասականք (3, 10, 1)-ի երկու մասերը dt -ով և ինտեգրենք՝

$$\bar{\omega} dt = -k\bar{v} dt$$

կամ, քանի որ

$$\bar{\omega} dt = d\bar{v}, \quad \bar{v} dt = d\bar{r}, \quad k = \text{const},$$

$$d\bar{v} = -k d\bar{r} = -d(k\bar{r}),$$

$$d(\bar{v} + k\bar{r}) = 0,$$

$$\bar{v} + k\bar{r} = \bar{C}, \quad (3, 10, 2)$$

(3, 10, 2)-ը նիշտ է ժամանակի բոլոր մոմենտների համար, ուստի նշանակելով 0 ինդեքսով սկզբնական ժամանակին վերաբերվող մեծությունները, կունենանք

$$\bar{v}_0 + k\bar{r}_0 = \bar{C}. \quad (3, 10, 2')$$

Հանելով (3, 10, 2')-ից (3, 10, 2)-ը, կստանանք

$$\bar{v}_0 - \bar{v} = k(\bar{r} - \bar{r}_0), \quad (3, 10, 3)$$

(3, 10, 3)-ը կիրառելուց տառը դիմենք $\frac{d\bar{v}^2}{2} = \bar{\omega} \cdot d\bar{r}$ թեորեմին, ըստ (3, 10, 1)-ի

$$\frac{d\bar{v}^2}{2} = -k\bar{v} \cdot d\bar{r} = -k\bar{v} \cdot \bar{v} dt = -k\bar{v}^2 dt. \quad (3, 10, 4)$$

կամ

$$d\bar{v} = -v d(kt), \quad (3, 10, 4')$$

(3, 10, 4')-ի մեջ անջատելով փոփոխականները և ինտեգրելով, կստանանք

$$v = D e^{-kt},$$

որտեղ D -ն ինտեգրման հաստատունն է:

D -ն որոշվում է, եթե հալանի է սկզբնական արագությունը: Իսկապես, ընդունելով, որ $v = v_0$, երբ $t = 0$, ունենք $v_0 = D$, և արագիտով

$$v = v_0 e^{-kt}, \quad (3, 10, 5)$$

(3, 10, 5)-ից տեսնում ենք, որ v և v_0 -ն միշտ նայնանշան են, բայցի այդ շարժումը ուղղագիծ է: Հետևապես, բազմապատկելով (3, 10, 5)-ի երկու մասերը հաստատուն $\bar{v}$ միավոր վեկտորով, ստանում ենք

$$\bar{v} = \bar{v}_0 e^{-kt}, \quad (3, 10, 5')$$

Նույն պատճառաբանությամբ կարելի է տալ վեկտորական բնույթ նաև (3, 10, 4') հավասարմանը՝

$$d\bar{v} = -k\bar{v} dt = \bar{v} d(-kt) \quad (3, 10, 4'')$$

և արեմ (3, 10, 5')-ը հանդիսանում է (3, 10, 4'')-ի ինտեգրալը:

(3, 10, 4'')-ից (3, 10, 4')-ին անցնելու հնարավորությամբ կրդտագործի հետադարձ:

(3, 10, 3) և (3, 10, 5')-ը տալիս են

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \frac{\bar{v}_0}{k} (1 - e^{-kt}), \quad (3, 10, 6)$$

Այսպիսով պիտոյ ուղղագիծ շարժման գեպում տեղափոխումը արտահայտված է երկու տարրեր կզանակով՝ արագությունների փոփոխման միջոցով, տե՛ս (3, 10, 3) և սկզբնական արագության ու մասնականի միջոցով (3, 10, 6):

Համաձայն (3, 10, 3')-ի արագությունը միշտ մնալով ինքն իրեն համադրական դառնում է 0, երբ $t = \infty$: Այս հանգամանքից և (3, 10, 3)-ից ելնելով, եզրակացնում ենք, որ մեծագույն տեղափոխման չափը՝

$$|\bar{r} - \bar{r}_0|_{\max} = \frac{v_0}{k}, \quad (3, 10, 7)$$

Ատացած առնչությունները հնարավորություն են տալիս պատասխանելու մի քանի հարցերի՝

Ինչպիսին է $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ տեղափոխումը t_1 -ից մինչև t_2 մոմենտներն ժամանակամիջոցում կանցնիլի ամբողջ ճանապարհի առաջին մեկ երրորդ, երկրորդ մեկ երրորդ մասը և այլն:

Խնդիր 4: Պարը նետված է վերև այնպես, որ նրա սկզբնական $\bar{v}_0$ արագությունը կազմում է α անկյուն հորիզոնի հետ: Գրահնալով, որ արագացումը

$$\bar{w} = \bar{g} - k\bar{v} \quad (k = \text{const}, \quad k > 0), \quad (3, 10, 8)$$

ցույց տալ, որ շարժման ընթացքում արագացման ուղղությունը անփոփոխ է, իսկ չափը անընդհատ նվազում է:

Լուծում: Նախորդ խնդիրներում շարժումը ուղղադիր էր: Եթե ուղղադիր շարժումը կորագրվի է, քանի որ սկզբնական արագությունը և արագացումը կոլինեար չեն ($\bar{w}_0 = \bar{g} - k\bar{v}_0$): Հաստատուն լինելու շնորհիվ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{g}}{dt} = 0, \quad \text{հետևապես} \quad \frac{d\bar{w}}{dt} = -k \frac{d\bar{v}}{dt} = -k\bar{w} \\ \text{կամ} \quad d\bar{w} = \bar{w}d(-kt) \end{aligned} \right\} \quad (3, 10, 9)$$

Արտահայտենք $\bar{w}$ -ն իր միավոր $\hat{w}$ վեկտորի միջոցով՝

$$\bar{w} = \hat{w}w:$$

Այժմ

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = w \frac{d\hat{w}}{dt} + \hat{w} \frac{dw}{dt} = -k\bar{w} = -k\hat{w}w \quad (3, 10, 10)$$

(3, 10, 10)-ից երևում է, որ $w \frac{d\hat{w}}{dt} = 0$ և, որովհետև $w \neq 0$ եզրակացնում ենք՝

$$\frac{d^*w}{dt} = 0$$

ալսինքն $\bar{w}$ -ի ուղղությունը անփոփոխ է:

Այժմ (3, 10, 10)-ը տալիս է $\frac{d^*w}{dt} = -kw$ կամ $d \ln w = d(-kt)$: Այստեղից [տե՛ս (3, 10, 4')] և (3, 10, 5) ինդիք 3] $w = w_0 e^{-kt}$: Այս առնչությունը ցույց է տալիս, որ ժամանակի ընթացքում w (արագացման չափը) անընդհատ նվազում է:

Կարելի է բ վարվել և այլ կերպ. բաց ձեռի (3, 10, 9)-ը լիովին նման է (3, 10, 4')-ին հետևապես

$$\bar{w} = \bar{w}_0 e^{-kt}, \quad (3, 10, 11)$$

(3, 10, 11)-ը ցույց է տալիս թե $\bar{w}$ -ի ուղղության անփոփոխ լինելը և թե նրա չափի նվազելը:

Խնդիր 5:

$$\bar{w} = \bar{g} - k\bar{v} \quad (k = \text{const}, k > 0) \quad (3, 10, 12)$$

արագացում ունեցող քարը նկատված է վեր որոշ անկյան տակ հորիզոնի հետ: Ուսումնասիրել քարի շարժումը:

Լուծում: Նախորդ խնդրում ցույց է տրված, որ (3, 10, 12)-ի դեպքում արագացման ուղղությունը հաստատուն է և արտածված է արագացման կախումը ժամանակից [տե՛ս (3, 10, 11)]

$$\bar{w} = \bar{w}_0 e^{-kt}, \quad (3, 10, 13)$$

Նաև հայտնի է, որ (3, 10, 12)-ի դեպքում հետագիծը հարթ կոր է:

Այժմ պետք է դանել արագություն ու ակցափոխման կախումը ժամանակից և մի քանի այլ առնչություններ:

Հիշելով, որ $\bar{g} = \text{const}$ և նշանակելով սկզբնական մեծությունները 0 ինդեքսով, (3, 10, 12)-ից ստանում ենք

$$\bar{w}_0 = \bar{g} - k\bar{v}_0, \quad (3, 10, 12')$$

(3, 10, 12) և (3, 10, 12')-ը տալիս են

$$\bar{w} - \bar{w}_0 = k(\bar{v}_0 - \bar{v}), \quad (3, 10, 14)$$

(3, 10, 13) և (3, 10, 14)-ից ստանում ենք

$$\bar{v} = \frac{\bar{w}_0}{k} (1 - e^{-kt}) + \bar{v}_0 \quad (3, 10, 15)$$

կամ համաձայն (3, 10, 12')-ի

$$\bar{v} = \frac{\bar{g}}{k} (1 - e^{-kt}) + \bar{v}_0 e^{-kt} \quad (3, 10, 15')$$

Բաղմապատկենք (3, 10, 15)-ի երկու մասերը dt -ով. նկատի առնելով, որ

$$\bar{v} dt = d\bar{r},$$

կստանանք

$$d\bar{r} = \frac{\bar{w}_0}{k} (1 - e^{-kt}) dt + \bar{v}_0 dt$$

կամ

$$d\bar{r} = \left(\frac{\bar{w}_0}{k} + \bar{v}_0 \right) dt - \frac{\bar{w}_0}{k(-k)} e^{-kt} d(-kt),$$

Ինտեգրելով վերջին արտահայտությունը, կունենանք

$$\bar{r} = \left(\frac{\bar{w}_0}{k} + \bar{v}_0 \right) t + \frac{\bar{w}_0}{k^2} e^{-kt} + \bar{D},$$

Ինտեգրման D հաստատունը որոշելու համար ընդունենք, որ $\bar{r} = \bar{r}_0$, երբ $t = 0$, ուստի

$$\bar{r}_0 = \frac{\bar{w}_0}{k^2} + \bar{D}$$

և ավարտով

$$\bar{r} = \left(\frac{\bar{w}_0}{k} + \bar{v}_0 \right) t + \frac{\bar{w}_0}{k^2} e^{-kt} + \bar{r}_0 - \frac{\bar{w}_0}{k^2} \quad (3, 10, 16)$$

(3, 10, 16)-ը արտահայտում է $\bar{r}$ -ը որպես ժամանակի ֆունկցիա, ընդ որում $\bar{r} - \bar{r}_0$ տեղափոխման արտահայտությունը պարունակում է միայն երկու հաստատուն վեկտորներ՝ $\bar{w}_0$ և $\bar{v}_0$ ։ Այս նշանակում է, որ $\bar{r}$ (կամ $\bar{r} - \bar{r}_0$) վեկտորի հոդոգրաֆը, արվիչն կետի հետադիմը հանդիսանում է հարթ կոր։ Այդ եղել է ապացուցված § 3, 9, 1-ում այն ափսոսելի ընդհանուր դեպքի համար, երբ արագացման շափը կամայական է, իսկ ուղղությունը հաստատուն։

Օգտվելով (3, 10, 12')-ից կարելի է (3, 10, 16)-ը արտա-
ղրել արագեւ

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{\bar{g}}{k} t - \frac{\bar{g}}{k^2} (1 - e^{-kt}) + \frac{\bar{v}_0}{k} (1 - e^{-kt}) + \bar{r}_0, \\ \bar{r} &= \frac{\bar{v}_0}{k} (1 - e^{-kt}) - \frac{\bar{g}}{k^2} (1 - kt - e^{-kt}) + \bar{r}_0, \end{aligned} \right\} (3, 10, 16')$$

2. Այն դեպքում, երբ $k=0$, (3, 10, 12)-ից ստացվում է,
որ $\bar{\omega} = \bar{g}$ ուրեմն (3, 10, 15) և (3, 10, 16) առնչությունները
պետք է համապատասխանաբար վերածվեն (3, 7, 5)-ի և
(3, 7, 6)-ի:

Այլ իրոք, բնդունելով, որ $k=0$, և կիրառելով Լոպիտալի
կանոնը, կստանանք

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-kt}}{k} = t, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - kt - e^{-kt}}{k^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Հետևաբար, երբ $k \rightarrow 0$, (3, 10, 15)-ը վերածվում է (3, 7, 5)-ի,
իսկ (3, 10, 16')-ը (3, 7, 6)-ի:

ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐ, ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ, ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ՇԱՐՃՈՒՄ

§ 4.1. Հարթ պատկերի մակերևույթ սրբեա վեկտոր

1° Դիտարկենք $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ հարթ փակ վեկտորական շղթան, որը կազմված է

$$\bar{a}_1 = \overline{A_1 A_2}, \bar{a}_2 = \overline{A_2 A_3}, \dots, \bar{a}_n = \overline{A_n A_1}$$

վեկտորներով (նկ. 4-1, նկարի վրա $n = 4$).

$$\sum_1^n \bar{a}_k = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n = 0; \quad (4, 1,1)$$

Ընտրենք շառավիղ-վեկտորների O սկիզբը $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ բաղձանկյան ներսում՝

$$\bar{r}_1 = \overline{OA_1}, \bar{r}_2 = \overline{OA_2}, \dots, \bar{r}_n = \overline{OA_n},$$

Շառավիղ-վեկտորները բաժանում են փակ շղթան n եռանկյունների. $OA_1 A_2 O$ եռանկյան σ_1 մակերեսը համասար է

$$\overline{OA_1} \times \overline{A_1 A_2} = \bar{r}_1 \times \bar{a}_1$$

վեկտորական արտադրյալի չափի կեսին՝

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} |\bar{r}_1 \times \bar{a}_1|,$$

նույն կերպ

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} |\bar{r}_2 \times \bar{a}_2|$$

և այլն: Ամբողջ $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ հարթ բաղձանկյան մակերեսը

$$\sigma = \sum_1^n \sigma_k = \frac{1}{2} \sum_1^n |\bar{r}_k \times \bar{a}_k|; \quad (4, 1,2)$$

ներկա հանդամանքի վրա պետք է դարձնել ուշադրություն:

ա) Այնպես է, որ OA_1A_2O , OA_2A_3O , ... հաանկյուններից յուրաքանչյուրի շրջանցումը կարելի է կատարել այն ուղղությամբ, որով շրջանցվում է $A_1A_2 \cdots A_nA_1$ վեկտորական շղթան:

Օրինակ, նկ. 4—1-ի վրա վեկտորական շղթան շրջանցվում է ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ, նույն ուղղությամբ կարելի է շրջանցել հաանկյունները՝ $\overrightarrow{OA_1} \rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \rightarrow \overrightarrow{A_2O}$, $\overrightarrow{OA_2} \rightarrow \overrightarrow{A_2A_3} \rightarrow \overrightarrow{A_3O}$, ...

Այդպիսի շրջանցման դեպքում O կետում սկսվող կամ վերջացող հաանկյան կողմից յուրաքանչյուրը հանդիպում է երկու անգամ հակառակ ուղղություններով, օրինակ OA_1A_2O և OA_2A_3O հաանկյուններում ունենք $\overrightarrow{A_2O}$ ու $\overrightarrow{OA_2}$ և այլն:

բ) Բոլոր վեկտորական արտադրվածները՝

$$\vec{r}_1 \times \vec{a}_1, \vec{r}_2 \times \vec{a}_2, \dots$$

ուղղահայաց են՝ վեկտորական շղթայի հարթությունը, համապատասխան են միմյանց և ուղղված են այնպես, որ նրանց վախճաններից վեկտորական շղթան (և բոլոր հաանկյունները) տեսանելի են ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ:

ա, բ-ում նշված հանդամանքները թույլ են տալիս հարթ վեկտորական շղթայի մակերևույթի վրա գտնվող վեկտոր, որն անվանվում է վեկտորական մակերևույթի նշանակելով այն $\vec{\sigma}$ տարրով, կարող ենք ասել՝

$[A - A]$ վեկտորական շղթայով պարփակված վեկտորական մակերևույթ մի վեկտոր է՝

ա) որի չափը հավասար է շղթայով պարփակված մակերևույթին

բ) այդ վեկտորը ուղղահայաց է շղթայի հարթությանը և

գ) ուղղված է այնպես, որ նրա վերջից հարթությունը նախկին վեկտորական շղթայի շրջանցումը տեսնում ենք ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ:

$[A - A]$ -ից անմիջապես հետևում է, որ OA_1A_2O , OA_2A_3O , ... հաանկյունների վեկտորական մակերևույթները՝ $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$, ..., $\vec{\sigma}_n$ կարտահանվեն այնպես՝

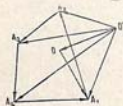
$$\vec{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \vec{r}_1 \times \vec{a}_1, \quad \vec{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \vec{r}_2 \times \vec{a}_2, \dots, \vec{\sigma}_n = \frac{1}{2} \vec{r}_n \times \vec{a}_n, \quad (4, 1, 3)$$

իսկ վեկտորական $A_1A_2 \cdots A_nA_1$ շղթայի վեկտորական մակերևույթ՝

$$\vec{s} = \sum_1^n \vec{s}_k, \quad (4, 1, 1)$$

§ 4.2. Կամարական մակերևույթի վեկտորական մակերեսը

Այժմ O -ի փոխարեն, որպես շատավիզ-վեկտորների սկիզբ դիտենք տարածություն կամարական O' կետը: Շղթայի գագաթների նոր շատավիզ-վեկտորները՝ $\vec{O'A}_1, \vec{O'A}_2, \dots, \vec{O'A}_n$ համապատասխանորեն անվանենք $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, իսկ $\vec{O'O}$ համապարտվումը նշանակենք $\vec{b}$ (նկ. 4-2):



Նկ. 4-2

$$\vec{O'A}_1 = \vec{O'O} + \vec{OA}_1 \text{ կամ } \vec{r}_1 = \vec{b} + \vec{r}_1,$$

նման ձևով

$$\vec{r}_2 = \vec{b} + \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n = \vec{b} + \vec{r}_n: \quad (4, 2, 1)$$

Նշենք մեկ շարիխով ալն բոլոր վեկտորական մակերեսները, որոնք կապված են O' սկզբի հետ՝

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{2} \vec{r}_1 \times \vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{O'A}_1 \times \vec{A_1A_2}, \text{ և այլն:}$$

Օգտվելով (4,2,1)-ից և (4,1,3)-ից, ունենք

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{2} \vec{r}_1 \times \vec{a}_1 = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{r}_1) \times \vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{a}_1 + \vec{s}_1,$$

այսինքն

$$\vec{s}_1 = \vec{s}_1 + \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{a}_1:$$

Նույն կերպ

$$\vec{s}_2 = \vec{s}_2 + \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{a}_2, \dots, \vec{s}_n = \vec{s}_n + \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{a}_n \quad (4, 2, 2)$$

կամ նշանակելով $\sum_1^n \vec{s}_k$ դամարք $\vec{s}'$ և օգտվելով (4,1,4)-ից՝

$$\vec{s}' = \sum_1^n \vec{s}_k = \vec{s} + \frac{1}{2} \vec{b} \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n). \quad (4, 2, 3)$$

Համաձայն (4,1,1) $\vec{s}' = \vec{s}_1$

(4,2,3) առնչությունը նշաւ է ինչպիսին էլ լինի O' կետի գառավորությունը տարածություն մեջ:

(4,2,3)-ը առանձնապես հետաքրքիր է, երբ O' -ն չի գտնվում վեկտորական շղթայի հարթության մեջ: Իսկապես, ալյ դեպքում $(O'A_1A_2\cdots A_nO')$ իրենից ներկայացնում է մի բուրգ, $O'A_1A_2O'$, $O'A_2A_3O'\cdots$ եռանկյունները հանդիսանում են բուրգի կողմնային նիստերը, իսկ

$$\vec{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 \times \vec{a}_1, \quad \vec{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \vec{\rho}_2 \times \vec{a}_2, \cdots \quad \vec{\sigma}_n = \frac{1}{2} \vec{\rho}_n \times \vec{a}_n,$$

ալյ նիստերի վեկտորական մակերևույթներն են (նկ. 4-3):

Նկատի առնելով, որ $A_1A_2\cdots A_nA_1$ բազմանկյունը բուրգի հիմքն է, տեսնում ենք, որ (4,2,3)-ում և (4, 1, 4)-ում

$$\vec{\sigma} = \sum_1^n \vec{\sigma}_k = \frac{1}{2} \sum_1^n \vec{\rho}_k \times \vec{a}_k \quad \text{և} \quad \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_1^n \vec{r}_k \times \vec{a}_k$$

համադասարանարար ներկայացնում են բուրգի կողմնային մակերևույթի և հիմքի վեկտորական մակերևույթները:

2°. (4,2,3)-ին կարելի է տալ ալլ, ավելի հարմար տեսք, եթե հաշվի առնենք հետևյալը: Երբ հաջորդարար շրջանցվում են բուրգի կողմնային նիստերը, յուրաքանչյուր կողը անցվում է երկու անգամ հակառակ ուղղությամբ ($\overrightarrow{O'A}$, $\overrightarrow{A_1O'}$; $\overrightarrow{O'A_2}$,



Նկ. 4-3

$\overrightarrow{A_2O'}$ և ալլն), իսկ հիմքի շղթայի վեկտորներից յուրաքանչյուրը անցվում մեկական անգամ:

Եթե բացի կողմնային նիստերից շրջանցվում է նաև հիմքի վեկտորական շղթան (բազմանկյունը), ապա բուրգի կողմնային մասերի ($\overrightarrow{O'A_1}$, $\overrightarrow{O'A_2}, \cdots$) կողերն էլ, հիմքի բազմանկյան կողմերն էլ շրջանցվում են երկուական անգամ. միայն կողմնային կողերը՝ առարկա ուղղություներով, իսկ հիմքի բազմանկյան կողմերը՝ երկուական անգամ միևնույն ուղղությամբ (նկ. 4-4ա):

[4-B] Պայմանավորվենք վարվել այնպես, որ բուրգի յուրաքանչյուր կողը (անկախ այն բանի պատկանում և ես որևէ կողմնային նիստին, րև հիմքի բազմանկյանը) շրջանցվի երկուական անգամ հակառակ ուղղություներով:

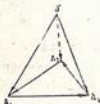
Ալյ իրադրմելու համար պահպանենք կողմնային նիստերի շրջանցման ուղղությունը և միաժամանակ փոխենք հիմքի շղթայի վեկտորների ուղղվածությունները, այսինքն

$$\bar{a}_1 = \overline{A_1 A_2}, \quad \bar{a}_2 = \overline{A_2 A_3}, \dots, \bar{a}_n = \overline{A_n A_1}$$

ձեկտորենի փոխարեն դիտենք, հիմքը շրջանցելիս,

$$-\bar{a}_1 = \overline{A_2 A_1}, \quad -\bar{a}_2 = \overline{A_3 A_2}, \dots, \quad -\bar{a}_n = \overline{A_1 A_n}$$

ձեկտորենի կազմված շղթան (նկ. 4—4բ)։



Նկ. 4—4ա



Նկ. 4—4բ

Այսպիսի պայմաններում, կողմնային նիստերի ձեկտորական մակերևանների ուղղվածությունները կմնան անփոփոխ, իսկ հիմքի ձեկտորական մակերևույթի փոխարեն կդառնա $(-\bar{\sigma})$ ։
(4,2,3)-ը ալժամ կգրվի այսպես՝

$$\bar{\sigma}' = \sum_1^n \bar{\sigma}_k' = (-\bar{\sigma})$$

կամ

$$\bar{\sigma}' + \bar{\sigma} = 0; \quad (4, 2, 4)$$

[4—B'] երև [4—B] պայմանը բավարարված է, յուրաքանչյուր բուրգի վեկտորական մակերեսը (նիստերի և ճիմքի վեկտորական մակերեսների գումարը) հավասար է զրոյի։

Հետագայում միշտ կհամարենք, որ [4—B] պայմանը բավարարված է։

3°. Պատկերացնենք մի կամայական բաղժանիստ։ Տարածենք այս բաղժանիստի վրա բուրգին վերաբերող [4—B] պայմանը, այսինքն միշտ ալնպես կատարենք շրջանցումը, որ բաղժանիստի յուրաքանչյուր կողմ անցվի երկուական անգամ հակառակ ուղղություններով։ Այդ դեպքում նիստերի ձեկտորական մակերեսները կամ բոլորը ուղղված են բաղժանիստից դուրս, կամ բոլորը՝ բաղժանիստի ներքե։

Համոզվելու համար նպատակահարմար է դիտել կամայական քառանիստ (նկ. 4—5) կամ մի այլ պարզ բաղժանիստ։

Այժմ մենք կարող ենք ապացուցել հետևյալ, շատ կարևոր թեորեմը, որը հանգիստանում է $[4-B]$ -ի ընդհանրացումը.

$[4-C]$ Յուրաքանչյուր բազմանիստի վեկտորական մակերևույթը գրո է:

Պարզություն համար ընդունենք, որ բոլոր նիստերը հաճախուններ են (այս ենթադրությունը ամենին չի սահմանափակում ստացվելիք արդյունքի ընդհանրությունը, քանի որ յուրաքանչյուր բազմանիստ կարելի է պատկերացնել բաղկացած հաճախուններից):

Համարակալենք բազմանիստի բոլոր նիստերը $(1, 2, \dots, n)$, սկիզբը ընտրենք բազմանիստի ներսում, նշանակենք հաճախունաձև նիստերից մեկի գագաթները A, B, C : ABC նիստին համապատասխանում է $OABCO$ քառանիստը, այդպիսով քառանիստերի թիվը n է:

k -րդ քառանիստի ABC նիստի վեկտորական մակերեսը նշանակենք $\bar{\sigma}_{kh}$, իսկ մյուս երեք նիստերի վեկտորական մակերեսը՝ $\bar{\sigma}_{k0}$:

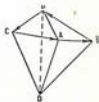
Համաձայն $(1, 2, 4)$ -ի $\bar{\sigma}_{k0} + \bar{\sigma}_{kh} = 0$:

Նույնը կարելի է գրել բազմանիստի բոլոր քառանիստերի վերաբերյալ՝ 1 -ից մինչև n , հետևապես,

$$\sum_1^n \bar{\sigma}_{k0} + \sum_1^n \bar{\sigma}_{kh} = 0:$$

Այստեղ $\sum_1^n \bar{\sigma}_{kh}$ ներկայացնում է բազմանիստի բոլոր նիստերի վեկտորական մակերեսների գումարը, այսինքն բազմանիստի $\bar{\sigma}$ վեկտորական մակերեսը՝ $\sum_1^n \bar{\sigma}_{kh} = \bar{\sigma}$, իսկ $\sum_1^n \bar{\sigma}_{k0}$, ինչպես հիմա ցույց կտրվի, հավասար է գրտի:

Իսկապես դիտենք երկու հարևան քառանիստեր $OABCO$ և $ODBAO$ (նկ. 4—5) նրանց ընդհանուր կողը մեկում $\overline{AB}$ -ն է, մյուսում՝ $\overline{BA}$ -ն, հետևապես $OABCO$ -ում մենք ունենք OAB նիստը՝ $ODBAO$ -ում OBA նիստը: Այս երկու նիստերի վեկտորական մակերեսների գումարը գրո է:



Նկ. 4—5

$\sum_1^n \bar{\sigma}_{k0}$ -ն կազմված է ալսպիտի դուլդ նիստերի վեկտորական մակերևանների գումարից, և որովհետև լուրաքանչյուր դուլդի գումարը զրո է, ապա $\sum_1^n \bar{\sigma}_{k0} = 0$ նույնպես:

$$\text{Ալսպիտով ստանում ենք } \bar{\sigma} = \sum_1^n \bar{\sigma}_{kh} = 0:$$

Այս է [4—C] թեորեմը:

4°. Յուրաքանչյուր կոր մակերևույթ կարելի է դիտել որպես բազմաձևիստ, որի անսահման փոքր նիստերի թիվը անսահման մեծ է: Ալսպիտով՝

[4—D] Յուրաքանչյուր կոր մակերևույթի վեկտորական մակերեսը զրո է:

Հետադարձ մենք դիտարկելու ենք վեկտորական մակերեսը այն կոնական մակերևույթի, որի ուղղորդն է կետի հետադիմը, իսկ ծնիչը՝ անշարժ սկիզբ ունեցող շառավիղ-վեկտորը:

§ 4. 3. ՌԵ ԱՆԿԿԱՆՏՆԵՐ ԿԱՐԵԼԻ Ե ԽԱՄԱՐԵԼ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

1°. [4—D] թեորեմը ունի բազմազան կիրառումներ: Այստեղ այդ թեորեմի հիման վրա ապացուցվում է, որ վերջավոր անկյունները ընդհանուր առմամբ չի կարելի որպես վեկտորներ դիտարկել:

Եթե մակերևանները կարելի է, ինչպես տեսանք, պատկերացնել որպես վեկտորներ, ապա թվում է թե անկյուններին էլ կարելի է վերադրել վեկտորական բնույթ:

Իրոք, շրջանային սեկտորի մակերեսի չափը (նկ. 4—6)

$$S = \frac{1}{2} r^2 \varphi, \quad (4, 3, 1)$$

Ընտրելով այդ մակերեսի շրջանցման ուղղութիւնը, կարող ենք մակերեսը համարել վեկտորական ($\bar{S}$):

Բայց այդ դեպքում (4,3,1)-ի աջ մասը կվերածվեր վեկտորի և որովհետև r^2 սկալար է, մեզ կմնար միայն φ անկյունը դիտարկել որպես վեկտոր ($\bar{\varphi}$) և այդպիսով կստացվեր

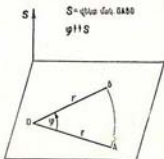
$$\bar{S} = \frac{1}{2} r^2 \bar{\varphi}, \quad (4, 3, 2)$$

Ընդ որում $\bar{\varphi} \parallel \bar{S}$, այսինքն $\bar{\varphi}$ -ն պետք է համարվեր ուղղահայաց անկյան հարթութիւնը:

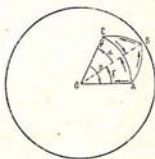
Սակայն այս պարզ դատողութիւնը ճիշտ չէ:

Դիցուք OA , OB , OC -ն O կենտրոն ունեցող զնդի շառավիղներն են, և չեն գտնվում մի հարթության վրա (Նկ. 4-7):

$OABCO$ մարմինը սահմանափակված է զնդի մակերևույթի $ABCA$ մասով և $OABO$, $OBCO$, $OCAO$ հարթ նիստերով, որոնք



Նկ. 4-6



Նկ. 4-7

հատում են զնդի մակերևույթը մեծ շրջանների $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup CA$ աղեղներով:

[4-B] պայմանը բավարարված կլինի, եթե երեք հարթ նիստերի և զնդի մակերևույթի $ABCA$ մասի շրջանցման ուղղությունները լինեն ափսոսաբար, ինչպես ցույց է արված Նկ. 4-7-ում:

Նշանակենք $\overline{\gamma} = \angle AOB$, $\overline{\alpha} = \angle BOC$, $\overline{\beta} = \angle COA$. Ըստ (4, 3, 2)-ի $OABO$, $OBCO$, $OCAO$ հարթ նիստերի վեկտորական մակերեսներ $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ -ը կարտահայտվեն առաջին՝

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{2} r^2 \overline{\gamma}, \quad \overline{S}_2 = \frac{1}{2} r^2 \overline{\alpha}, \quad \overline{S}_3 = \frac{1}{2} r^2 \overline{\beta}$$

որտեղ $r^2 = (OA)^2 = (OB)^2 = (OC)^2$:

Անվանենք $\overline{\sigma}$ զնդի մակերևույթի $ABCA$ մասի վեկտորական մակերեսը:

Համաձայն [4-D] թեորեմի

$$\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 + \overline{\sigma} = 0$$

$$\text{կամ} \quad (\overline{\gamma} + \overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \frac{2\overline{\sigma}}{r^2} = 0: \quad (4, 3, 3)$$

Մինչդեռ, եթե անկյուններին կարելի լիներ կիրառել վեկտորների դուալարման կանոնը, պետք է ունենայինք

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$

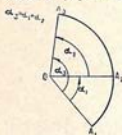
$$\text{կամ} \quad \left. \begin{aligned} \overline{\gamma} + \overline{\alpha} &= -\overline{\beta} \quad (\overline{\beta} = \angle COA), \\ \overline{\gamma} + \overline{\alpha} + \overline{\beta} &= 0: \end{aligned} \right\} \quad (4, 3, 4)$$

(4,3,4)-ը արտահայտում է վեկտորների զուգարման օրենքը. բայց նիշաը (4,3,4) չէ, այլ (4,3,3)-ը:

[4—E] Ընդհանուր առմամբ վերջավոր անկյունները չեն ենթարկվում վեկտորների զուգարման կանոնին և այդ պատճառով չեն կարող վեկտորներ համարվել:

2°. (4,3,4)-ը կարող է համընկնել (4,3,3)-ի հետ միայն այն դեպքում, երբ $\varphi = 0$: Այդ տեղի ունի երկու դեպքում:

ա) երբ A_1OA_2 , A_2OA_3 և A_1OA_3 անկյունները մի հարթության վրա են, որի հետևանքով $A_1 A_2 A_3$ -ը միևնույն մեծ շրջանի աղեղն է (նկ. 4—8) և



Նկ. 4—8

$$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_3$$

բ) $\angle AOB$, $\angle BOC$ և $\angle COA$ անկյունները անսահման փոքր են. դժվար չէ համոզվել, որ եթե այդ անկյունները ընդունենք որպես առաջին կարգի անսահման փոքրեր, ապա $\bar{\alpha}$ -ի չափը φ -ն կլինի անվերջ փոքր ոչ պակաս երկրորդ կարգի:

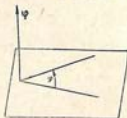
Այդ պայմաններում $\bar{\alpha}$ -ն պետք է արհամարհվի առաջին կարգի անսահման փոքր

$\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ վեկտորների նկատմամբ. այժմ (4,3,3) կհամընկնի (4,3,4)-ի հետ: Այսպիսով՝

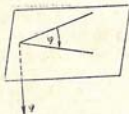
[4—F] Անսահման փոքր անկյունները, կամ զուգահեռ հարթությունների վրա զամվող վերջավոր անկյունները կարելի է դիտարկել որպես վեկտորներ, որովհետև այդպիսի անկյունները ենթարկվում են վեկտորների զուգարման կանոնին:

[4—F'] Անկյուն ներկայացնող վեկտորի չափը, ուղղությունը և ուղղվածությունը որոշվում են այսպես (նկ. 4—9 ա, բ).

Չափը հավասար է անկյան չափին, վեկտորը ուղղահայաց է անկյան հարթությանը և ուղղված է այնպես, որ վեկտորի ծայրից նայողին անկյունը րվում է դրական:



Նկ. 4—9ա



Նկ. 4—9բ

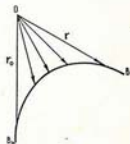
§ 4. 4. Սկի ստիպալ արագության և սեկտորիալ արագացում

1°. Դիցուք $\vec{r}$ -ը կետի շառավիղ-վեկտորն է, O -ն՝ շառավիղ-վեկտորի սկիզբը, իսկ B_0B -ն այդ կետի հետագիծը (նկ. 4—10): Երբ կետը շարժվում է, նրա շառավիղ-վեկտորը դժուր է մի կոնական մակերևույթ, որի ծնիչն է շառավիղ-վեկտորը, իսկ ուղղորդը՝ կետի հետագիծը:

Այդ մակերևույթը լինում է հարթ միայն երկու դեպքում.

Երբ հետագիծը ուղիղ է և երբ հետագիծը հարթ կոր է, իսկ շառավիղ-վեկտորի սկիզբը, գառավորված է կորի հարթության վրա (նկ. 4—11),

Կոնական մակերևույթի վեկտորական մակերևույթը նշանակենք $\bar{\sigma}$: Այդ մակերևույթի վեկտորական մակերևույթը $\bar{\sigma}$ -ի հետագիծն է կետի շարժման շնորհիվ: Կետի $d\vec{r}$ տեղափոխմանը ($d\vec{r}$ ժամանակամիջոցում) համապատասխանում է $\bar{\sigma}$ -ի էլեմենտար $d\bar{\sigma}$ ան

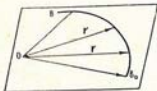


Նկ. 4—10

$$d\bar{\sigma} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{2}. \quad (4, 4, 1)$$

արագացից

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{2}, \quad (4, 4, 2)$$



Նկ. 4—11

ձիշա արագեա, ինչպես $\bar{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ անվանվում է արագութիւն (այլի ճիշտ՝ զծային արագութիւն), $\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$ -ն անվանում են սեկտորիալ արագութիւն: Ուշագրաւ է, որ շառավիղ-վեկտորի սկզբի դիրքը բոլորովին չի ազդում $\bar{\sigma}$ արագութիւն վրա, իսկ սեկտորիալ արագութիւնը կախված է $\vec{r}$ -ի սկզբնականից: Իրաք, դիցուք ունենք շառավիղ-վեկտորների երկու անշարժ սկզբնականներ O և O' :

$$\bar{r} = \overline{OB}, \quad \bar{r}' = \overline{O'B}, \quad \bar{\omega}_0 = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v}, \quad \bar{\omega}_0' = \frac{1}{2} \bar{r}' \times \bar{v},$$

$$\text{Այստեղից} \quad \bar{\omega}_0' - \bar{\omega}_0 = \frac{1}{2} (\bar{r}' - \bar{r}) \times \bar{v} = \frac{1}{2} \overline{OO'} \times \bar{v},$$

$\bar{\omega}_0' = \bar{\omega}_0$ միայն ալն դեպքում, երբ կամ $\bar{v} \parallel \overline{OO'}$, կամ $\bar{v} = 0$:
2^o, նկատի առնենք, որ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} &= \frac{1}{2} \dot{\bar{r}} \times \bar{v}; \quad \frac{d(\bar{r} \times \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{v} + \bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt} \\ \text{կամ, որովհետև} \quad \frac{d\bar{r}}{dt} &= \bar{v}, \quad \bar{v} \times \bar{v} = 0, \quad \text{իսկ} \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\omega}, \\ \text{ստանում ենք} \end{aligned} \right\} \quad (4, 4, 3)$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d^2 \bar{\omega}}{dt^2} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{\omega} \quad (4, 4, 4)$$

Տեսնում ենք՝ սեկտորիալ արագությունը համասար է շառափիղ-վեկտորի և արագության վեկտորական արտադրյալի կետին. իսկ սեկտորիալ արագացումը շառափիղ-վեկտորի և արագացման վեկտորական արտադրյալի կետն է:

Հետազոտում հաճախ օգտվելու ենք (4,4,4)-ից, ըստ որի սեկտորիալ արագացումը հանդիսանում է սեկտորիալ արագության ածանցյալը՝ ըստ ժամանակի:

(4,4,4)-ից նաև ստացվում է՝

$$\int \dot{\bar{\omega}} dt = \bar{\omega} + \bar{D}, \quad (4, 4, 5)$$

որտեղ $\bar{D}$ վեկտորը ինտեգրման հաստատունն է:

3^o. Սեկտորիալ արագության և սեկտորիալ արագացման ուղղությունը և ուղղվածությունը որոշում են «ձևաքի կանոնով»: Մեխանիկայում սովորաբար ընդունում են «աջ ձևաքի կանոնը». այսինքն՝ դասավորում են աջ ձևաքը և մատնեիր ախպես, որ բութ մատը (I) լինի համազուգահեռ $\bar{r}$ -ին, ցուցամատը (II) համազուգահեռ $\bar{v}$ -ի: Այսպիսի պարագայում I և II հարթությունը ուղղահայաց միջլին մատը կլինի համազուգահեռ $\dot{\bar{\omega}}$ -ին, փոխարինելով $\bar{v}$ -ն $\bar{\omega}$ -ով կտանանք աջ ձևաքի կանոնը սեկտորիալ արագացման վերաբերյալ:

Որպես վեկտորական արտադրյալ, սեկտորիալ արագությունը հավասար է գրովի երեք գեպքերում.

1. $\vec{r} = 0$ ալֆինքն այն մոմենտներում, երբ շարժվող կետը անցնում է շառավիղ-վեկտորների (O) սկզբնակետով:

2. այն մոմենտներում, երբ $\vec{\omega} = 0$,

3. այն մոմենտներում, երբ շառավիղ-վեկտորը և արագությունը դասավորված են մի ուղղի վրա:

Փոխարինելով $\vec{\omega}$ -ն $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ կառանաճք այն երեք գեպքերը, երբ սեկտորիալ արագացումն է հավասար գրովի:

Խնդիրներ և հարցեր:

1. Կետի հետադիմը B_0CB ուղիղն է, իսկ O և O' սկզբնակետերը ընտրված են այնպես, որ $\vec{OC} + \vec{O'C} = 0$: Պարզել ինչով են տարբերվում մեկը մյուսից սեկտորիալ $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_0'$ արագությունները:

2. Տրված են հարթ B_0B հետադիմը և հետադիմ հարթության վրա դանդաղ շառավիղ-վեկտորների O սկիզբը (նկ. 4—12):

ա) Նշել հետադիմ այն կետը, որում սեկտորիալ արագությունը գրո է:

բ) Համարելով շարժումը համասարաչափ, նշել հետադիմ այն կետը, որում սեկտորիալ արագացումն է գրո.



նկ. 4—12

3. Ձառահեռ P_1, P_2 հարթությունների վրա գտնավորված երկու շրջանագծերի կենտրոններն են C_1 և C_2 . C_1C_2 ուղիղը ուղղահայաց է P_1 և P_2 -ին: Այդ շրջանագծերով շարժվում են հաստատուն չափ ունեցող հասավածի B_1 և B_2 ծայրերը, ընդ որում B_1B_2 և C_1C_2 -ը հասվում են անշարժ O կետում, որը ընդունվում է որպես շառավիղ-վեկտորների սկիզբը:

Արտահայտել B_2 կետի սեկտորիալ արագությունը B_1 կետի սեկտորիալ արագության միջոցով: Շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանորեն հավասար են R_1 և R_2 :

4. R շառավիղ ունեցող շրջանագծով համասարաչափ շարժվող կետը կատարում է լրիվ պտույտ T վայրկյանում: Որոշել ինչպիսի ժամանակամիջոցում կետի շառավիղ-վեկտորը կգծի

$\vec{h} \in R^2$ վեկտորական մակերեսը ($\vec{h}$ -ը ուղղահայաց է շրջանագծի հարթությանը): Շառավիղ-վեկտորների (O) սկզբնակետի դիրքը միանգամայն կամայական է:

5. B կետը հավասարաչափ շարժվում է շրջանագծով, որի կենտրոնն է C , իսկ շառավիղը՝ R . Շառավիղ-վեկտորների O սկիզբը կամայական է:

Ցույց տալ, որ սեկտորիալ արագացումը կարելի է վերլուծել երկու բաղադրիչների, որոնցից մեկը ուղղահայաց է շրջանագծի հարթությանը, իսկ մյուսը զուգահեռ է արդ հարթությանը և ունի հաստատուն չափ:

§ 4. 5. Սեկտորիալ արագության և սեկտորիալ արագացման կոորդինատական արտահայտությունները

1°. Ենթադրենք, շարժումը գիտվում է ուղղանկյուն $Oxyz$ կոորդինատական սխեմում, որի սկիզբը համընկնում է շառավիղ-վեկտորների սկզբի հետ:

Այդ դեպքում, անվանելով x, y, z կետի կոորդինատները, ունենք ըստ $(2, 8, 2), (2, 8, 7), (2, 8, 10)$ -ի

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \\ \vec{v} &= \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z, \\ \vec{w} &= \hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z} = \hat{i}w_x + \hat{j}w_y + \hat{k}w_z, \end{aligned} \right\} \quad (4, 5, 1)$$

Հետևապես ըստ $(4, 4, 2)$ -ի

$$\vec{r} \times \vec{v} = \hat{i}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \hat{j}(z\dot{x} - x\dot{z}) + \hat{k}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

և սեկտորիալ արագությունը

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} [\hat{i}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \hat{j}(z\dot{x} - x\dot{z}) + \hat{k}(x\dot{y} - y\dot{x})], \quad (4, 5, 2)$$

$(4, 5, 2)$ -ին համա, սեկտորիալ արագացումը՝

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{2} [\hat{i}(y\ddot{z} - z\ddot{y}) + \hat{j}(z\ddot{x} - x\ddot{z}) + \hat{k}(x\ddot{y} - y\ddot{x})] \quad (4, 5, 3)$$

$(4, 5, 2)$ -ի և $(4, 5, 3)$ -ի աջ մասերի փոքր փակագծերում զանգույն արտահայտությունները հանդիսանում են $\vec{\omega}$ -ի և $\vec{\alpha}$ -ի պրոեկցիաները Ox, Oy, Oz առանցքների վրա: Օրինակ

$$\dot{\omega}_x = \frac{1}{2} (y\dot{z} - z\dot{y}), \quad \dot{\omega}_y = \frac{1}{2} (z\dot{x} - x\dot{z}), \quad \dot{\omega}_z = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x})$$

սեկտորիալ արագություն պրոեկցիաներն են Ox , Oy , Oz առանցքների վրա:

Նույն կերպ

$$\frac{1}{2} (y\ddot{z} - z\ddot{y}), \quad \frac{1}{2} (z\ddot{x} - x\ddot{z}), \quad \frac{1}{2} (x\ddot{y} - y\ddot{x})$$

կիսատարբերությունները հանդիսանում են սեկտորիալ արագացման պրոեկցիաները Ox , Oy , Oz առանցքների վրա:

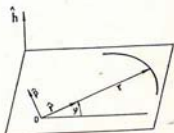
2°. Ենթադրենք, որ շարժումը հարթ է և շառավիղ-վեկտորների սկիզբը համընկնում է կոորդինատական բևեռային սիստեմի բևեռի հետ: Անվանենք բևեռային անկյունը φ (ախինքն այն անկյունը, որ կազմում է շառավիղ-վեկտորը՝ բևեռային առանցքի հետ, նկ. 4-13):

Օղակագործենք $\vec{r}$ -ի հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\vec{r} = \vec{r}, \quad (4, 5, 4)$$

որտեղ $\vec{r}$ միավոր վեկտորը համապատասխան է $\vec{r}$ -ին, իսկ r -ը $\vec{r}$ -ի չափն է: Համաձայն (2,9,5) և (2,9,10)-ի

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r} + r\dot{\vec{r}} \quad (4, 5, 5)$$



Նկ. 4-13

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{r}} (\vec{r} - r\vec{r}) + \frac{\dot{r}}{r} \frac{d}{dt} (r^2\vec{r}) \quad (4, 5, 6)$$

Այստեղ $\dot{r}$ միավոր-վեկտորը, ամեն (2,9,4), դանդում է շարժման հարթության վրա, ուղղահայաց է $\vec{r}$ -ին և ուղղված φ անկյան մեծացման կողմը: $\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$ վեկտորական արտադրյալը անվանենք $\vec{h}$, (4,5,5) և (4,5,6)-ը տալիս են

$$\vec{r} \times \vec{v} = \dot{h} r^2 \vec{\varphi}, \quad \vec{r} \times \vec{\omega} = \dot{h} \frac{d}{dt} (r^2 \vec{\varphi}),$$

որովհետև

$$\vec{r} \times \vec{r} = 0:$$

Այսպիսով

$$\dot{\vec{\sigma}} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \dot{h} r^2 \vec{\varphi}, \quad (4, 5, 7)$$

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{\omega} = \frac{1}{2} \dot{h} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}), \quad (4, 5, 8)$$

Նկատենք, որ $\dot{h}$ -ը հաստատուն միավոր-վեկտոր է:

3°. Անցնենք զլանալին կոորդինատական սխեմայի, ընդունելով, որ կոորդինատական սխեմայի սկիզբը համընկնում է շատարկ-վեկտորի սկզբի հետ:

Գլանի առանցքը անվանենք OH , իսկ այդ առանցքի միավորը՝ $\dot{h}$: Այժմ (նկ. 4-14), բաց (2, 10, 1)-ի

$$\bar{r} = \dot{h}h + \dot{\rho}\rho:$$

Հարկավոր է նկատի առնել, որ

$\bar{\rho} = \dot{\rho}\rho$ և $\dot{\rho}$ այստեղ կատարում են

2°-ում դիտված $\bar{r}$ -ի և $\bar{r}$ -ի գերերը:

Համաձայն (2, 10, 9) և (2, 10, 11)

$$\bar{v} = \dot{h}h + \dot{\varphi}\dot{\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi},$$

$$\bar{\omega} = \dot{h}\dot{h} + \dot{\varphi}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}),$$

Նկատի առնելով, որ $\dot{\rho}$, $\dot{\rho}$, $\dot{h}$ -ը կադմում են փոխադարձ ուղղահայաց վեկտորների աջ եռյակ, այսինքն, որ

$$\dot{\rho} \times \dot{\rho} = \dot{h}, \quad \dot{\rho} \times \dot{h} = \dot{\rho}, \quad \dot{h} \times \dot{\rho} = \dot{\rho},$$

ստանում ենք.

$$\begin{aligned} \bar{r} \times \bar{v} &= (\dot{h}h + \dot{\rho}\rho) \times (\dot{h}h + \dot{\varphi}\dot{\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}) = \\ &= \dot{\rho}h\dot{\rho} - \dot{\rho}h\dot{\rho} - \dot{\rho}\dot{h} + \dot{h}\dot{\rho}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

և այստեղից

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{2} [\dot{h}\dot{\rho}^2\dot{\varphi} - \dot{\rho}h\dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}(\dot{h}\dot{\rho} - \dot{\rho}h)], \quad (4, 5, 9)$$

$$\bar{r} \times \bar{\omega} = (\dot{h}h + \dot{\rho}\rho) \times [\dot{h}h + \dot{\varphi}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi})] =$$

$$= \dot{\rho}h(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) - \dot{\rho}h \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) - \dot{\rho}\dot{h} + \dot{h} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}),$$

Հետևապես սեկտորիայի արագացումը՝

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{2} \left[\overset{\Delta}{h} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi}^2 \dot{\varphi}) - \dot{\varphi} \frac{\overset{\Delta}{h}}{\dot{\varphi}} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi}^2 \dot{\varphi}) + \dot{p} (h\dot{\varphi} - \dot{\varphi}h - \dot{\varphi}h\dot{\varphi}^2) \right]; \quad (4, 5, 10)$$

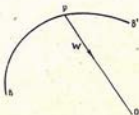
Կարելի է ստանալ (4, 5, 10)-ը, դիֆերենցելով (4, 5, 9)-ը բոլոր է-ի:

§ 4. 6. Կենտրոնական շարժում

1°. Դիցուք O -ն անշարժ է, իսկ P -ն այն կետն է, որի շարժումը դիտվում է: Շարժումը, որում կետի արագացումը միշտ ուղղված է PO ուղղով, կոչվում է կենտրոնական (նկ. 4—15 ա, բ, որտեղ AA' , BB' -ը հետադժերն են):



Նկ. 4—15ա



Նկ. 4—15բ

O կետը կոչվում է արագացման կենտրոն (իսկ $\overline{OP} = \bar{r}$ կետի շառավիղ-վեկտորն է):

Կենտրոնական շարժման արագացումը կարող է ուղղված լինել կամ O -ից P , կամ P -ից O :

Առաջին դեպքում

$$\overline{\omega} \uparrow \overline{OP} \quad \text{կամ} \quad \overline{\omega} \uparrow \bar{r} \quad (4, 6, 1')$$

(նկ. 4—15ա), այսինքն արագացումը ուղղված է կենտրոնից դեպի կետը, դիմադրվելով ասում են շեկտը վանվում է O կենտրոնով:

Երկրորդ դեպքում $\overline{\omega} \downarrow \overline{OP}$, այսինքն $\overline{\omega} \downarrow \bar{r}$ (4, 6, 1') (նկ. 4—15բ), արագացումը ուղղված է շեկտից դեպի կենտրոն: Դիմադրվելով ասում են՝ շեկտը ձգվում է O կենտրոնով:

Օգտվելով (4, 5, 4)-ից կարող ենք (4, 6, 1) և (4, 6, 1')-ը գրել այսպես՝

$$\overline{\omega} = \overline{\omega} \overset{\Delta}{r}, \quad \text{կրթ} \quad \overline{\omega} \uparrow \bar{r} \quad (4, 6, 2)$$

$$\overline{\omega} = \omega(-r), \overline{\omega} = -\omega^{\star}, \text{ երբ } \overline{\omega} \uparrow \overline{r}; \quad (4, 6, 3)$$

(4, 6, 2)-ում և (4, 6, 3)-ում $\overline{\omega}$ -ն արագացման չափն է, որը կարող է կախում ունենալ

ա) միայն շառավիղ-վեկտորի չափից՝ $\overline{\omega} = \overline{\omega}(r)$

բ) շառավիղ-վեկտորի չափից և այլ սկալար մեծություններից՝ $\varphi, \psi, \dots$,

այսինքն $\overline{\omega} = \overline{\omega}(r, \varphi, \psi, \dots)$;

Այստեղ φ այն անկյունն է, որ շառավիղ-վեկտորը կազմում է որևէ անշարժ ուղղի հետ, ψ -արագություն չափն է:

գ) φ, ψ և այլ սկալար մեծություններից, և բոլորովին անկախ լինել շառավիղ վեկտորի չափից՝ $\overline{\omega} = \overline{\omega}(\varphi, \psi, \dots)$:

2°. § 4.4-ում արված էին սեկտորիալ արագության ($\overline{\omega}$) և սեկտորիալ արագացման ($\overline{\sigma}$) սահմանումները՝

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{\dot{\omega}}, \quad \overline{\dot{\sigma}} = \frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{\ddot{\omega}}$$

և կապը նրանց միջև՝

$$\overline{\dot{\sigma}} = \frac{d\overline{\sigma}}{dt}, \quad \overline{\dot{\sigma}} = \int \overline{\sigma} dt + \overline{D}; \quad (4, 6, 4)$$

Կենտրոնական շարժման դեպքում, համաձայն (4, 6, 2)-ի և (4, 6, 3)-ի

$$\overline{\sigma} = \pm \omega(\overline{r} \times \overline{r}) = 0,$$

ուստի (4, 6, 4)-ից ստանում ենք.

$$\overline{\dot{\sigma}} = \overline{D} = \text{const}$$

կամ

$$\overline{\dot{\sigma}} = \frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{\dot{\omega}} = \frac{1}{2} \overline{r}_0 \times \overline{\dot{\omega}}_0 = \overline{D} = \text{const}; \quad (4, 6, 5)$$

Այստեղ $\overline{r}, \overline{\dot{\omega}}$ հանդիսանում են շառավիղ-վեկտորը և արագությունը կամալական t մոմենտում, իսկ $\overline{r}_0, \overline{\dot{\omega}}_0$ նույն վեկտորները t_0 մոմենտում (օրինակ, երբ $t_0 = 0$): Այսպիսով

[4—G] Յուրաքանչյուր կենտրոնական շարժման դեպքում սեկտորիալ արագությունը հաստատուն վեկտոր է (իսկ սեկտորիալ արագացումը հավասար է զրոյի):

Հաջորդ պարագրաֆներում $\bar{h}$ -ով նշանակված է սեկտորիալ արագության կրկնապատիկը՝

$$\bar{h} = 2\dot{z} = \bar{r} \times \bar{v} = 2\bar{D} = \text{const.} \quad (4, 6, 6)$$

արդյուն վարվելու միակ նպատակն է աղատվել $\frac{1}{2}$ գործակցից:

$[4-G]$ -ից տնվիջապես հետևում է, որ

$[4-H]$ կենտրոնական արագացման դեպքում շարժումը միշտ կատարվում է նույն ուղղությամբ. այսինքն՝ փակ հետագծի դեպքում կետի արագությունը միևնույն դիրքում ունի միևնույն ուղղվածությունը, իսկ բաց հետագծի ոչ մի կետը չի անցնում նրկու անգամ:

Իսկապես շարժման ուղղությունը փոխվելու համար անհրաժեշտ է, որ արագությունը համաստրվի զրոյի և այդ մոմենտում $\dot{z}$ կլինի զրո, այն ինչ հակասում է $[4-G]$ -ին:

§ 4. 7. Կենտրոնական շարժման հասկարչունները

$[4-G]$ -ից կամ (4, 6, 6)-ից հետևում են լուրջ կենտրոնական շարժումներին վերաբերող ընդհանուր հատկությունները.

ա) (4, 6, 6)-ի աջ մասի $\bar{r}$ արտադրիչը ուղղահայաց է $\bar{h}$ -ին: Եթե $\bar{h}$ հաստատուն վեկտոր է, իսկ $\bar{r}$ -ի սկզբնակետը անշարժ է: Ուստի շտապիդ-վեկտորը, փոխվելով միշտ մնում է $\bar{h}$ -ին ուղղահայաց հարթություն վրա. նկատի առնելով նաև, որ շտապիդ-վեկտորի սկիզբը համընկնում է արագացման կենտրոնի հետ, եզրակացնում ենք.

$[4-I]$ Յուրաքանչյուր կենտրոնական շարժման հետագիծը հարթ կոր է, որի հարթությունը պարունակում է արագացման կենտրոնը:

Այս եզրակացությունը կրոցնում է իմաստը, երբ հետագիծը անցնում է արագացման (O) կենտրոնով: Իսկապես, այդ դեպքում O կետում

$$\bar{r} = 0 \quad \text{և} \quad \bar{h} = \bar{r} \times \bar{v} = 0$$

կամ, որովհետև $\bar{h}$ -ը հաստատուն վեկտոր է,

$$\dot{\bar{h}} = 0 = \text{const.}$$

Այդ կարող է տեղի ունենալ միայն, երբ հետագիծը O կետով անցնող ուղիղ է (որովհետև O կետով անցնող կոր հետա-

զծի ղեպքում շարժվող կետի բոլոր այն ղիբրեքի համար, որոնք
չեն համընկնում O -ի հետ $\vec{r} \neq 0$ և $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h} \neq 0$:

Այսպիսով լրիվ թևորմամբ հետևյալն է.

[4—I] Յուրաքանչյուր կենտրոնական շարժման ղեպքում՝

ա) կետը անցնում է արագացման (O) կենտրոնով և հետա-
դիծը O -ն պարունակող ուղիղ է.

բ) կամ կետը չի անցնում O -ով և հետագիծը հարթ կոր է,
որի հարթությունը պարունակում է արագացման կենտրոնը:

բ) Համաձայն $(2, 9, 5)$ -ի, հարթ շարժման ղեպքում

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{r} + p \vec{r}^\perp, \quad (4, 7, 1)$$

որտեղ $\dot{p}$ միավոր վեկտորը գտնվում է հետագծի հարթության
վրա, ուղղահայաց է $\vec{r}$ -ին և ուղղված է $\vec{r}$ -ի մեծացման կողմը:

Հետագծի հարթության ուղղահայաց $\vec{h}$ վեկտորի ուղղվածու-
թյունը ընտրվում է այնպես, որ $\dot{r}$, $\dot{p}$, $\dot{h}$ միավոր-վեկտորները
կազմեն աջ եռյակ՝

$$\dot{r} \times \dot{p} = \dot{h}, \quad \dot{p} \times \dot{h} = \dot{r}, \quad \dot{h} \times \dot{r} = \dot{p}, \quad (4, 7, 2)$$

(4, 5, 7) և (4, 6, 6) տալիս են

$$\vec{h} = \dot{h} \vec{h} = \dot{h} r^2 \vec{r}^\perp; \quad h = r^2 \dot{\varphi}, \quad (4, 7, 3)$$

Շնորհիվ $\vec{h}$ -ի հաստատուն լինելուն, նաև $h = r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$ և
որովհետև $\frac{h}{2}$ -ը շառավիղ-վեկտորով մի վայրկյանում գծված մա-
կերևան է, եղբակացնում ենք՝

[4—J] Յուրաքանչյուր կենտրոնական շարժման ղեպքում
հավասար ժամանակամիջոցներում շառավիղ-վեկտորը գծում է
հավասար մակերեսներ:

Նկատենք, որ արդարությունն կտրելի է հաանել նաև օգտը-
վելով $(2, 9, 10)$ ընդհանուր արտահայտությունից

$$\vec{w} = \dot{r} (\vec{r} - r^2 \vec{r}^\perp) + \frac{\dot{p}}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \vec{r}^\perp),$$

կենտրոնական շարժման ղեպքում $\vec{w} \parallel \vec{r}$, ահա (4, 5, 2),
(4, 5, 3), հետևապես $\vec{w}$ -ի արդարտահայտության աջ մասի երկ-

բորդ գումարելին պետք է զրո լինի: Բայց $\dot{p}$ որպես միավոր վեկտոր զրո չէ, r -ը նդհանուր առմամբ նույնպես զրո չէ. մնում է մի հնարավորություն՝

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0, \quad r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Այսպիսով ստացվեց նույն արդյունքը:

դ) (նկ. 4-16) $\overline{OL} = \bar{l}$ շառավիղ-վեկտորի աֆն բաղադրիչն է, որ ուղղահայաց է $\vec{v}$ -ին, հետևապես

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \bar{l} \times \vec{v} = \text{const.},$$

$$h = lv \quad \text{կամ} \quad v = \frac{h}{l}: \quad (4, 7, 4)$$

(4, 7, 4)-ի խմատն է՝

[4-K] Յուրաքանչյուր կենսաբուսական շարժման արագության չափը հակադարձ համեմատական է արագացման կենտրոնից հեռավոր շոշափողի վրա իջեցրած բարձրությանը:

դ) Վերջապես գոյություն ունի մի շատ կարևոր ընդհանուր առնչություն ես, որը, սակայն, բխում է ոչ թե [4-G]-ից, առ (4, 6, 2), (4, 6, 3)-ից և (2, 11, 3) թևորմից՝

$$\frac{d\dot{v}^2}{2} = \vec{\omega} \cdot d\vec{r} \quad (4, 7, 5)$$

Օգտվենք (4, 6, 2)-ից՝ $\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}}$.

արժմ $\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \dot{\omega}(\vec{r} \cdot d\vec{r}):$

Հարթ շարժման դեպքում, համաձայն (4, 5, 5)-ի

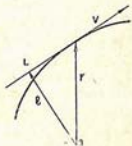
$$d\vec{r} = \dot{r}dr + \dot{p}rd\varphi$$

և քանի որ $\dot{p} \perp \dot{r}, \quad \dot{p} \cdot \dot{r} = 0$
ապա

$$\dot{r} \cdot d\vec{r} = dr, \quad \text{իսկ} \quad \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \omega dr: \quad (4, 7, 6)$$

Եթե (4, 6, 2)-ը փոխարինենք (4, 6, 3)-ով՝ $\vec{\omega} = -\dot{\vec{\omega}}$,
ապա (4, 7, 6)-ի փոխարեն կստանանք

$$\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = -\omega dr: \quad (4, 7, 7)$$



Նկ. 4-16

Արագիսով՝

$$[4-L] \text{ Յուրաքանչյուր կենտրոնական շարժման դեպքում} \\ \frac{dv^2}{2} = \pm \omega dr, \quad (4, 7, 3)$$

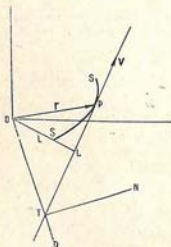
ընդ որում $+$ նշանը համապատասխանում է $\overline{\omega} = +\omega^{\wedge}$ իսկ $-$ նշանը՝ $\overline{\omega} = -\omega^{\wedge}$ դեպքին:

(4, 7, 5)-ը տարբերվում է (4, 7, 8)-ից նրանով, որ $\overline{\omega}$ և $d^{\wedge}r$ վեկտորների սկալար արտադրվալը փոխարինված է առաջինի չափի և r -ի չափի դիֆերենցիալի արտադրվալով:

(4, 7, 5) Թևորեմի մի ալլ կարևոր ձևափոխություն, որ շատ հեշտացնում է (4, 7, 8)-ի կիրառումը. վերաբերում է միայն կենտրոնական մի քանի շարժումների և կնշվի (4, 8, 16), (4, 11, 8)-ում և § 4, 13-ում:

(4, 7, 8)-ի հետևություններից մեկն էլ այն է, որ շտապիրդ-վեկտորի չափի փոփոխությունը առաջ է բերում արագություն չափի փոփոխություն:

Եթե հետադիմը ալնայիսին է, որ նրա մի քանի կետերում շտապիրդ-վեկտորի չափը հասնում է էքստրեմալ արժեքների. ապա այդ նույն կետերում արագություն չափն էլ հասնում է էքստրեմումի: Նախած (4, 7, 8)-ի նշանի ($+$ կամ $-$) շտապիրդ-վեկտորի և արագության չափերի էքստրեմումները լինում են կամ համանուն, կամ տարանուն:



Նկ. 4-17

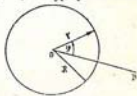
Խնդիր: O -ն արագացման կենտրոնն է (նկ. 4-17). SS' -ը P կետի հետադիմը, իսկ PL -ը SS' -ի շոշափողը P -ում: OD կամալական ուղիղը հատում է PL -ը T կետում, իսկ TN -ը ուղղահայաց է OT -ին:

P -ի արագությունը կարելի է վերլուծել երկու բաղադրիչների՝ զուգահեռ OT -ին և զուգահեռ TN -ին:

Յուրյ տալ, որ ա) TN -ին զուգահեռ բաղադրիչը հակադարձ համեմատական է OT -ին, բ) համեմատականությունը գործադիրը նույնն է բոլոր OT ուղիղների համար:

§ 3. Տ. ԿԵՆՏՐ շարժումը էլիպսով, որի կենտրոնը համընկնում է արագացման կենտրոնի հետ

1°. Կենտրոնական ամենապարզ շարժումներից մեկը հանդիսանում է հավասարաչափ շրջանային շարժումը: Արդարև շարժման ղեկավար շոշափող արագացումը զրո է, այդ պատճառով լրիվ արագացումը համընկնում է նորմալ արագացման հետ և ուղղված է շարժվող կետից դեպի շրջանագծի O կենտրոնը: Այսպիսով շրջանագծի կենտրոնը հանդիսանում է արագացման կենտրոնը:



(Նկ. 4—18)

Շրջանագծի շառավիղը անփոփոխ է R , հաշվենք φ անկյունը մի կամայական անշարժ OD ուղղից (Նկ. 4—18): Այդ ղեկավար էլեմենտար աղեղը

$$ds = R d\varphi,$$

$$\left. \begin{aligned} \text{արագության չափը} \quad v &= R \frac{d\varphi}{dt} = R \dot{\varphi} \\ v^2 &= R^2 \dot{\varphi}^2, \\ \text{իսկ արագացումը} \quad \overline{w} &= \overline{w}_n = \frac{v^2}{R} = R \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4, 8, 1)$$

φ անփոփոխ ջուլը է տալիս այն արագությանը, որով կետի շառավիղ-վեկտորը պտտվում է O կենտրոնի շուրջը, սովորաբար նշանակվում է ω և կոչվում է անկյունային արագության (տես § 3, 1, 2-ում արված դիտողությունը). շրջանագծով հավասարաչափ շարժման ղեկավար ω -ն հաստատուն մեծություն է:

Այստեղ շառավիղ-վեկտոր ($\vec{r}$) հանդիսանում է շրջանագծի այն շառավիղը, որ միացնում է O -ն շարժվող կետի հետ, ($\vec{r}$) $= r = R = \text{const}$: Նպատակահարմար է $\vec{v}$, $\overline{w}$ -ն արտահայտել $\vec{r}$ -ի միջոցով: Դրա համար օգտագործենք շոշափողի միավոր $\hat{\tau}$ վեկտորը և շրջանագծի հարթությանը ուղղահայաց $\hat{h}$ միավոր-վեկտորը, ընդ որում $\hat{\tau}$ ուղղված է դեպի S աղեղի (կամ կենտրոնական φ անկյան) մեծացման կողմը, իսկ $\hat{h}$ -ի ուղղվածությունը ընտրված է այնպես, որ $\hat{r}$, $\hat{\tau}$, $\hat{h}$ կազմեն աջ ձևերի եռյակ՝

$$\hat{r} \times \hat{\tau} = \hat{h}, \quad \hat{\tau} \times \hat{h} = \hat{r}, \quad \hat{h} \times \hat{r} = \hat{\tau} \quad (4, 8, 2)$$

Այժմ քանի որ

$$\bar{v} = \dot{\tau} \dot{s}, \quad \dot{s} = R\dot{\varphi}, \quad R = r, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{n} = -\dot{r}, \quad (4, 8, 3)$$

համաձայն (4, 8, 1)-ի կունենանք

$$\bar{v} = \dot{n} \times \dot{r} r \dot{\varphi} = \dot{n} \times \bar{r} \omega, \quad (4, 8, 4)$$

$$\bar{\omega} = -\dot{r} r \omega^2 = -\bar{r} \omega^2, \quad (4, 8, 5)$$

Այսպիսով շրջանային հալասարաչափ շարժման դեպքում կենտրոնական արագացման չափը ուղիղ համեմատական է շառավիղ-վեկտորի չափին կամ, ինչպես սովորաբար ասում են, շինարոնական արագացումը ուղիղ համեմատական է կետի հեռավորությանը կենտրոնից:

2°. Սակայն դժվար է համոզվել, որ (4, 8, 5) զիֆերենցիալ հավասարմանը, բացի հալասարաչափ շրջանային շարժումից բաժարարում է նաև անհավասարաչափ շարժումը էլիպսով:

Իրոք, դիցուք ω -ն հաստատուն սկսվար է, $\bar{a}$, $\bar{b}$ -ն կամայական հաստատուն վեկտորներ են, $\bar{r}$ -ը շառավիղ-վեկտորն է և արված է՝

$$\bar{r} = \bar{a} \cos \omega t + \bar{b} \sin \omega t, \quad (4, 8, 6)$$

Ածանցելով այս արտահայտությունը ըստ t -ի, ստանում ենք

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = \omega (-\bar{a} \sin \omega t + \bar{b} \cos \omega t), \quad (4, 8, 7)$$

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{\omega} = -\omega^2 (\bar{a} \cos \omega t + \bar{b} \sin \omega t) \quad (4, 8, 8)$$

կամ, համեմատելով (4, 8, 6)-ը և (4, 8, 8)-ը

$$\bar{\omega} = -\omega^2 \bar{r}, \quad (4, 8, 9)$$

Հարկավոր է նկատի առնել, որ բարձրացնելով (4, 8, 7) քառակուսի, ունենք

$$v^2 = \omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t - 2\bar{a} \cdot \bar{b} \sin \omega t \cos \omega t), \quad (4, 8, 10)$$

որտեղից երևում է, որ $v^2 \neq \text{const}$, $v \neq \text{const}$, հետևապես շարժումը անհավասարաչափ է:

$\bar{a}$, $\bar{b}$ վեկտորների կամայական լինելուց բխում է, որ (4, 8, 6)-ը ա) հանդիսանում է (4, 8, 9) զիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

բ) ներկայացնում է ալն էլիպսի հավասարումը, որի կենտրոնը համընկնում է շատավիդ-վեկտորի սկզբին՝ ալսինքն արագացման կենտրոնի հետ:

Այսպիսով հավասարաչափ շրջանալին շարժումը և անհավասարաչափ էլիպսական շարժումը ենթակա են միևնույն (4, 8, 5) դիֆերենցիալ հավասարմանը և այդ շարժումներից առաջինը պետք է դիտվի որպես երկրորդի մասնավոր տեսքը:

Դանենք $\vec{a}$ -ի և $\vec{b}$ -ի միջև այն կապը, որի դեպքում էլիպսը վեր է ածվում նույն կենտրոնն ունեցող շրջանագծի:

Դանի որ շատավիդ-վեկտորի սկզբը ենթադրվում է շրջանագծի (և էլիպսի) կենտրոնում, ապա շրջանագծի զեպքում

$$\vec{r}^2 = r^2 = \text{const}$$

կամ, ըստ (4, 8, 6)-ի

$$r^2 = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \sin \omega t \cos \omega t = \text{const} \quad (4, 8, 11)$$

(4, 8, 11) արտահայտության աջ մասը կլինի հաստատուն, ալսինքն t -ից անկախ, միայն, եթե

$$a^2 = b^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0:$$

Այս երկու պայմանները կարելի է արտահայտել մի վեկտորական հավասարությամբ՝

$$\vec{b} = \hat{h} \times \vec{a}, \quad (4, 8, 12)$$

որտեղ $\hat{h}$ միավոր վեկտորը ուղղահայաց է էլիպսի հարթությանը,

$$\hat{h} \perp \vec{a}, \quad \hat{h} \times (\hat{h} \times \vec{a}) = -\vec{a}, \quad \hat{h} \times (\vec{a} \times \hat{h}) = \vec{a} \quad (4, 8, 13)$$

(4, 8, 6) և (4, 8, 12)-ը տալիս են շրջանագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + (\hat{h} \times \vec{a}) \sin \omega t \quad (4, 8, 14)$$

Ածանցելով (4, 8, 14) ըստ t -ի, ստանում ենք

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega (-\vec{a} \sin \omega t + \hat{h} \times \vec{a} \cos \omega t)$$

կամ, որովհետև ըստ (4, 8, 13)-ի $(-\vec{a}) = \hat{h} \times (\hat{h} \times \vec{a})$

$$\vec{v} = \dot{h} \omega \times [(\dot{h} \times \vec{a}) \sin \omega t + \vec{a} \cos \omega t],$$

Իսկ (4, 8, 14)-ի հիման վրա

$$\vec{v} = (\dot{h} \times \vec{r}) \omega, \quad (4, 8, 14')$$

ալս է արագություն (4, 8, 4) արտահայտությունը հավասարաչափ շրջանային շարժման դեպքում:

Այսպիսով

(4, 8, 9) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր (4, 8, 6) ինտեգրալում $\vec{a}$, $\vec{b}$ -ն կամայական հաստատուն վեկտորներ են, (4, 8, 6)-ը ներկայացնում է կենտրոնական շարժում էլիպսով, որի կենտրոնը համընկնում է արագացման կենտրոնի հետ:

Եթե կամայական $\vec{b}$ վեկտորը փոխարինենք $\dot{h} \times \vec{a}$ վեկտորով, (4, 8, 6)-ը վեր է ածվում շրջանային հավասարաչափ շարժման (որում շրջանի կենտրոնը համընկնում է արագացման կենտրոնի հետ):

Ստացված արդյունքներն ունեն կարևոր կիրառումներ, տես § 4, 10:

3°. Ստորև նշված է (4, 8, 9) դիֆերենցիալ հավասարման մի ալլ մասնակի լուծում: Այժմ քննարկենք (4, 8, 9)-ի ընդհանուր լուծումը:

Դիցուք φ -ն շառավիղ-վեկտորով և մի անշարժ ուղղով կազմված անկյունն է, տես նկար 4, 18: $\varphi = \omega$ միայն հավասարաչափ շրջանային շարժման դեպքում: Իսկ էլիպսական շարժման դեպքում φ անընդմիջ ոչ մի անշարժ շառավիղ չունի հաստատուն ω ակալարի հետ. $(-\omega^2)$ պետք է դիտվի որպես $\vec{\omega} = -\omega^2 \vec{r}$ հավասարման համեմատականության գործակից:

Երբ $r = 1$, $\vec{\omega} = \omega^2$, ալթինքն ω^2 -ն թվապես հավասար է արագացման չափին, երբ շառավիղ-վեկտորի չափը հավասար է մեկի:

Հաստատուն $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորների խտտաները հեշտ է պարզել:

Նշելով O ինդեքսով $t = 0$ մոմենտին վերաբերող մեծությունները, տեսնում ենք՝ [(4, 8, 14), (4, 8, 12)]

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{a} \\ \vec{v}_0 &= \omega \vec{b}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{v}_0}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4, 8, 15)$$

ընդ որում $t = 0$ մոմենտին համապատասխանող $\bar{r}_0$ շառավիղ-վեկտորը և $\bar{v}_0$ արագությունը միանգամայն կամայական վեկտորներ են:

Բաղմասայական (4, 8, 6)-ը Ե-ով, բարձրացնենք քառակուսի և զամարենք (4, 8, 7)-ի քառակուսու հետ, ըստ (4, 8, 15)-ի կըստանանք

$$v^2 + \omega^2 r^2 = \omega^2 (a^2 + b^2) = \omega^2 r_0^2 + v_0^2 = \text{const} \quad (4, 8, 16)$$

(4, 8, 16)-ի ձախ մասի հաստատուն լինելը բխում է (4, 7, 5) թեորեմից:

Իսկապես, ըստ (4, 8, 5)-ի

$$\bar{\omega} \cdot d\bar{r} = -\omega^2 \bar{r} \cdot d\bar{r} = -\frac{d(\omega^2 r^2)}{2}.$$

հետևապես (4, 7, 5)-ը ընդունում է այս տեսքը՝

$$\frac{d\bar{v}^2}{2} = -\frac{d(\omega^2 r^2)}{2}$$

կամ

$$v^2 + \omega^2 r^2 = C,$$

որտեղ C -ն ինտեգրման հաստատունն է:

Վերջապես, որոշենք սեկտորիալ արագությունը $\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v}$

(4, 8, 6) և (4, 8, 7)-ը տալիս են

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \omega \bar{a} \times \bar{b} = \frac{1}{2} \bar{r}_0 \times \bar{v}_0 \quad (4, 8, 17)$$

(4, 8, 17) նշանակում է, որ ընդհանուր դեպքում, երբ $\bar{a}$, $\bar{b}$ -ն կամայական հաստատուն վեկտորներ են, սեկտորիալ արագությունը զրո չէ և հաստատուն է, ինչպես պետք է լինի ըստ (1, 6, 5)-ի:

Նկատի առնելով նաև այն, որ

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad (4, 8, 18)$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha, \quad \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha, \quad (4, 8, 19)$$

կարող ենք բնութագրել քննարկվող շարժումը այսպես.

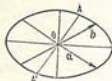
Մեպի (O) կենտրոնը ուղղված և հաստատուն ռադիոլ համեմատական կենտրոնական արագացում առնչող կետի հետադիմ ընդհանուր դեպքում էլիպս է, որի կենտրոնն է O (նկ. 4—19):

Արագությունը զրո չի դառնում և շարժման ուղղությունը չի փոխվում $\{a \cos(4, 8, 7) \text{ և } [4-H]\}$, ուստի կեսը կատարում է լրիվ պտույտներ էլիպսով:

Համաձայն $(4, 8, 16)$ -ի արագության և շառավիղ-վեկտորի չափերի փոփոխությունները տարանշան են՝ կենտրոնից հեռանալիս արագության չափը փոքրանում է. այսպիսով արագության չափը հասնում է մաքսիմումի էլիպսի փոքր առանցքի ծայրերում և մինիմումի՝ մեծ առանցքի ծայրերում:

Այն T ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կեսը կատարում է մի պտույտ էլիպսով կոչվում է պարբերություն և հավասար է $\frac{2\pi}{\omega}$, այսինքն

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad (4, 8, 20)$$



(Եկ. 4-19)

Իսկապես, դիցուք շառավիղ-վեկտորը հավասար է $\bar{r}_1$ -ի t_1 մոմենտում և անընդհատ փոփոխվելով նորից դառնում է $\bar{r}_1$ t_2 մոմենտում: Այդ նշանակում է, որ կեսը կատարել է մի պտույտ և պարբերությունը

$$T = t_2 - t_1$$

Ըստ $(4, 8, 6)$ -ի

$$\bar{r}_1 = \bar{a} \cos \omega t_1 + \bar{b} \sin \omega t_1 = \bar{a} \cos \omega t_2 + \bar{b} \sin \omega t_2.$$

$(4, 8, 18)$ -ի հիման վրա $\omega t_2 = \omega t_1 + 2\pi$,

որտեղից
$$t_2 - t_1 = T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega > 0; \quad (4, 8, 21)$$

$(4, 8, 21)$ -ից եզրակացնում ենք, որ պարբերությունը լրովին որոշվում է $(4, 8, 9)$ -ի համեմատականության $(-\omega^2)$ գործակցով:

T -ի արժեքի վրա չեն ազդում $\bar{a}$, $\bar{b}$ (կամ $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$) վեկտորները, որոնցով որոշվում է էլիպսը և սեկտորիալ արագությունը:

Թեև այս շարժումը էլիպսով անհավասարաչափ է $(4, 8, 10)$, բայց և այնպես լուրաքանչուր կիսապտույտը, այսինքն կամալական տրամագծի մի ծայրից մինչև մյուս ծայրը, կատարվում է $\frac{T}{2}$ ժամանակամիջոցում:

Իրոք, AOA' -ը էլիպսի տրամագծերից մեկն է և շարժվող ձեռք գտնվում է A , A' գրեքերում է և t' մոմենտներում:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{r}' = \overrightarrow{OA'} = -\vec{r},$$

Ըստ (4, 8, 6)-ի

$$\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t, \quad \vec{r}' = \vec{a} \cos \omega t' + \vec{b} \sin \omega t';$$

$$\text{Քանի որ } \vec{r}' = -\vec{r}, \text{ ապա } \cos \omega t' = -\cos \omega t,$$

$$\sin \omega t' = -\sin \omega t$$

ձ Ըստ (4, 8, 19)-ի

$$\omega t' - \omega t = \pi \quad \text{կամ} \quad t' - t = \frac{\pi}{\omega}.$$

$$\text{Համեմատելով (4, 8, 21)-ի հետ տեսնում ենք՝ } t' - t = \frac{T}{2},$$

այն, ինչ որ պետք է ապացուցվեր:

$$4^\circ. \text{ Անցնենք } \vec{\omega} = -\omega^2 \vec{r}$$

գիֆերենցիալ համասարման լուծման այն մասնավոր դեպքին, որում (4, 8, 6)-ի $\vec{a}$, $\vec{b}$ հաստատուն վեկտորների կամալականությունը սահմանափակված է

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad (4, 8, 22)$$

պայմանով: Ըստ (4, 8, 17)-ի այս պայմանից հետևում է, որ

$$\dot{\vec{a}} = 0, \quad \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = 0. \quad (4, 8, 23)$$

(4, 8, 23) նշանակում է, որ հետագիծը արագացման կենտրոնով անցնող աղիղ է, տես [4-1']:

(4, 8, 23)-ը հնարավոր է 3 դեպքերում, տես (4, 8, 15).

$$\vec{r}_0 = 0,$$

$$\vec{v}_0 = 0,$$

$$\vec{r}_0 \parallel \vec{v}_0,$$

Համաձայն (4, 8, 15)-ի $\vec{r}_0 = 0$ պայմանը համարվի է $\vec{a} = 0$ պայմանին և այդ դեպքում

$$\bar{r} = \bar{b} \sin \omega t = \frac{\bar{v}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (4, 8, 24)$$

կամ

$$\bar{r} = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t;$$

եթե $\bar{v}_0 = 0$, ապա, ըստ (4, 8, 15)-ի $\bar{b} = 0$ և համաձայն (4, 8, 6)-ի

$$\bar{r} = \bar{a} \cos \omega t, \quad \bar{v} = -\bar{a} \omega \sin \omega t \quad (4, 8, 25)$$

կամ

$$\bar{r} = a \cos \omega t, \quad \bar{v} = -a \omega \sin \omega t.$$

Վերջապես այն դեպքում, երբ $\bar{r}_0 \parallel \bar{v}_0$, (4, 8, 15)-ը տալիս է

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \text{կամ} \quad \bar{b} = \lambda \bar{a}$$

որտեղ λ -ն հաստատուն սկալար գործակից է:

Ընտրելով $\bar{a}$ միավոր վեկտորը այնպես, որ $\bar{a} \uparrow \bar{a}$, (4, 8, 6)-ից ստանում ենք

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{a} (a \cos \omega t + \lambda a \sin \omega t) \\ \bar{r} &= a \cos \omega t + \lambda a \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (4, 8, 26)$$

Համեմատելով (4, 8, 24)–(4, 8, 26) արդյունքները (3, 4, 8)-ի հետ, տեսնում ենք, որ (4, 8, 22) լրացացիչ պարմանի դեպքում

$$\bar{\omega} = -\omega^2 \bar{r}$$

գիֆերենցիալ հավասարմանը համապատասխանող կենարանական շարժումները ուղղադիմ հարմոնիկ տատանումներ են:

Երեք դեպքում էլ ($\bar{r}_0 = 0$, $\bar{v}_0 = 0$, $\bar{r}_0 \parallel \bar{v}_0$) տատանման լրիվ պարբերությունը $T = \frac{2\pi}{\omega}$, իսկ ամպլիտուդը և միուս մեծությունները կարելի է որոշել այնպես, ինչպես ցույց է տրված § 3,3 և § 3,4-ում:

3. Մի քանի դիտողություններ.

1. Այս պարագրաֆում ցույց տրվեց, որ $\bar{\omega} = -\omega^2 \bar{r}$ գիֆերենցիալ հավասարման (այսինքն այն դեպքում, երբ կենտրոնական արագացումը ուղիղ համեմատական է կետի հեռավորությանը

կենտրոնից և ուղղված է դեպի կենտրոնը) համապատասխանում են բոլորովին տարրեր շարժումներ՝ համասարաչափ շրջանային շարժում, ուղղագիծ տատանումներ և անհամասարաչափ շարժում էլիպսով:

Զնայած այդ շարժումների միջև կոպտ տարրերությունը, նրանք ունեն մի ընդհանուր հատկություն այն է T ժամանակամիջոցը, որ ուղղագիծ տատանումների դեպքում կոչվում է տատանման պարբերություն, իսկ մյուս դեպքերում (շրջանային կամ էլիպսական) մի պտույտի պարբերություն, բոլոր այդ շարժումների համար

$$T = \frac{2\pi}{\omega}:$$

2. Պետք է նկատի առնել, որ հեռավորությունը ուղիղ համեմատական արագացումը, կարող է լինել նաև ուղղված կենտրոնից դեպի կետը՝

$$\vec{\omega} = +\omega^2 \vec{r}:$$

Այս գիֆերենցիալ հավասարմանը ենթակա շարժումների բնույթը բոլորովին տարրերվում է ներկա պարագրաֆում ուսումնասիրված շարժումների բնույթից (տես § 4, 11):

§ 4. Գ. Դիֆերենցիալ հավասարումների մասին

1°. Այս պարագրաֆում տառնց տպացույցի բերված մի քանի դրույթները վերաբերում են երկրորդ կարգի գծային համասեռ վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Այդ դրույթները կիրառելի են նաև մի քանի այլ վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար:

Ահալար դիֆերենցիալ արտահայտության լուրջ քանջույթ ինտեգրումը ներբերում է մի կամալական սկալար մեծություն՝ այն է ինտեգրման հաստատունը: Նման պատճառով երկրորդ կարգի սկալար դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է երկու կամալական հաստատուն սկալարներ:

Վեկտորական դիֆերենցիալ արտահայտության ինտեգրումն էլ ներբերում է մի կամալական հաստատուն վեկտոր՝ ինտեգրման հաստատունը: Այս կապակցությամբ սեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

[4—M] երկրորդ կարգի վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը պետք է պարունակի երկու կամալական հաստատուն վեկտորներ:

Այս երկու վեկտորների կամայականությունն ամեն տեսակի խախտման դեպքում արդարևի դիֆերենցիալ համաստեման լուծումը կդադարի ընդհանուր լինելուց:

2^o. Վեկտորը բնորոշվում է երեք սկալար տվյալներով. օրինակ երեք պրոեկցիաներով: Վեկտորի կամայականության համար անհրաժեշտ է, որ կամայական լինեն արդ երեք սկալար տվյալները:

Համաստեմության համար ասելու ենք, որ վեկտորը համարժեք է երեք, երկու, կամ մեկ սկալարի, նախած նրան, թե որքան անկախ սկալար տվյալներով է որոշվում արդ վեկտորը: Ահա օրինակներ աշնարի վեկտորների, որոնք համարժեք են երկու սկալարի:

1. Տվյալ HH առանցքին ուղղահայաց $\bar{a}$ վեկտորը: Իրոք, եթե կոորդինատային առանցքներից մեկը համընկնում է HH -ի հետ, ապա $\bar{a}$ -ի պրոեկցիան HH -ի վրա զրո է և կամայական կարող են լինել միայն մյուս երկու պրոեկցիաները:

2. Որեւ միավոր $\hat{b}$ վեկտորը: Դիցուք $\hat{b}$ -ն կազմում է α, β, γ անկյուններ կոորդինատական առանցքների հետ.

$$\hat{b} = \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma$$

Ընդ որում $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ $\hat{b}$ -ի պրոեկցիաներն են կոորդինատական առանցքների վրա և

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

ալիքն երեք կոսինուսներից անկախ (կամայական) կարող են լինել միայն երկուսը:

Մեկ սկալարի համարժեք վեկտորների օրինակներ:

3. Տվյալ (HH) առանցքին ուղղահայաց միավոր վեկտորը:

Արդարևի վեկտորը որոշվում է իր երկու պրոեկցիաներով ($\cos \alpha, \sin \alpha$) HH -ին ուղղահայաց երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց առանցքների վրա: Բայց $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, ալիքն անկախ կարող է լինել պրոեկցիաներից միայն մեկը:

4. Տվյալ HH առանցքին զուգահեռ $\bar{a}$ վեկտորը:

Եթե նշանակենք HH -ին զուգահեռ միավոր-վեկտորը $\hat{h}$,

ապա

$$\bar{a} = a \hat{h}.$$

տարեմն $\bar{a}$ -ն որոշվում է մի սկալար մեծություն (a), քանի որ $\bar{h}$ -ը նախապես տրված է:

Բերենք օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս երկու միասին վերցրած ($\bar{a}$, $\bar{b}$) վեկտորների համարմեքությունը 5, 4, 3, 2, 1 սկալարների:

5. Դիցաք $\bar{a}$, $\bar{b}$ վեկտորները բաժարարում են $\bar{a} \cdot \bar{b} = c$ պայմանին. այդ նշանակում է, որ $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = c$. ալիքն վեց պրոնիցիաներից անկախ (կամայական) կարող են լինել միայն 5-ը:

6. $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորները ենթակա են

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$$

պայմանին: Այս պայմանի համաձայն

$$a) \bar{a} \perp \bar{c}, \quad b) \bar{b} \perp \bar{c}, \quad g) |\bar{a} \bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{c}$$

Ինչպես տեսանք 2^o, 1-ում ա և բ նշանակում է, որ անկախ սկալարների թիվը չի կարող գերադանցել (2+2), իսկ գ կրճատում է մեկով ալիք թիվը. արդյունքով $\bar{a}$, $\bar{b}$ -ն որոշող կամայական սկալարների թիվը չի կարող 3-ից մեծ լինել:

7. $\bar{a}$, $\bar{b}$ վեկտորները բաժարարում են

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$

պայմանին: Այստեղ ևս $\bar{a}$, $\bar{b}$ վեկտորների խումբը համարմեք է 3 սկալարի: Իրոք, տրված պայմաններից հետևում է, որ

$$a_x + b_x = c_x, \quad a_y + b_y = c_y, \quad a_z + b_z = c_z.$$

ալիքն վեց սկալար մեծությունները ($a_x, \dots, b_z$) կապված են երեք պայմանով: Հետևապես վեցից անկախ են միայն երեքը:

3^o. Վերելք բերված տեղեկությունները համակարգի կարևոր են այն դեպքերում, երբ երկրորդ կարգի վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կազմվում է մասնակի լուծումներից:

Արդյալի դեպքերը աչքի առաջ ունենալով, նպատակահարմար է ձևափոխել $[A-M]$ թեորեմը այսպես՝

$[A-M]$ երկրորդ կարգի վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման մեջ պարունակվող երկու կամ ավելի հաստատուն վեկտորների խումբը պետք է համարվեք չինի վեց կամայական սկալարի:

կարելի է նաև հակադարձ թևորեմը.

[4— M''] Երկրորդ կարգի վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարման յուրաքանչյուր լուծումը ընդհանուր է, եթե այն սխալուհանում է երկու կամ ավելի այնպիսի վեկտորներ, որոնք միասին համարվել են վեց անկախ սկալարների:

Ահա [4— M''] թևորեմի կիրառումներից մեկը: Ենթադրենք, որ հայտնի են երկրորդ կարգի վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումներ: Համաձայն [4— M'']-ի կարող ենք ասել

[4— N] Մասնակի լուծումների այն կոմբինացիան, որը պարունակում է երկու կամ ավելի հաստատուն վեկտորներ, կլինի ընդհանուր, եթե այդ (հաստատուն) վեկտորների խումբը համարվել է վեց կամայական սկալարների:

Հետագայում երկու խումբ հաստատուն վեկտորներ կհամարվեն համարվել, եթե խմբերից յուրաքանչյուրը համարվել է նույն թվով կամայական սկալարների:

Օրինակ, դիցուք արված են $\bar{a}$, $\bar{b}$ երկու կամայական վեկտորներ: Յուրաքանչյուր երկու ոչ զուգահեռ վեկտորներով որոշվում է նրանց ուղղահայաց միասուր $\hat{h}$ վեկտորը: Վերցնենք $\hat{h}$ -ին ուղղահայաց $\bar{m}$, $\bar{n}$ վեկտորներ: $\hat{h}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ խումբը համարվել է $\bar{a}$, $\bar{b}$ խմբին, որովհետև $\bar{a}$, $\bar{b}$ կամայական վեկտորները համարվել են վեց անկախ սկալարների: $\hat{h}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ խումբը նույնպես համարվել է վեց սկալարների, քանի որ 2^0 1, 2-ի համաձայն $\hat{h}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրը համարվել է 2 անկախ սկալարների:

§ 4. 10. $\bar{\omega} = -\omega^2 \bar{r}$ հավասարման մի այլ ընդհանուր լուծում

1. Դիտարկենք մի անդամ h ու

$$\bar{\omega} = -\omega^2 \bar{r} \quad (4, 10,1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը և ցույց տանք, որ նրա ընդհանուր լուծման

$$\bar{r} = \bar{a} \cos \omega t + \bar{b} \sin \omega t \quad (4, 10,2)$$

աջ մասը կարելի է փոխարինել մի այլ այնպիսի գումարով, որի յուրաքանչյուր գումարելին ներկայացնում է հավասարաչափ շրջանային շարժում:

$\vec{a}$ ի և $\vec{b}$ -ի կամայական լինելու շնորհիվ կարելի է նրանց փոխարինել $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ և $\hat{h}$ խմբով, ընդ որում

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}, \quad \hat{h} \times (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = \vec{b}, \quad (4, 10,3)$$

իսկ $\hat{h}$ -ը ուղղահայաց է թե $\vec{a}_1$ -ին թե $\vec{a}_2$ -ին:

Այդպիսով (4, 10, 2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{r} = (\vec{a}_1 \cos \omega t + \hat{h} \times \vec{a}_1 \sin \omega t) + (\vec{a}_2 \cos \omega t - \hat{h} \times \vec{a}_2 \sin \omega t):$$

Հաշվի առնելով, որ $\cos \omega t = \cos(-\omega t)$, $\sin \omega t = -\sin(-\omega t)$, կարող ենք աջ մասի փակագծերում դանդող դաժարում օ փոխարինել $(-\omega)$ -ով և կստանանք

$$\vec{r} = (\vec{a}_1 \cos \omega t + \hat{h} \times \vec{a}_1 \sin \omega t) +$$

$$+ [\vec{a}_2 \cos(-\omega t) + \hat{h} \times \vec{a}_2 \sin(-\omega t)]: \quad (4, 10,4)$$

Համաձայն (4, 8, 16)-ի, (4, 10, 4)-ի աջ մասի առաջին երկու գումարելիները ներկայացնում են հավասարաչափ շարժում $\vec{a}_1$ շառավիղ ունեցող շրջանագծով և ω անկյունային արագությամբ, իսկ մյուս երկու գումարելիները՝ հավասարաչափ շրջանային շարժում $\vec{a}_2$ շառավիղ ունեցող շրջանագծով և $(-\omega)$ անկյունային արագությամբ: Վ-ի նշանների տարրերություներ $(+\omega)$, $(-\omega)$ ցույց է տալիս, որ երկու շրջանագծերով շարժումները կատարվում են հակառակ ուղղություներով՝ եթե մի շարժումը կատարվում է ժամսլաքի ուղղությամբ, մյուսը պետք է կատարվի ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ:

Նկատի առնենք, որ

$$\omega^2 = (-\omega)^2$$

և այդ պատճառով մենք իրավունք ունենք դիֆերենցիալ հավասարման լուծման մեջ ներմուծել թե ω և թե $(-\omega)$.

2°. Ակներև է, որ (4, 10, 4)-ի աջ մասում երկու գումարելիներին լուրջ քանչյուրը՝

$$\left. \begin{aligned} &\vec{a}_1 \cos \omega t + \hat{h} \times \vec{a}_1 \sin \omega t \\ &\vec{a}_2 \cos(-\omega t) + \hat{h} \times \vec{a}_2 \sin(-\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (4, 10,5)$$

(4, 10, 1) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումն է՝
 $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ վեկտորները միանգամայն կամալական են:

Այսպիսով հնարավոր եղավ ընդհանուր լուծումը ներկայացնել որպես երկու մասնակի լուծումների գումար:

Այս բոլորը լիովին համապատասխանում է $[4 - M']$ և $[4 - N]$ -ին:

Բայց ալյտեղ մենք հանդեցինք (4, 10, 4)-ին և նրա մասնավոր լուծումներին ձևափոխելով ընդհանուր (4, 10, 2) լուծումը: Սովորաբար, երբ դեռ ընդհանուր լուծումը հայտնի չէ, որոնում են մասնակի լուծումները (քանի որ այդ հեշտ է ընդհանուր լուծման որոնելուց) և նրանցից կազմում ընդհանուր լուծումը, հետևելով որ $[4 - M'']$ կամ $[4 - N]$ թեորեմը չխախտվի:

3°. (4, 10, 4)-ը, դուռ կինեմատիկական տեսակետից, ավելի հարմար է քանի (4, 10, 2)-ը: Իրոք, մի ընդհանուր O կենտրոնում սկսվող $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ վեկտորներով որոշվում է այն P հարթությունը, որի վրա պետք է մնան

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_1 &= \bar{a}_1 \cos \omega t + \dot{\bar{a}}_1 \times \bar{a}_1 \sin \omega t \\ \bar{r}_2 &= \bar{a}_2 \cos (-\omega t) + \dot{\bar{a}}_2 \times \bar{a}_2 \sin (-\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (4, 10, 5)$$

շառավիղ-վեկտորները, պատվելով հսկասակ ուղղութիւններով O -ի շուրջը:

Ահնար է, որ (4, 10, 2) էլիպսը, այսինքն նրա շառավիղ-վեկտորը շատ հեշտ է կառուցել, ելնելով (4, 10, 5)-ից՝

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \quad (4, 10, 6)$$

Բացի այդ, անմիջապես կարելի է որոշել էլիպսի կիսաառանցքները. իսկապես, երբ $\bar{r}_1$ և $\bar{r}_2$ -ը կազմում են մի ուղիղ, ապա կամ $\bar{r}_1 \uparrow \bar{r}_2$ կամ $\bar{r}_1 \downarrow \bar{r}_2$:

Առաջին դեպքում ստանում ենք էլիպսի մեծ կիսաառանցքը՝
 $r_{\max} = r_1 + r_2$, իսկ երկրորդ դեպքում էլիպսի փոքր կիսաառանցքը՝
 $r_{\min} = |r_1 - r_2|$:

§ 4, II. $\omega = \omega \bar{r}$ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը

1°. § 4, 8 և § 4, 10-ում ուսումնասիրված էր կենտրոնական շարժումը, որում արագացումը ուղիղ համեմատական է կետի հեռավորութլւնը կենտրոնից և ուղղված է դեպի կենտրոնը՝

$$\overline{\omega} = -\omega^2 \overline{r} = -\overline{r} \omega^2 r \quad (4, 11, 1)$$

Այժմ քննարկվելու է կենտրոնական շարժումը, որում արագացումը նախապես ուղիղ համեմատական է կետի հեռավորությունը կենտրոնից, բայց ուղղված է կենտրոնից դեպի կետը՝

$$\overline{\omega} = \omega^2 \overline{r} \quad (4, 11, 2)$$

(4, 11, 1)-ի և (4, 11, 2)-ի նշանների տարբերությունը արտահայտում է արագացումների հակառակ ուղղվածությունը:

(4, 11, 2) հավասարման ընդհանուր լուծումը հեշտ է դանել, հենվելով $|4-M|$ -ի վրա: Այդ ընդհանուր լուծումը պետք է պարունակի երկու կամայական հաստատուն վեկտորներ, բացի այդ պետք է նկատի առնել, որ

$$(-\omega)^2 = \omega^2, \quad (4, 11, 3)$$

Դիտարկենք

$$\overline{r} = \overline{a} e^{\omega t} + \overline{b} e^{-\omega t} \quad (4, 11, 4)$$

տրահայտությունը, որտեղ $\overline{a}$ և $\overline{b}$ -ն երկու կամայական հաստատուն վեկտորներ են: Դիֆերենցելով երկու անգամ ըստ t -ի, կստանանք (4, 11, 2)-ը: Հետևապես (4, 11, 4)-ը հանդիսանում է (4, 11, 2) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Եվ այնպես (4, 11, 2) դիֆերենցիալ հավասարման ենթակա կենտրոնական շարժման շատավիդ-վեկտորը երկու վեկտորների գումար է, որոնց ուղղությունները հաստատուն են, իսկ չափերը փոփոխվում են էքսպոնենցիալ օրենքով՝ մեկը անընդհատ աճում է և ձգտում անսահմանություն t -ի հետ, մյուսը անընդհատ նվազում է և ձգտում դրոշի, երբ $t \rightarrow \infty$:

2^o. Հեշտ է համոզվել, որ (4, 11, 4) լուծումը բավարարում է սեկտորիալ արագություն հաստատուն լինելու պահանջին և (4, 8, 16) թևորեմին:

Ածանցելով (4, 11, 4)-ը ըստ t -ի, ստանում ենք

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \omega(\overline{a} e^{\omega t} - \overline{b} e^{-\omega t}), \quad (4, 11, 5)$$

(4, 11, 4) և (4, 11, 5)-ը տալիս են

$$2\dot{r} = \overline{r} \times \overline{v} = (\overline{a} e^{\omega t} + \overline{b} e^{-\omega t}) \times \omega(\overline{a} e^{\omega t} - \overline{b} e^{-\omega t}) = -2\omega \overline{a} \times \overline{b} \quad (4, 11, 6)$$

Հետևապես սեկտորիալ արագությունը հաստատուն է:

(4, 7, 5) թևերումը արժեք կարելի է գրել այսպես՝

$$d(v^2 - \omega^2 r^2) = 0, \quad v^2 - \omega^2 r^2 = C = \text{const} \quad (4, 11, 7)$$

(4, 11, 7)-ը անմիջապես ստացվում է (4, 8, 16)-ից, եթե նկատի առնենք, որ § 4, 8-ում $\bar{\omega} = -\omega^2 \bar{r}$, իսկ ներկա պարագրաֆում $\bar{\omega} = +\omega^2 \bar{r}$: (4, 11, 4) և (4, 11, 5)-ը տալիս են

$$\omega^2 r^2 = \omega^2 (a^2 e^{2\omega t} + b^2 e^{-2\omega t} + 2\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

$$v^2 = \omega^2 (a^2 e^{2\omega t} + b^2 e^{-2\omega t} - 2\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

ուստի $C = v^2 - \omega^2 r^2 = -4\bar{a} \cdot \bar{b} \omega^2, \quad (4, 11, 8)$

այսպիսով (4, 11, 7) թևերումը ևս բավարարված է:

3°. Որոշենք հետադիմը:

Նախ և առաջ մի քննհանուր (O) սկզբը ունեցող երկու հաստատուն $\bar{a}$, $\bar{b}$ վեկտորներով լիովին որոշվում է հարթութվանը. ուրեմն հետադիմը հարթ է և շատավիդ-վեկտորը ($\bar{r}$) գտնվում է հետադիմ հարթութվան վրա:

$\bar{a}(\bar{r} \cdot \bar{a}) = \overline{OA}$ վեկտորը $\bar{r}$ -ի ալն բաղադրիչն է, որ զուգահեռ է $\bar{a}$ -ին, իսկ $\bar{a} \times (\bar{r} \times \bar{a})$ $\bar{r}$ -ի ալն բաղադրիչն է, որ ուղղահայաց է $\bar{a}$ -ին և գտնվում է հետադիմ հարթութվան վրա (նկ. 4-20): Ակներև է, $\bar{a} \times (\bar{r} \times \bar{a}) = \overline{CA}$ շատավիդ-վեկտորի ծայրից իջեցրած ուղղահայացն է $\bar{a}$ -ի վրա:

Բանի որ

$$\bar{a} e^{\omega t} \times \bar{a} = 0$$

այս

$$\bar{r} \times \bar{a} = e^{-\omega t} \bar{b} \times \bar{a}$$

և

$$\bar{a} \times (\bar{r} \times \bar{a}) = e^{-\omega t} \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{a}) = e^{-\omega t} [\bar{b} - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{a})],$$

երբ $t \rightarrow \infty$, $e^{-\omega t}$ ձգտում է զրոյի՝

հետևապես $\bar{a} \times (\bar{r} \times \bar{a})$ ձգտում է զրոյի, երբ $t \rightarrow \infty$: Այս նշանակում է, որ շատավիդ-վեկտորի (O) սկզբից $\bar{a}$ -ին զուգահեռ տարած ուղիղը հետադիմ տախտակումն է:

ձիշտ նույն ձևով ապացուցվում է, որ O -ից $\hat{b}$ -ին դուրսհանալիս ասարած ուղիղն էլ հետագծի ասիմպտոտն է:

Մյուս կողմից՝ $\bar{a}e^{wt}$ և $\bar{b}e^{-wt}$ վեկտորների չափերի արտադրվել՝

$$|\bar{a}e^{wt}| |\bar{b}e^{-wt}| = ab = \text{const:} \quad (4, 11, 9)$$

(4, 11, 9)-ը հիպերբոլը բնութագրող հատկությունն է:

Այսպիսով (4, 11, 2) դիֆերենցիալ հավասարմանը ենթակա կենտրոնական շարժում կատարող կետի հետագիծը հիպերբոլ է:

4°. Կարող է արդյոք (4, 11, 2) դիֆերենցիալ հավասարման ենթակա շարժման հետագիծը ուղղագիծ լինել:

Տվյալ դեպքում համաձայն $[4-I']$ -ի հետագիծը պետք է անցնի O կետով և սեկտորիալ արագությունը պետք է դրոշի հավասար լինի, այսինքն համաձայն (4, 11, 6)-ի

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0,$$

հետևապես շարժումը կլինի ուղղագիծ երեք դեպքերում՝

$$\bar{a} = 0, \quad \bar{b} = 0, \quad \bar{a} \parallel \bar{b}:$$

Այս երեք պայմանները միանգամայն նման են (4, 10, 4)-ին:

§ 4, 12. Խճողիցներ

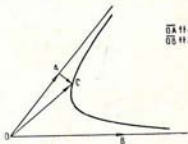
Խնդիր 1: Արտահայտել (4, 11, 4)-ի $\bar{a}$ և $\bar{b}$ հաստատուն վեկտորները սկզբնական շառավիղ-վեկտորի և սկզբնական արագության միջոցով:

Խնդիր 2: Կետի շառավիղ-վեկտորը արված է՝ որպես ժամանակի ֆունկցիա հետևյալ հավասարումով

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\bar{a} \cos \omega t + \hat{h} \times \bar{a} \sin \omega t) e^{ht}, \quad (a)$$

որտեղ ω , h դրական սկալար մեծություններ են, $\bar{a}$, $\hat{h}$ -ը հաստատուն վեկտորներ են, $\hat{h} \perp \bar{a}$:

01 11 2
02 11 2



(Նկ. 4-20)

Որոշել. կետի շարժումը կենտրոնական է, թե՞ ոչ, որոշել հետագիծը:

Լուծում: Որպեսզի լուծումը ավելի պարզ լինի, հիշենք, որ ըստ (4, 8, 14)-ի

$$\vec{\rho} = \vec{a} \cos \omega t + \hat{h} \times \vec{a} \sin \omega t$$

համասարակիցումը չըջանալով համասարաչափ շարժվող կետի համասարումն է. ընդ որում արագությունը և արագացումը՝

$$\dot{\vec{\rho}} = (\hat{h} \times \vec{\rho}) \omega, \quad (b)$$

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\vec{\rho} \omega^2; \quad (c)$$

Տալով $\vec{r}$ -ին այս տեսքը՝

$$\vec{r} = \vec{\rho} e^{kt} \quad (a')$$

նկատում ենք, որ $\vec{r} \parallel \vec{\rho}$, իսկ արագությունը և արագացումը՝ ըստ (b) և (c)-ի

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\hat{h} \times \vec{r}) \omega e^{kt} + \vec{\rho} k e^{kt} \quad (e)$$

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\rho} (\omega^2 e^{kt} + (\hat{h} \times \vec{\rho}) \omega k e^{kt} + (\hat{h} \times \vec{\rho}) \omega k e^{kt} + \vec{\rho} k^2 e^{kt})$$

$$\text{կամ} \quad \vec{w} = \vec{\rho} (k^2 - \omega^2) e^{kt} + 2(\hat{h} \times \vec{\rho}) \omega k e^{kt}, \quad (i)$$

(f)-ի աջ մասի առաջին անդամը՝

$$\vec{\rho} (k^2 - \omega^2) e^{kt} \parallel \vec{r},$$

իսկ երկրորդ բաղադրիչը ուղղահայաց է $\vec{r}$ -ին. ուստի $\vec{w}$ -ն զուգահեռ չէ $\vec{r}$ -ին, շարժումը կենտրոնական չէ:

Հետադիմը որոշելիս, կարելի է հենվել այն բանի վրա, որ $\vec{r}$ -ի ուղղությունը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում, և դանել r -ի կապը այն φ անկյունից, որ կազմում է $\vec{r}$ -ը մի անշարժ ուղղի հետ ($\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$):

Բայց ներկա խնդրում ավելի նպատակահարմար է որոշել հետագիծը իր բնութագրող հատկություն միջոցով:

Պտնենք այն α անկյունը, որ կազմում է $\vec{r}$ շառավիղ-վեկ-

տորը հետագծի շոշափողի հետ: Նկատի առնենք, որ $\vec{r} \parallel \vec{v}$, $|\vec{r} \times \vec{v}| = r v \sin \alpha$, $\vec{r} \cdot \vec{v} = r v \cos \alpha$, հետևապես $\frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{\vec{r} \cdot \vec{v}} = \operatorname{tg} \alpha$:

(α') և (ϵ)-ն տալիս են $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{\rho} \times (\hat{h} \times \vec{\rho}) \omega e^{2kt}$.

Իսկ $\hat{h} \perp \vec{\rho}$,

և արդ պատճառով

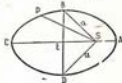
$$\vec{r} \times \vec{v} = \hat{h} \rho^2 \omega e^{2kt}, \quad |\vec{r} \times \vec{v}| = \rho^2 \omega e^{2kt},$$

կազմելով $\vec{r} \cdot \vec{v}$ արտադրվող պետք է օգտվել այն հանգամանքից, որ $\vec{\rho} \cdot (\hat{h} \times \vec{\rho}) = 0$, և արդյունքով $\vec{r} \cdot \vec{v} = \rho^2 k e^{2kt}$,

$$\text{իսկ} \quad \operatorname{tg} \alpha = \rho^2 \omega e^{2kt} : \rho^2 k e^{2kt} = \frac{\omega}{k} = \operatorname{const}:$$

Այդ հատկությունը ($\alpha = \operatorname{const}$) ունի «հավասարանկյուն» պարուլը:

Խնդիր 3: P կետը շարժվում է էլիպսով, որի S ֆոկուսը (նկ. 4—21) համընկնում է արագացման կենտրոնի հետ, իսկ էքսցենտրիսիտետը հավասար է ε : Պարբերությունը հավասար է T : Գտնել այն ժամանակամիջոցը, որում $\overline{SP}$ հեռավորության չափը հավասար է կամ գերազանցում է էլիպսի մեծ կիսաառանցքին:



(Նկ. 4—21)

Լուծում: § 4,13-ում ցույց կտրվի, որ արագացման կենտրոնը համընկնում է էլիպսի ֆոկուսի հետ միայն, երբ արագացման չափը

$$\omega = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha = \operatorname{const}, \quad \alpha > 0;$$

որտեղ r -ը կետի հեռավորության չափն է կենտրոնից ($r = SP$):

Սակայն այս խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ չէ դիտենալ արագացման չափի կախումը հեռավորությունից:

Ահա թե ինչպես կարելի է դատել:

Դիցուք $a = EA$ և $b = EB$ էլիպսի մեծ և փոքր կիսաառանցքներն են: Ինչպես հայտնի է $SB = SD = a$: Հետևապես BCD կիսաէլիպսի լուրջանչյուր կետը բաժարարում է $SP \geq a$ պայմանին, իսկ էլիպսի մուս (BAD) կետի կետերի համար $SP < a$:

Այն τ ժամանակամիջոցում, որում P կետը անցնում է BCD աղեղը, $\overline{SP}$ շառավիղ-վեկտորը դժում է $SBCDS$ մակերեսը և քանի որ կենտրոնական շարժման դեպքում սեկտորիալ արագությունը հաստատուն է, ապա

$$\tau = \frac{SBCDS}{\dot{\sigma}}, \quad \text{որտեղ } \dot{\sigma} \text{ սեկտորիալ արագությունն է:}$$

էլիպսի մակերեսը հավասար է πab , ուրեմն

$$\text{մակ. } SBCDS = \frac{\pi ab}{2} + \text{մակ } SBEDS.$$

մակ. $SBEDS = SE \cdot EB$: Ինչպես հայտնի է $SE = ea$:

Այսպիսով

$$\text{մակ. } SBEDS = abe$$

իսկ

$$\text{մակ. } SBCDS = \frac{\pi ab}{2} + abe:$$

Վերջապես, եթե T պարբերությունն է, ապա

$$\dot{\sigma} = \frac{\pi ab}{T},$$

որի ջնորհիվ

$$\tau = T \frac{SBCDS}{\pi ab} = T \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi} \right):$$

Խնդիր 4: P կետը շարժվում է էլիպսով, որի մեծ և փոքր կիսաառնցքներն են $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$: Q կետը կատարում է հավասարաչափ շարժում շրջանագծով, որի շառավիղը $R = a$, իսկ կենտրոնը C կետն է: P -ի արագացումը ուղիղ համեմատական է OP -ին և ուղղված է P -ից դեպի O , իսկ Q -ի արագացումը ուղիղ համեմատական է CQ -ին և ուղղված Q -ից դեպի C :

Երկու շարժումների պարբերությունները նույնն են և հավասար T -ի:

Որոշել $\frac{v_Q}{v_A}$ և $\frac{v_Q}{v_B}$ հարաբերությունները, որտեղ v_A , v_B -ն

P -ի արագությունն է A և B կետերում, իսկ v_Q -ն Q -ի արագությունն է:

Լուծում: Շրջանալին շարժմանը վերաբերող մեծությունները գրվելու են Q ինդեքսով, իսկ P -ի շարժմանը վերաբերող մեծությունները կդրենք առանց P ինդեքսի:

(4, 8, 4)-ի հիման վրա

$$v_Q = R\omega_Q = a\omega_Q, \quad (2)$$

P կետի սեկտորիալ արագությունը՝

$$\dot{\sigma} = \frac{\bar{a} \times \bar{v}_A}{2} = \frac{\bar{b} \times \bar{v}_B}{2}$$

և քանի որ $\bar{a}$ և $\bar{b}$ -ն էլիպսի կիսառանցքներն են, $\bar{a} \perp \bar{v}_A$, $\bar{b} \perp \bar{v}_B$, ապա

$$2\dot{\sigma} = av_A = bv_B, \quad (3)$$

Մյուս կողմից, էլիպսի մակերեսը հավասար է πab ուստի, ըստ (4, 8, 20)

$$\dot{\sigma} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi ab}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega ab}{2},$$

Համեմատելով (2)-ի տարրեր արտահայտությունները, ստանում ենք

$$\omega ab = av_A = bv_B,$$

որակելից՝

$$v_A = \omega b, \quad v_B = \omega a, \quad (7)$$

Նկատի առնենք խնդրի պայմանը, ըստ որի P և Q -ի պարբերությունները նույնն են, այսինքն $T = T_Q$ կամ ըստ (4, 8, 20)

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_Q}, \quad \omega = \omega_Q,$$

Այժմ (2) և (3)-ից ստանում ենք

$$\frac{v_Q}{v_B} = 1, \quad v_Q = v_B, \quad \frac{v_Q}{v_A} = \frac{a}{b},$$

Խնդիր 5: P և Q կետերն ունեն արագացման ընդհանուր O կենտրոնը և շարժվում են էլիպսներով (նկ. 4—22), որոնց ընդհանուր կենտրոնը նույնպես O -ն է: Յուրաքանչյուր կետի արագացումը ուղիղ համեմատական է հեռավորությունը O -ից, ուղղված է դեպի O , իսկ համեմատականության գործակիցները իրար հավասար են ($\omega_P^2 = \omega_Q^2 = \omega^2$):

Էլիպսներն ունեն ընդհանուր շոշափող (D) կետով, որում P -ի արագությունն է $\dot{\sigma}$, իսկ Q -ի արագությունը հավասար է

$\dot{z}(v + \dot{z}v)$: Այստեղ $\dot{z}$ -ն ընդհանուր շոշափողի միավոր-վեկտորն է, իսկ $\dot{z}v$ անսահման փոքր է:

Եթե Q կետով դժվող էլիպսի $\bar{a}$, $\bar{b}$ կիսաառնցքները, որոշել մյուս էլիպսի կիսաառնցքները և արագությունների չափերը արդ առանցքների ծայրերում:

Լ. Ն. Չ. Ն. (4, 5, 7), (4, 8, 20)-ից և նկարից երևում է, որ P կետի հաստատուն սեկտորիալ արագության չափի կրկնակին՝

$$2\dot{z} = |\bar{r} \times \dot{z}| v = a v_A = b_A v_B = \omega a b, \quad (a)$$

Q կետի համար ունենք

$$2\dot{z}_Q = |\bar{r} \times \dot{z}| (v + \dot{z}v): \quad (a')$$

Սեկտորիալ արագությունների կրկնակի չափերի տարբերությունը՝

$$2(\dot{z}_Q - \dot{z}) = 2\dot{z} = |\bar{r} \times \dot{z}| \dot{z}v, \quad (b)$$

իսկ հարաբերական տարբերությունը

$$-\frac{2\dot{z}}{2\dot{z}} = \frac{\dot{z}}{\dot{z}} = \frac{\dot{z}v}{v} = \text{const}, \quad (c)$$

Դիցուք Q կետով դժվող էլիպսի կիսաառնցքների երկարությունները համապատասխանաբար են $a + \delta a$, $b + \delta b$, որտեղ δa , δb անսահման փոքրեր են: Օգտվելով (a), (b)-ից կարելի է գրել Q -ի սեկտորիալ արագության կրկնակի չափը ալպա (արհամարհելով $\delta a \delta b$ արտադրյալը)

$$2\dot{z}_Q = 2\dot{z} + 2\dot{z}\delta = \omega(a + \delta a)(b + \delta b) = \omega a b + \omega(a\delta b + b\delta a): \quad (a'')$$

Այժմ առանց

$$\omega a b = 2\dot{z}, \quad \omega(a\delta b + b\delta a) = 2\dot{z}\delta:$$

Հետևաբար ըստ (c)-ի

$$\frac{\dot{z}\delta}{\dot{z}} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} = \frac{\dot{z}v}{v} \quad (c)$$

իսկ համաձայն (a)-ի

$$2\dot{z} = a v_A, \quad 2\dot{z}\delta = a \dot{z} v_A + v_A \delta a$$

և

$$\frac{\dot{z}\delta}{\dot{z}} = \frac{\dot{z} v_A}{v_A} + \frac{\delta a}{a}, \quad (f)$$

Նման ձևով փոխարինելով $a v_A$ արտադրյալը $b v_B$ -ով, ունենք

$$\frac{\partial z}{\partial} = \frac{\partial v_B}{v_B} + \frac{\partial b}{b} \quad (f')$$

(e), (f) և (f')-ից հետևում է

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{\partial v_A}{v_A}, \quad (g)$$

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{\partial v_B}{v_B}, \quad (g')$$

կարելի է $\frac{\partial a}{a}, \frac{\partial b}{b}, \frac{\partial v_A}{v_A}, \frac{\partial v_B}{v_B}$ հարաբերական փոփոխությունները արտահայտել $\frac{\partial v}{v}$ -ի և P -ի արագությունների միջոցով: Ըստ (4, 8, 16)-ի, P կետի համար՝

$$\omega^2 r^2 + v^2 = \omega^2 a^2 + v_A^2 = \omega^2 b^2 + v_B^2,$$

Q կետի համար

$$\begin{aligned} \omega^2 r^2 + (v + \partial v)^2 &= \omega^2 (a + \partial a)^2 + \\ &+ (v_A + \partial v_A)^2 = \omega^2 (b + \partial b)^2 + (v_B + \partial v_B)^2 \end{aligned}$$

Այստեղ ծալքալին ձախ դոմարը վերաբերում է այն մոմենտին, երբ կետը գտնվում է D -ում, իսկ միջին և աջ դոմարները համապատասխանում են մեծ կիսաաանցքի և փոքր կիսաաանցքի ծալքերին: Արհամարհելով ∂v -ի, ∂v_A -ի, ∂v_B -ի քառակուսիները, ստանում ենք

$$v \partial v = \omega^2 a \partial a + v_A \partial v_A$$

$$v \partial v = \omega^2 b \partial b + v_B \partial v_B,$$

իսկ

$$v^2 \frac{\partial v}{v} = \omega^2 a^2 \frac{\partial a}{a} + v_A^2 \frac{\partial v_A}{v_A}, \quad (h)$$

$$v^2 \frac{\partial v}{v} = \omega^2 b^2 \frac{\partial b}{b} + v_B^2 \frac{\partial v_B}{v_B} \quad (h')$$

(g)-ի հիման վրա (e)-ն կարելի է ձևափոխել՝

$$\frac{\partial v_A}{v_A} = \frac{\partial v}{v} - \frac{\partial a}{a}, \quad (i)$$

(i) և (g')-ը տալիս են

$$\frac{\partial v_A}{v_A} = \frac{\partial v}{v} - \frac{\partial v_B}{v_B}; \quad (i')$$

Փոխարինելով (h)-ի մեջ $\omega^2 a^2$ -ն v_B^2 -ով ըստ (a)-ի և օգտվելով (i')-ից ու (g')-ից ստանում ենք

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{v^2 - v_A^2}{v_B^2 - v_A^2} \frac{\partial v}{v} = \frac{\partial v_B}{v_B}; \quad (k)$$

Նման ձևով կամ փոխարինելով (k)-ում a -ն b -ով, իսկ A -ն B -ով կստանանք

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{v^2 - v_B^2}{v_A^2 - v_B^2} \frac{\partial v}{v_A} = \frac{\partial v_A}{v_A}; \quad (k')$$

(k) կամ (k')-ը կիրառելիս պետք է նկատի առնել, որ ըստ (a)-ի

$$av_A = bv_B = \omega ab$$

և եթե a -ն համարվում է մեծ կիսաառանցք, ապա

$$v_B > v > v_A;$$

Այսպիսով (k) և (k')-ում $\frac{\partial v}{v}$ -ի գործակիցը դրական է և ∂a ,

∂v_A , ∂b , ∂v_B -ի նշանները համընկնում են ∂v -ի նշանի հետ:

Հետևապես, եթե $\partial v > 0$, արիմքն Q -ի արագությունը D կետում գերազանցում է P -ինը, Q -ի էլիպսի կիսաառանցքները և արագությունները նրանց ծալրերում ավելի մեծ են քան P -ինը փերաբերող համապատասխան մեծությունները:

Նկատենք, որ (k) և (k')-ում $\frac{\partial v}{v}$ -ի գործակցի հալոտարաբեր անկախ է D կետի դիրքից. վերջինից կախում ունի միայն համարիչը:

Դիցուք D -ն համընկնում է A -ի հետ. այդ նշանակում է, որ երկու էլիպսներն ունեն ընդհանուր մեծ կիսաառանցք,

$$\partial a = 0, \quad \frac{\partial a}{a} = \frac{\partial v_B}{v_B} = 0, \quad \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial v_A}{v_A} = \frac{\partial v}{v};$$

Այդ համասարությունները ցույց են տալիս, որ տվյալ դեպքում, երբ $\partial v > 0$, Q -ի էլիպսի փոքր կիսաառանցքը մեծ է քան

P-ինը. և մեծ կիսառանցքի ծայրում *Q*-ի արագությունը մեծ է *P*-ի արագությունից, իսկ փոքր կիսառանցքի ծայրերում *Q*-ի և *P*-ի արագություններն իրար հավասար են:

Նման եզրակացությունների կհանգեինք, եթե *D* համընկներ *B*-ի հետ:

§ 4, 13. Կետի շարժումը, երբ կենտրոնական արագացումը հակադարձ համեմատական է հեռավորության քառակուսուն

1°. § 4, 8—4, 11-ում մանրամասնորեն ուսումնասիրված էր կենտրոնական շարժումը, որում արագացումը ուղիղ համեմատական է հեռավորությանը: Այժմ քննարկվելու է այն կենտրոնական շարժումը, որում արագացումը հակադարձ համեմատական է հեռավորության քառակուսուն:

Արագացումը կարող է ուղղված լինել թե կետից դեպի արագացման կենտրոնը, թե ընդհակառակն՝ կենտրոնից դեպի կետը: Երկու դեպքերն էլ նույնչափ կարևոր են:

Առաջին դեպքի օրինակ հանդիսանում են երկնային մարմինների շարժումները (օրինակ՝ մոլորակները շարժվում են «ձգվելով» արևի կողմից), էլեկտրականացված մասնիկների շարժումները, երբ արագացման կենտրոնում գտնվում է տարանջան լիցք ունեցող մասնիկ: Իսկ երբ կենտրոնում գտնվողված մասնիկի ու շարժվող մասնիկի լիցքերը նույնանշան են, տեղի ունի երկրորդ դեպքը:

2°. Սկսենք առաջին դեպքից և առաջին հերթին որոշենք հետադիմը: Դիցուք *P*-ն շարժվող կետն է, *O*-ն արագացման կենտրոնը, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ *P*-ի շառավիղ-վեկտորը, որի միավորը՝ $\hat{r} \uparrow \hat{r}$, $(-\hat{r}) \uparrow \downarrow \hat{r}$:

Նշանակելով զրական հաստատուն գործակիցը *a*, կտանանք արագացման արտահայտությունը

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega} &= \frac{a}{r^2} (-\hat{r}) = -\frac{a}{r^2} \hat{r}, \\ \text{արագացման չափը} \quad \omega &= \frac{a}{r^2}, \quad \overline{\omega} = -\hat{r}\omega: \end{aligned} \right\} \quad (4, 13,1)$$

Համաձայն (4, 5, 7)-ի սեկտորիալ արագության կրկնակին

$$2\dot{s} = \vec{r} \times \vec{v} = \hat{r} r^2 \dot{\varphi} = \hat{h} h = \vec{h}, \quad (4, 13,2)$$

որտեղ $\hat{h}$ միավոր վեկտորը ուղղահայաց է հետագծի հարթությանը: Բացի $\hat{h}$ -ից զիտվելու է $\dot{p}$ միավոր վեկտորը, որը գտնվողված է

հետագծի հարթության վրա, ահա (2, 9, 4): $\dot{p}$ և $\dot{h}$ -ի ուղղվածությունները բախարարում են հեռակալ պահանջին՝

$$\dot{r} \times \dot{p} = \dot{h}, \quad \dot{p} \times \dot{h} = \dot{r}, \quad \dot{h} \times \dot{r} = \dot{p}: \quad (4, 13, 3)$$

(4, 13, 1), (4, 13, 2), (4, 13, 3)-ը տալիս են

$$\bar{w} \times \bar{h} = w(-\dot{r}) \times \dot{h}h = \dot{p}wh = \dot{p}wr^2\dot{\varphi}: \quad (4, 13, 4)$$

Բայց ըստ (2, 9, 5)-ի

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \dot{p}\dot{\varphi}: \quad (4, 13, 5)$$

Այսպիսով (4, 13, 4)-ը ստանում է հեռակալ տեսքը.

$$\bar{w} \times \bar{h} = wr^2 \frac{d\dot{r}}{dt}: \quad (4, 13, 6)$$

$\bar{h}$ -ի հաստատուն լինելու պատճառով

$$\bar{w} \times \bar{h} = \frac{d(\bar{v} \times \bar{h})}{dt}$$

և (4, 13, 6) տալիս է

$$\frac{d(\bar{v} \times \bar{h})}{dt} = wr^2 \frac{d\dot{r}}{dt} \quad (4, 13, 7)$$

կամ

$$d(\bar{v} \times \bar{h}) = wr^2 d\dot{r}:$$

$$\text{Օգտվելով (4, 13, 1)-ից՝ } w = \frac{a}{r^2},$$

ստանում ենք

$$d(\bar{v} \times \bar{h}) = a d\dot{r} = d(a\dot{r}),$$

իսկ ինտեգրումից հետո

$$\bar{v} \times \bar{h} = a(\dot{r} + \bar{z}). \quad (4, 13, 8)$$

ալտակ ինտեգրման հաստատունը հավասար է $a\bar{z}$:

Հարկավոր է ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքին, որ (4, 13, 7)-ի անմիջական ինտեգրումը, հնարավոր է միայն, երբ արագացումը հովադարձ համեմատական է հեռավորության քառակուսուն:

3°. Վեկտորական արտադրյալը ուղղահայաց է իր արտադրիչներին. ուստի (4, 13, 8)-ում մի կողմից

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} \perp a (\bar{r} + \bar{z}), \\ (\bar{v} \times \bar{h}) \perp \bar{h}), \end{aligned} \right\} \quad (4, 13, 9)$$

մյուս կողմից

այսինքն $\bar{v} \times \bar{h}$ արտադրյալը զտնվում է հետագծի հարթության վրա. նույնը վերաբերում է $\bar{r}$ -ին, հետևապես $\bar{z}$ և $a\bar{z}$ նույնպես հետագծի հարթության վրա են:

Օղտվելով սրանից կարելի է ապացուցել, որ $\bar{z}$ -ը կոլինեար է այն շառավիղ-վեկտորին, որի չափը էքստրեմալ արժեք ունի:

Իսկապես $\bar{r}$ -ի ուղղություներ անընդհատ փոփոխվում է. այն մոմենտում, երբ $\bar{r}$ -ը զուգահեռ լինի $\bar{z}$ -ին, $\dot{\bar{r}}$ կունենանք

$$\bar{r} \parallel \bar{z}, \quad \bar{r} \uparrow \dot{\bar{r}}, \quad \bar{r} \parallel a(\bar{r} + \bar{z})$$

կամ ըստ (4, 13, 9)-ի $\bar{v} \perp \bar{r}, \quad \bar{v} \cdot \bar{r} = 0$,
և որովհետեւ, տես (2, 9, 5), հարթ շարժման դեպքում

$$\bar{v} = \bar{r} \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{r}} r \bar{\varphi},$$

ապա

$$\bar{v} \cdot \bar{r} = \dot{\bar{r}} \cdot \bar{r} = 0$$

քանի որ $\dot{\bar{p}} \cdot \bar{r} = 0$:

Այսպիսով

$$\dot{\bar{r}} = 0, \quad d\bar{r} = 0.$$

այս նշանակում է, որ այն մոմենտում, երբ $\bar{r} \parallel \bar{z}$, շառավիղ-վեկտորի չափը ունի էքստրեմալ արժեք:

4°. (4, 13, 8)-ը հնարավորություն է տալիս որոշելու կետի հետագիծը:

Կազմենք $\bar{r} \cdot (\bar{v} \times \bar{h})$ արտադրյալը. փոխելով վեկտորական և սկալար արտադրյալների նշանների տեղերը, համաձայն (4, 13, 2)-ի կստանանք

$$\bar{r} \cdot (\bar{v} \times \bar{h}) = (\bar{r} \times \bar{v}) \cdot \bar{h} = h^2, \quad (4, 13, 10)$$

Ըստ (4, 13, 8) և (4, 13, 10)-ի

$$h^2 = \bar{r} \cdot (\bar{v} \times \bar{h}) = \bar{r} \cdot \alpha (\bar{r} + \bar{e}) \quad (4, 13, 11)$$

կամ շնորհիվ նրա, որ $\bar{r} = \overset{\Delta}{r} r$, $\overset{\Delta}{r} \cdot \overset{\Delta}{r} = 1$,

$$h^2 = \alpha r (1 + \bar{e} \cdot \overset{\Delta}{r}) \quad (4, 13, 12)$$

Ընդունենք $\varphi = \angle(\bar{e}, \overset{\Delta}{r})$.

$$\cos \varphi = \bar{e} \cdot \overset{\Delta}{r}, \quad \bar{e} = \overset{\Delta}{e} \bar{r}, \quad \bar{e} \cdot \overset{\Delta}{r} = \overset{\Delta}{e} \cos \varphi$$

Այժմ (4, 13, 11) կգրվի այսպես

$$r = \frac{h^2}{\alpha (1 + \overset{\Delta}{e} \cos \varphi)} \quad (4, 13, 13)$$

(4, 13, 13)-ը ներկայացնում է այն կոնական հատույթի բևեռային հավասարումը, որի ֆոկուսը համընկնում է բևեռի հետ:

Հարկավոր է նկատի առնել, որ մեզ մաս բևեռի և ֆոկուսի հետ նաև համընկնում է արագացման կենտրոնը: Ուստի կարող ենք ասել՝

$$[4-O] \quad \bar{\omega} = -\frac{\overset{\Delta}{a} \bar{r}}{r^2}, \quad a = \text{const}, \quad \omega = \frac{a}{r^2}$$

Կենտրոնական արագացման ղեպքում կետի հետագիծը կոնական հատույթ է, որի ֆոկուսը գտնվում է արագացման կենտրոնում, իսկ էքսցենտրիսիտետը հավասար է ε :

Կոնական հատույթի տեսքը որոշվում է էքսցենտրիսիտետի արժեքով՝

Եթե $\varepsilon < 1$ հետագիծը էլիպս է,

$\varepsilon = 1$ պարաբոլ է,

$\varepsilon > 1$ հիպերբոլ է:

5°. ε -ի հափը որոշելու համար կարելի է գիմել (4, 7, 8)-ին:

Երբ $\bar{\omega} = -\frac{\overset{\Delta}{a} \bar{r}}{r^2}$, (4, 7, 7)-ից ստացվում է

$$\bar{\omega} \cdot d\bar{r} = -\frac{a}{r^2} dr = d\left(\frac{a}{r}\right)$$

և ըստ (4, 7, 8)-ի

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dv^2}{2} = d\left(\frac{a}{r}\right) \\ & \gamma - 2\frac{a}{r} = \gamma = v_0^2 - 2\frac{a}{r_0} \end{aligned} \right\} \quad (4, 13, 14)$$

γ -ն ինտեգրման հաստատունն է:

(4, 13, 8)-ի և (4, 13, 13)-ից երևում է, որ v^2 և r -ը արտահայտվում են z -ի միջոցով, ուստի (4, 13, 14)-ից պետք է հնարավոր լինի որոշել z -ը: Բարձրացնենք (4, 13, 8)-ը քառակուսի. հիշելով, որ $\vec{v} \perp \vec{h}$, գտնում ենք

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{h})^2 &= v^2 h^2 = a^2 (1 + 2z \cos \varphi + \varepsilon^2) = \\ &= a^2 [2(1 + z \cos \varphi) + \varepsilon^2 - 1]. \end{aligned}$$

(4, 13, 13)-ի հիման վրա

$$1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{h^2}{ar},$$

Այսպիսով

$$v^2 = \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{2h^2}{ar} + \varepsilon^2 - 1 \right]$$

և ըստ (4, 13, 14)-ի

$$v^2 - 2\frac{a}{r} = \frac{a^2}{h^2} (\varepsilon^2 - 1) = \gamma, \quad (4, 13, 15)$$

Այժմ ունենք

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \gamma \frac{h^2}{a^2}} \quad (4, 13, 16)$$

(4, 13, 14)-ում v_0^2 և r_0 կարող են ունենալ ցանկացած դրական արժեքներ, այնպես որ γ -ն կարող է լինել և դրական և բացասական:

Արդ նկատի ունենալով, տեսնում ենք (4, 13, 16)-ից, որ՝

$$\gamma < 0, \quad \varepsilon < 1,$$

$$\gamma = 0, \quad \varepsilon = 1,$$

$$\gamma > 0, \quad \varepsilon > 1,$$

γ -ի արժեքը որոշվում է $\overline{\psi}_0$ -ի և $\overline{r}_0$ -ի արժեքներով և անկախ է $\overline{\psi}_0$ -ի և $\overline{r}_0$ -ի ուղղութիւններից. (4, 13, 16)-ը ցույց է տալիս, որ α -ի արժեքը նույնպէս կախում ունի միայն $\overline{\psi}_0$ -ի և $\overline{r}_0$ -ի չափերից, և ոչ թէ նրանց ուղղութիւններից:

6°. Ենթադրենք $\gamma < 0$, $\varepsilon < 1$, ուստի կետի հետադիմը էլիպս է. կանգ առնենք այդ դեպքի վրա:

(4, 13, 13)-ից կարելի է ստանալ կետի ամենամեծ և ամենափոքր հեռավորութիւնները արագացման կենտրոնից (որը միաժամանակ էլիպսի ֆոկուսն է), այսինքն

$$r_{\min} = \frac{h^2}{a(1+\varepsilon)}, \quad \cos \varphi = 1, \quad \varphi = 0,$$

$$r_{\max} = \frac{h^2}{a(1-\varepsilon)}, \quad \cos \varphi = -1, \quad \varphi = \pi:$$

Հետևապէս մեծ կիսաառնցքի երկարութիւնը

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{h^2}{a(1-\varepsilon^2)} \quad (4, 13, 17)$$

կամ, ըստ (4, 13, 15)-ի

$$a = -\frac{a}{\gamma} \quad (4, 13, 17')$$

(a -ն, իհարկե, դրական է, քանի որ $\gamma < 0$):

(4, 13, 17')-ը նշանակում է, որ մեծ կիսաառնցքի երկարութիւնը ուղիղ համեմատական է արագացման (4, 13, 1) արտահայտութիւն մեջ մասնակցող a դորժակցին և բացի այդ կախում ունի սկզբնական արագութիւն և սկզբնական շառավիղ-օկիատրի չափերից, անս (4, 13, 14):

Ինչպէս հաշուել է էլիպսի փոքր կիսաառնցքի երկարութիւնը (b) որոշվում է

$$b^2 = a^2(1-\varepsilon^2).$$

առնչութիւնից և (4, 13, 17') տալիս է

$$b^2 = \frac{a^2}{\gamma^2} (1-\varepsilon^2). \quad (4, 13, 18)$$

Ինչ կախում ունի ոչ միայն a , r_0 , ψ_0 -ից, այլ նաև սկզբնական ($\overline{r}_0$, $\overline{\psi}_0$) անկումներից. պարզապէս այն է, որ ըստ (4, 13, 16)-ի α -նը արտահայտվում է h -ի միջոցով, իսկ

$$h = r_0 v_0 |\sin(\bar{r}_0, \bar{v}_0)|;$$

7°. Ստացված առնչությունները թույլ են տալիս կապ հաստատել էլիպսի մեծ կիսաառանցքի երկարության և կետի լրիվ պտույտի T պարբերության միջև: T -ն սրբշվում է ալսպես. էլիպսի մակերեսը հավասար է πab (a , b -կիսաառանցքների երկարություններն են). սեկտորիալ արագության չափն է $\frac{h}{2} = \text{const}$: Հետևապես, մամանակամիջոցը, որում կատարվում է լրիվ պտույտը էլիպսով՝

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h}.$$

ալսակից

$$h^2 T^2 = 4\pi^2 a^2 b^2,$$

իսկ (4, 13, 18)-ից՝

$$a^2 b^2 = a^4 (1 - e^2)$$

կամ համաձայն (4, 13, 17)-ի

$$a^2 b^2 = \frac{a^3 h^2}{\alpha},$$

Վերջնականապես

$$h^2 T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3 h^2}{\alpha},$$

$$a^3 : T^2 = \frac{\alpha}{4\pi^2}, \quad (4, 13, 19)$$

[4—Q] էլիպսի մեծ կիսաառանցքի խորանարդի հարաբերությունը լրիվ պտույտի պարբերության քառակուսուն ուղիղ համեմատական է արագացման արտահայտության մեջ մասնակցող α գործակցին:

§ 4, 14. Կեպլերի օրենքները

1. Կենտրոնական շարժման բոլոր տեսակներից ամենամեծ հետաքրքրություն ներկայացնում է այն, որում արագացումը ըստ չափի հակադարձ համեմատական է շառավիղ-վեկտորի քառակուսուն և ուղղված է դեպի կենտրոն: Իսկապես այդ օրենքն է զեկավարում երկնային մարմինների (մոլորակների, արհեստական արբանյակների) շարժումները:

Սահմանափակվենք մոլորակներով: Մանրակրկիտ ուսումնասիրելով Տիտոս գե-Բրահեի կողմից կուտակված գիտությունների

ները, Կեպլերը՝ հրապարակեց մոլորակների շարժումները նկարագրող երեք օրենքները (առաջին երկուսը 1609, երրորդը 1619 թվականներին)։

Այդ օրենքներում Արևը և մոլորակները դիտարկվում են որպես կետեր։

Կեպլերի օրենքները.

1. Բոլոր մոլորակները շարժվում են էլիպսներով, որոնց ֆոկուսներից մեկում գտնվում է Արևը։

2. Յուրաքանչյուր մոլորակի շառավիղ-վեկտորը հավասար ժամանակամիջոցներում գծում է հավասար մակերևույթներ։

3. Էլիպսի մեծ կիսաառանցքի խորանարդի և մոլորակի լրիվ պտույտի պարբերություն քառակուսու հարաբերությունը նույնն է բոլոր մոլորակների համար։

Եթե նշենք մոլորակները 1, 2 ինդեքսներով, Կեպլերի երրորդ օրենքը կարտահայտվի այսպես՝

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \dots, \quad (4, 14, 1)$$

իսկ (4, 1, 19)-ից հետևում է, որ

$$\frac{a_1^3}{a_1 T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_2 T_2^2} = \dots = \frac{1}{4\pi^2} \quad (4, 14, 1')$$

Այսպիսով (4, 13, 19) կլինի համարժեք (4, 14, 1)-ին միայն, եթե

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots \quad (4, 14, 2)$$

այսինքն եթե a գործակիցը լինի նույնը բոլոր մոլորակների համար (4, 14, 2)-ը անմիջապես բխում է Նյուտոնի տիեզերական ձգողականության օրենքից։

Նախորդ պարագրաֆում ցույց է տրված, որ այն շարժումը, որում արագացումը

$$\overline{w} = -\frac{a}{r^2} \hat{r} \quad (4, 13, 1)$$

բախարարում է Կեպլերի 1 և 2 օրենքներին։

Այժմ հետաքրքիր է վարվել հակառակ ձևով՝ ցույց տալ, որ Կեպլերի օրենքներին համապատասխանող շարժումը կարող է տեղի ունենալ, երբ արագացումը (4, 13, 1)-ն է։

Այլ կերպ տեսած, § 4, 13-ում ելնելով արագացումից մենք որոշել ենք շարժումը. այստեղ ընդհանրացնելով, թունենալով շարժումը՝ պետք է որոշենք արագացումը:

Համաձայն Կեպլերի երկրորդ օրենքի, սեկտորիալ արագությունը հաստատուն է. իսկ § 4, 5-ում ցույց է տրված, որ այդ հնարավոր է միայն, եթե շարժումը կենտրոնական լինի

$$\ddot{\omega} = \pm \omega \dot{r} \quad (4, 14, 3)$$

Ըստ Կեպլերի առաջին օրենքի հետադիմը էլիպս է և նրա ֆոկուսներից մեկում գտնվում է արագացման կենտրոնը:

Դիցուք շառավիղ-վեկտորի սկիզբը էլիպսի ֆոկուսներից մեկում է, այդ դեպքում, ըստ (4, 13, 10)-ի էլիպսի հավասարումն է

$$\bar{r} \cdot (\dot{r} + \bar{z}) = \frac{\hbar^2}{\alpha} \quad \text{կամ} \quad \dot{r} \cdot (\dot{r} + \bar{z}) = \frac{\hbar^2}{r\alpha} = \frac{l}{r}, \quad (4, 14, 4)$$

եթե $\frac{\hbar^2}{\alpha}$ անփոփոխելի է:

Ի և α հաստատուններն ունեն որոշակի իմաստներ: Կամենալով ապահովել ստացվելիք արդյունքների լիակատար ընդհանրությունը, պետք է լ-ը դիտել որպես մի հաստատուն, որի իմաստը դեռ հայտնի չէ: Այսպիսով, Կեպլերի երկրորդ օրենքին բավարարող շարժման դեպքում (4, 14, 3) և (4, 14, 4) տալիս են

$$\ddot{\omega} \cdot (\dot{r} + \bar{z}) = \pm \ddot{\omega} \cdot \dot{r} + \bar{z} = \pm \frac{\omega \dot{r}}{r}. \quad (4, 14, 5)$$

(4, 14, 5)-ի աջ մասին կարելի է հանդել նաև ածանցելով ըստ t -ի (4, 14, 4)-ը:

Նկատի առնելով, որ

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega}, \quad \bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = 0,$$

կատանանք

$$\bar{\omega} \cdot (\dot{r} + \bar{z}) = 0:$$

Երկրորդ ածանցումը տալիս է $\left(\text{քանի որ } \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \ddot{\omega}, \text{ և } \bar{z} = \text{const} \right)$

$$\ddot{\omega} \cdot (\dot{r} + \bar{z}) + \bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = 0 \quad (4, 14, 6)$$

Օգտվելով (2, 9, 4) և (2, 9, 5)-ից, սենենք

$$\bar{\psi} = \dot{r} \dot{r} + p r \dot{\varphi}, \quad \frac{dr}{dt} = \dot{p} \dot{\varphi}, \quad \dot{p} \cdot \dot{r} = 0$$

և արտադրելով

$$\bar{\psi} \cdot \frac{dr}{dt} = r \dot{\varphi}^2,$$

Մյուս կողմից լուրջքանչյուր կենտրոնական շարժման դեպքում, ահա (4, 13, 2)

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = h, \quad \dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}, \quad r \dot{\varphi}^2 = \frac{h^2}{r^3}$$

և

$$\bar{\psi} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{h^2}{r^2}$$

կամ (4, 14, 6)-ի հիման վրա

$$\bar{\psi} \cdot (\dot{r} + \bar{z}) = -\frac{h^2}{r^2}, \quad (4, 14, 7)$$

(4, 14, 5)-ը համեմատելով (4, 14, 7)-ի հետ, ստանում ենք

$$\pm \frac{\omega l}{r} = -\frac{h^2}{r^3},$$

$$\pm \omega = -\frac{h^2}{r^2 l}$$

և որովհետեւ $\omega > 0$, որպես արագացման չափ, ապա համարելով $l > 0$, ստանում ենք

$$\omega = +\frac{\alpha}{r^2} \dot{r}, \quad \alpha = \frac{h^2}{l} > 0, \quad \bar{\omega} = -\omega \dot{r}.$$

Եթե

$$l < 0, \quad \text{ապա } \omega = \frac{\alpha'}{r^2} \dot{r}, \quad \alpha' = \frac{h^2}{l} < 0:$$

Ստացած արդյունքը ցույց է տալիս, որ կեպլերի երկու առաջին օրենքներին համապատասխանող շարժումը ֆորմալ է տեղի ունենալ միայն, երբ արագացումը հակադարձ համեմատական է շառավիղ-վեկտորի քառակուսուն ու ուղղված է դեպի շառավիղ-վեկտորի սկիզբը:

Խնդիր 5-ը: Ստորև բերված չորս խնդիրները վերաբերում են այն կենտրոնական շարժումներին, երբ կետի արագացումն է՝

$$\vec{w} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{r}, \quad (4, 13, 1)$$

Խնդիր 1: Յույց տալ, որ կենտրոնական (4, 13, 1) շարժման դեպքում կետի արագության հոդոգրաֆը շրջանաղիծ է:

Խնդիր 2: Յույց տալ, որ երբ կետի (4, 13, 1) կենտրոնական շարժման հետադիմը էլիպս է, արագությանը կարելի է վերլուծել հաստատուն չափեր ունեցող երկու բաղադրիչներին, որոնցից մեկը ուղղահայաց է՝ մեծ կիսաառնցքին, մյուսը՝ շառավիղ-վեկտորին:

Խնդիր 3: Յույց տալ, որ երբ կետի (4, 13, 1) կենտրոնական շարժման հետադիմը պարարտ է, արագության պրոեկցիան պարարտի առանցքին ուղղահայաց ուղղության վրա հակադարձ համեմատական է շառավիղ-վեկտորի չափին:

Խնդիր 4: Անվանելով v_r և v_a (4, 13, 1)-ին ենթակա կենտրոնական էլիպսական շարժման արագության պրոեկցիաները շառավիղ-վեկտորի և մեծ կիսաառնցքի վրա, ապացուցել, որ

$$\left| \frac{v_r}{v_a} \right| = \varepsilon \text{ որտեղ } \varepsilon\text{-ը էքսցենտրիսիտետն է:}$$

Խնդիրները լուծելու համար նպատակահարմար է կիրառել (4, 13, 8) բանաձևը:

Առաջին խնդիր: $\vec{h}$ -ը վեկտորապես բազմապատկենք (4, 13, 8)-ի երկու մասերով՝

$$\vec{h} \times (\vec{v} \times \vec{h}) = \alpha \vec{h} \times (\vec{r} + \vec{z}).$$

Շնորհիվ $\vec{h}$ և $\vec{h}$ -ի ուղղահայացությունը $\vec{v}$ -ին

$$\vec{h} \times (\vec{v} \times \vec{h}) = \vec{v} \vec{h}:$$

Ըստ (4, 13, 3)-ի $\vec{h} \times \vec{r} = \vec{p}$,

իսկ քանի որ $\vec{z}$ զուգահեռ է էլիպսի մեծ առանցքին $\vec{h} \times \vec{z}$ -ը ուղղահայաց է այդ առանցքին և հաստատուն ըստ չափի:

Այսպիսով

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{h} \vec{p} + \frac{\alpha}{h} \vec{h} \times \vec{z},$$

ընդ որում, աջ մասի դումարելիներն չափերը հաստատուն են, իսկ ուղղութիւնները՝ առաջին դումարելին ուղղահայաց է շառավիղ-վեկտորին, իսկ երկրորդը՝ մեծ կիսառանցքին: Հետևապէս, $\overline{\psi}$ -ի հոդոգրաֆը շրջանագիծ է:

Երկրորդ խնդիր: Այս խնդիրը համընկնում է առաջին խնդրի հետ: Իսկապէս համաձայն (4, 14, 8)-ի արագութիւնը վերլուծված է հենց ալիպիսի բաղադրիչներին, ինչպիսիք պահանջվում են այդ խնդրում:

Երրորդ խնդիր: Երբ կետի (4, 13, 1) կենտրոնական շարժման հետագիծը պարաբոլ է, ապա ա) էքսցենտրիսիտետը հալոսար է մեկի, ալիինքն $\varepsilon = \overset{\cdot}{\varepsilon}$, բ) $\overset{\cdot}{\varepsilon}$ -ն դասավորված է պարաբոլի առանցքի վրա. գ) քանի որ $\overset{\cdot}{h}$ -ը ուղղահայաց է պարաբոլի հարթութիւնը, $\overset{\cdot}{h} \times \overset{\cdot}{\varepsilon}$ միավոր-վեկտորը դուրսն է պարաբոլի հարթութիւնը և ուղղահայաց նրա առանցքին:

Այսպիսով $\overline{\psi} \cdot (\overset{\cdot}{h} \times \overset{\cdot}{\varepsilon})$ արագութիւնն պրոեկցիան է պարաբոլի առանցքին ուղղահայաց ուղղութիւնն վրա:

Այստեղ կողմից

$$\overline{\psi} \cdot (\overset{\cdot}{h} \times \overset{\cdot}{\varepsilon}) = (\overline{\psi} \times \overset{\cdot}{h}) \cdot \overset{\cdot}{\varepsilon}$$

և ըստ (4, 13, 8)-ի

$$\overline{\psi} \cdot (\overset{\cdot}{h} \times \overset{\cdot}{\varepsilon}) = \frac{\alpha}{h} (r + \varepsilon) \cdot \overset{\cdot}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{h} (r \cdot \overset{\cdot}{\varepsilon} + 1),$$

իսկ ըստ (4, 13, 12)-ի (որտեղ տվյալ դեպքում $\overline{\varepsilon} = \overset{\cdot}{\varepsilon}$),

$$\overline{\psi} \cdot (\overset{\cdot}{h} \times \overset{\cdot}{\varepsilon}) = \frac{\alpha}{h} \frac{h^2}{ar} = \frac{h}{r},$$

ալիինքն արագութիւնն պրոեկցիան պարաբոլի առանցքին ուղղահայաց ուղղութիւնն վրա հակադարձ համեմատական է շառավիղ-վեկտորին:

ԿԱՐՄԻ ՄԱՐՄՆԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՇԱՐԺՈՒՄՆԵՐԸ

§ 5. 1. Համընթաց շարժում

Այն շարժումը, որում մարմնի բոլոր կետերի տեղափոխումները որպես վեկտորներ իրար հավասար են, կոչվում է համընթաց։ Այս սահմանումից անմիջապես բխում է, որ

[5—A] համընթաց շարժման դեպքում մարմնի

ա) Բոլոր կետերի արագությունները վեկտորապես իրար հավասար են.

բ) Բոլոր կետերի արագացումները վեկտորապես իրար հավասար են.

գ) Յուրաքանչյուր ուղղագիծ հատված, որ կազմված է մարմնի կետերով միշտ մնում է իրեն զուգահեռ.

դ) Բոլոր կետերի հեռագծերը նույն համատեղելի գծերն են։

Ա, Բ, Գ, Դ հատկություններն ապացուցելու համար, անկասկածաբար կետերից մեկի տեղափոխումը $\Delta \vec{r}$, $\Delta \vec{v}$ -ը նույնն է — ըստ սահմանումի, մարմնի բոլոր կետերի համար. հետևապես

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \quad \text{և} \quad \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

նույնպես նույնն են բոլոր կետերի համար։

Այսպիսով ա, Բ կետերը ապացուցված են։

Դիցուք O -ն կարծր մարմնի $A, B, C, \dots$ կետերի շտապիղջ վեկտորների ընդհանուր սկիզբն է.

$$\vec{r}_A = \vec{OA}, \quad \vec{r}_B = \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{r}_A + \vec{AB}.$$

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_A + \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

և քանի որ $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, ապա $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$:

Երբ շարժումը համընթաց է, $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots$, այսինքն $A, B, C, \dots$ կետերի արագությունները չեն կարող տարբերվել մյուս կետերի արագություններից, այնպես որ $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$ միայն

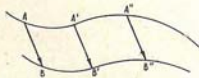
կարող է նշանակել, որ մարմնի $\vec{AB}$ հատվածը շարժվելով մնում է անփոփոխ ըստ չափի (այս բխում է կարծր մարմնի սահմանումից) և ըստ ուղղության, այսինքն համընթաց շարժման դեպքում մարմնի բոլոր զիրքերում $\vec{AB}$ հատվածը մնում է ինքն իրեն համապատասխան և որովհետև $\vec{AB}$ հատվածը միանգամայն կամայական է, այստեղից հետևում է զ հասկոթյունը:

Վերջապես

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$$

հավասարությունից, որում $\vec{AB} = \text{const}$, եզրակացնում ենք, որ $\vec{r}_A$ և $\vec{r}_B$ վեկտորների հոդոգրաֆները, այսինքն A և B կետերի հետադները նույն գծերն են, միայն այդ գծերը չեն համընկնում, մեկի $A, A', A'', \dots$ կետերին համապատասխանում է մյուսի $B, B', B'', \dots$ կետերը, և

$$\vec{AB} = \vec{A'B'} = \vec{A''B''} \dots$$



Նկ. 5—1,

(Նկ. 5—1): Այս էլ զ հասկոթյունն է:

Առածից պարզ է, որ համընթաց շարժում կատարող մարմնի բոլոր կետերի շարժումները որոշվում են կետերից մեկի շարժումով:

Պատկերացնենք մի անշարժ կոորդինատային սխեմա $Oxyz$, մարմնի մեջ վերցնենք պնդյախ B_0, B_1, B_2, B_3 կետեր, որ t մոմենտում (Նկ. 5—2)

$$B_0B_1 \parallel Ox, \quad B_0B_2 \parallel Oy, \quad B_0B_3 \parallel Oz:$$

Եթե մարմնի շարժումը համընթաց է մարմնի բոլոր զիրքերում նշված դուգահեռությունը պետք է անդի ունենա:

2°. Համընթաց շարժումը կարելի է սահմանել որպես այն շարժումը, որի դեպքում կարծր մարմնի յուրաքանչյուր հատված մնում է ինքն իրեն դուգահեռ:

Վերցնենք կարծր մարմնի A և B կամայական կետերը, որոնց շառավիղ-վեկտորներն են $\vec{r}_A$ և $\vec{r}_B$, ու գիտենք $\overline{AB}$ վեկտորը՝

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB},$$

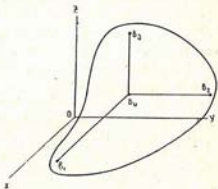
Համընթաց շարժման նոր բերված սահմանումից և կարծր մարմնի սահմանումից բխում է, որ $\overline{AB} = \text{const}$:

Ուստի

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt},$$

այսինքն՝ $\vec{v}_B = \vec{v}_A$:

Քանի որ A և B կետերը միանգամայն կամայական են, ստացված արդյունքը համընկնում է $[\vec{v} = \vec{A}]$ -ա հատկությամբ հետ:



Նկ. 5—2:

§ 5. 2. Պատճառ անհարժ առանցքի շուրջը

1°. Երկու անշարժ կետեր ունեցող կարծր մարմնի շարժումը կոչվում է պտտում:

Այդ անշարժ կետերով անցնող OH ուղիղը (Նկ. 5—3) անվանում են պտտման առանցք, սովորաբար ասում են՝ մարմինը պտտվում է OH ուղղի (OH առանցքի) շուրջը: Ակնհայտ է, որ այն անփոփոխելի ուղիղը, որի երկու կետերը անշարժ են, ինքն էլ անշարժ կլինի:

Որպես շառավիղ-վեկտորների սկիզբ ընտրենք պտտման առանցքի կետերից որևէ մեկը, օրինակ O , և դիտարկենք պտտվող կարծր մարմնի կամայական B կետը: Քանի որ կարծր մարմնի երկու հատվածներով կազմված անկյունը անփոփոխելի է $\angle HOB$ անկյունն էլ (որ կազմված է OH և OB հատվածներով) պետք է հաստատուն լինի: Այստեղից հետևում է, որ պտտման դեպքում OB շառավիղ-վեկտորը դժուար է ուղիղ շրջանային կոնի կողմնալին մոտեցնելով: Կոնի առանցք հանդիսանում է պտտման OH առանցքը, իսկ կոնի հիմքի շրջանագիծը, որի շառավիղը

$$p = OB \sin HOB$$

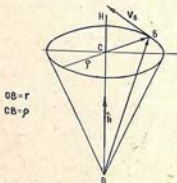
B կետի հետադիմն է:

Այդ շրջանագծի հարթությունը ուղղահայաց է OH առանցքին, իսկ կենտրոնը գտնվում է OH -ի վրա:

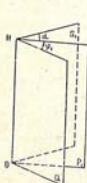
Ասածը վերաբերում է պտտվող մարմնի բոլոր կետերին բացի առանցքի կետերից, որոնք անշարժ են: Նկատի առնելով նաև այն, որ արագության ուղղությունը միշտ համընկնում է հետագծի շոշափողի ուղղության հետ, կարող ենք ասել՝

[5— B] Պտտման առանցքի կետերի արագությունները զրո են, իսկ պտտվող մարմնի բոլոր մյուս կետերի արագությունները ուղղահայաց են առանցքին (և ճևառապես կոպլանար են):

2°. Դիցուք (նկ. 5—4ա, բ) Q և P -ն պտտման առանցքով անցնող երկու հարթություններ են. Q պտտվանում է անշարժ



Նկ. 5—3:



Նկ. 5—4ա:



Նկ. 5—4բ:

տարածությունը և նրա դիրքը անփոփոխ է, P -ն պտտվանում է պտտվող կարծր մարմնին և պտտվում է նրա հետ: Պտտման հետևանքով Q -ով և P -ով կազմված երկնիստ անկյունը փոփոխվում է. եթե t_1 ժամկետում այդ անկյունը հավասար է φ_1 , իսկ t_2 ժամկետում դառնում է φ_2 , ապա $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ անը կոչվում է պտտման անկյուն $t_2 - t_1$ ժամանակամիջոցում:

Պատկերացնենք պտտման առանցքով անցնող և մարմնին պտտվանող մի (S) հարթություն ևս: Անվանենք P -ով և S -ով կազմված երկնիստ անկյունը α :

Եթե մարմնի 1 և 2 դիրքերին համապատասխանում են S_1 , P_1 հարթությունների S_2 , P_2 դիրքերը, ապա (նկ. 5—4ա, բ)

$$\angle(S_1, P_1) = \angle(S_2, P_2) = \alpha \text{ ալդ պատճառով } \angle(S_1, S_2) = \angle(P_1, P_2);$$

Պատման առանցքով անցնող և կարծր մարմնին պատկանող բոլոր հարթությունները պատվում են միևնույն անկյամբ, որը և կոչվում է պատման անկյուն:

Ինչպես հայտնի է երկնիստ անկյունը չափվում է այն դժարին անկյունով, որի կողմերը ուղղահայաց են երկնիստ անկյան կողմին: Այստեղից պարզ է, որ պատման առանցքին ուղղահայաց բոլոր ուղիղները պատվում են միևնույն անկյունով, որը հավասար է պատման անկյանը:

Անցնենք կարծր մարմնի այն I հատվածներին, որոնք ուղղահայաց չեն պատման առանցքին և այն T հարթություններին, որոնք զուգահեռ չեն ալդ առանցքին:

Դիցուք մարմնի պատման հետևանքով I հատվածը l_1 դիրքից անցնում է l_2 դիրքը, իսկ T հարթությունը T_1 դիրքից — T_2 դիրքը:

Յույց տանք, որ

$$\left. \begin{aligned} \angle(l_1, l_2) & \text{ փոքր է պատման անկյունից} \\ \angle(T_1, T_2) & \text{ փոքր է պատման անկյունից} \end{aligned} \right\} \quad (5, 2, 1)$$

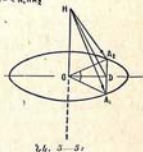
Համոզվելու համար դիտարկենք OHA եռանկյունը, որում OH -ը պատման առանցքի հատվածն է, $OA \perp DH$, իսկ $\overline{HA} = \overline{l}$ (նկ. 5—5): Պատման հետևանքով OHA_1 $\varphi < A_1OA_2$ եռանկյունը կդրավի OHA_2 դիրքը, ընդ որում $\angle A_1OA_2$ պատման φ անկյունն է, իսկ $\angle A_1HA_2 = \angle(l_1, l_2)$. անվանենք այս անկյունը ψ : Նկ. 5—5-ից տեսնում ենք, որ

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{A_1D}{A_1H}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{A_1D}{OA_1},$$

Բանի որ

$$A_1H > OA_1, \quad \sin \frac{\psi}{2} < \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \psi < \varphi$$

Այսպիսով $\angle(l_1, l_2)$ փոքր է պատման անկյունից.



Նկ. 5—5:

Դիցուք $HA_1 = l_1$ և $HA_2 = l_2$ հանդիսանում են T_1 , T_2 հարթությունների նորմալները, այդ դեպքում $\angle(T_1, T_2) = \angle(l_1, l_2) < \varphi$:

Այսպիսով (5, 2, 1) դրույթները ապացուցված են:

§ 5. 3. Կարծր մարմնի զիւրքը որոշող անկախ մեծությունների բիվը

1°. Ազատ կարծր մարմնի զիւրքը որոշվում է նրա երեք, մի ուղղի վրա չզանգվող (A , B , C) կետերի դիրքերով:

Իրանում համադրելու համար բաժանան է նկատի առնել, որ ալգպիտի երեք կետերի դիրքերով միարժեք որոշվում է մարմնի լուրջաքանչյուր չորրորդ կետի դիրքը:

Իրոք, վերցնենք երկու կետեր D , D' , որոնք սիմետրիկ են ABC հարթության նկատմամբ: Եթե D -ից նախդի համար $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ կետերի շրջանցումը կատարվում է ժամսլացի ուղղությամբ, ապա D' -ից զիտուղի համար նույն շրջանցումը կկատարվի ժամսլացի հակառակ ուղղությամբ: Հետևապես ալգպիտի երկու կետերը չի կարելի չփոխել միմյանց հետ:

Ուստի, երբ տված են A , B , C կետերը, լուրջաքանչյուր չորրորդ կետի դիրքը որոշվում է միարժեք:

2°. Սակայն ալգ երեք կետերի 3 կոորդինատները կապված են երեք պայմաններով՝

$$AB = \text{const}, \quad BC = \text{const}, \quad CA = \text{const},$$

արտիքն

$$\left. \begin{aligned} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 &= (AB)^2 = \text{const} \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 &= (BC)^2 = \text{const} \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 &= (AC)^2 = \text{const}, \end{aligned} \right\} (5, 3, 1)$$

չնորհիվ (5, 3, 1) երեք առնչությունների դալություն ինը, կոորդինատներից անկախ կարող են լինել միայն վեցը:

3°. Դիտարկելով անշարժ առանցքի շուրջը պատվող կարծր մարմինը, կտրելի է համարել, որ նրա զիւրքը որոշող երեք կետերից երկուսը դնվում են ալգ առանցքի վրա:

Այստեղից եզրակացնում ենք, որ ալգպիտի մարմնի զիւրքը որոշվում է պատման առանցքով և առանցքին չպատկանող մի կետով, այսինքն այն P հարթությամբ, որն անցնում է առանցքով և ալգ կետով:

§ 5. 4. Պատկերումքի կետի արագությունը

1°. Նկ. 5-3-ում OH -ը պատման առանցքն է, O -ն շառավիղ-վեկտորների սկիզբը.

$\overline{OB} = \bar{r}$ շարժվող B -կետի շառավիղ-վեկտորն է.

$CB = \varphi$ B կետի հետագիծ հանդիսացող շրջանագծի շառավիղն է.

$\overline{CB} = \bar{\rho}$ B -ի հետաձուլությունը պատման առանցքից:

$$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB}, \quad \bar{r} = \overline{OC} + \bar{\rho} \quad (5, 4, 1)$$

$$\hat{h} \parallel OH, \quad \hat{h} \parallel OC:$$

Այդ պատճառով

$$\hat{h} \times \bar{r} = \hat{h} \times (\overline{OC} + \bar{\rho}) = \hat{h} \times \bar{\rho} \quad (5, 4, 2)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Համաձայն } [\bar{\rho} - B]\text{-ի } \bar{v}_B \perp OH, \quad \bar{v}_B \perp \hat{h} \\ &\text{Նկարից պարզ է, որ } \bar{v}_B \perp \bar{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (5, 4, 3)$$

$$\text{հետևապես } \bar{v}_B \perp OHB \text{ հարթությունը:} \quad (5, 4, 4)$$

2°. $\bar{v}_B$ -ի արտահայտությունը գտնելու համար վարվենք ախպես:

Տանենք OH -ով անշարժ OHB_0 հարթությունը (նկ. 5-6): Երկնիստ անկյունը, որ կազմում են OHB_0 և OHB հարթությունները անվանենք φ . φ -ն չափվում է B_0CB դժային անկյունով՝

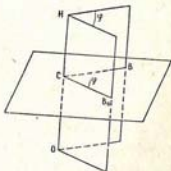
$$\varphi = \angle B_0CB:$$

Նկատի առնելով, որ $\overline{OC} = \text{const}$, գրենք (5, 4, 1)-ի հիման վրա

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}}{dt} \quad (5, 4, 5)$$

$\bar{\rho}$ վեկտորը միշտ մնում է OH -ին ուղղահայաց BCB_0 հարթության

վրա, իսկ $\rho = \text{const}$. հետևապես Վեարկելի է կիրառել (1, 5, 11) առնչությունը



Նկ. 5-6:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d\bar{p}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \hbar \times \bar{p} \frac{d\varphi}{dt} = \hbar \times \bar{r} \frac{d\varphi}{dt} \quad (5, 4, 6)$$

ըստ (5, 4, 2)-ի:

Ինչպես առավժ է $[4-F]$ -ում անսահման փոքր անկյունները կարելի է դիտել որպես վեկտորներ, այդ դեպքում $|d\varphi|$ կլինի պատման անսահման փոքր անկյան չափը, իսկ $\hbar d\varphi$ —նույն անկյունը որպես վեկտոր: $\hbar \frac{d\varphi}{dt}$ վեկտորը կոչվում է անկյունային արագություն և նշանակվում է $\bar{\omega}$ տառով

$$\bar{\omega} = \hbar \frac{d\varphi}{dt} = \hbar \dot{\varphi} \quad (5, 4, 7)$$

Այսպիսով, համաձայն (5, 4, 5)–(5, 4, 7)-ի պատվոդ կարծր մարմնի կամայական B կետի արագությունը՝

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{p}, \\ \bar{r} &= \overline{OB}, \quad \bar{p} = \overline{CB}, \end{aligned} \right\} \quad (5, 4, 8)$$

որտեղ O -ն պատման առանցքի կետերից մեկն է:

(5, 4, 7)-ից հետևում է, որ $\bar{\omega} \parallel \hbar \parallel OH$, այսինքն $\bar{\omega}$ դուրս-հեռ է պատման առանցքին: Նպատակահարմար է ընդունել, որ $\bar{\omega}$ վեկտորը դասավորված է պատման առանցքի վրա, ընդ որում որպես $\bar{\omega}$ -ի սկիզբ կարելի է ընդունել առանցքի որևէ կետը: Ասածից հետևում է, որ $\bar{\omega}$ -ն «սահող» վեկտոր է:

Հարկավոր է նկատի առնել, որ $\angle(\bar{\omega}, \bar{r})$ հաստատուն անկյուն է, որի արժեքը կարող է փոխվել O -ից մինչև π սահմաններում:

$(\bar{\omega}, \bar{p})$ անկյունը ողիղ է:

Այս է պատճառը, որ $\bar{\omega}$, $\bar{p}$, $\bar{v}$ վեկտորները փոխադարձաբար ուղղահայաց են. $\bar{\omega}$ -ի ուղղվածությունը միշտ կարելի է այնպես ընտրել, որ $\bar{\omega}$, $\bar{p}$, $\bar{v}$ -ն կազմեն աջ ձևերի եռյակ, այսինքն՝

$$\bar{\omega} \times \bar{p} \parallel \bar{v}, \quad \bar{p} \times \bar{v} \parallel \bar{\omega}, \quad \bar{v} \times \bar{\omega} \parallel \bar{p} \quad (5, 4, 9)$$

(5, 4, 8)-ի հիման վրա ստանում ենք արագության չափը

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega r |\sin(\bar{\omega}, \bar{r})| = r |\dot{\varphi} \sin(\bar{\omega}, \bar{r})|, \\ v &= \omega \rho = |\dot{\varphi}| \rho; \end{aligned} \right\} \quad (5, 4, 10)$$

3°. Մեխանիկայում անկյունները չափվում են ռադիաններով և, արդ պատճառով, արտահայտվում են վերացական թվերով: Ինչպես հայտնի է շրջանագծի աղեղը $S = \rho \varphi$ կամ $\varphi = \frac{S}{\rho}$. ուստի որպես անկյան միավոր (մի ռադիան) ընդունվում է այն անկյունը, որի համար $\frac{S}{\rho}$ հարաբերությունը հավասար է 1, այսինքն աղեղի երկարությունը հավասար է շրջանագծի շառավղին: (Այստեղից պարզ է, որ 360° ունեցող անկյունը համապատասխանում է $\frac{2\pi\rho}{\rho} = 2\pi$ ռադիան. իսկ մի ռադիանը հավասար է $57^\circ, 17' 44,8''$: N լրիվ պտույտին համապատասխանում է $2\pi N$ ռադիան):

Պատման դեպքում φ անկյունը ժամանակի ընթացքում անընդհատ փոփոխվում է, այսինքն φ հանդիսանում է ժամանակի ֆունկցիա՝ $\varphi = \varphi(t)$:

Օրինակ

$$\begin{aligned} \varphi &= a + bt, & \varphi &= a + bt + ct^2, \\ \varphi &= a \cos kt, & \varphi &= a \cos(kt + \alpha) \end{aligned}$$

որտեղ a , b , c , k , α հաստատուն սկալարներ են:

Այսպեսով $\varphi = \varphi(t)$ ֆունկցիայով որոշվում է պտույտի մարմնի դիրքը որպես ժամանակի ֆունկցիա:

$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$ ֆունկցիան կոչվում է աստիճան հավասարում: Շատ կարևոր է $\varphi(t)$ -ի ածանցյալը ըստ ժամանակի՝

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

իսկապես ըստ (5, 4, 7)-ի

$$\bar{\omega} = \hbar \dot{\varphi}$$

4°. Այն բոլոր դեպքերում, երբ $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \text{const}$, ($\ddot{\varphi} = 0$),

պտտումը կոչվում է հավասարաչափ եթե $\dot{\varphi} = \text{const} > 0$, φ անկյունը անընդհատ աճում է ժամանակի ընթացքում:

Բացասական $\ddot{\varphi} = \text{const}$ դեպքում տեղի է ունենում հակառակը: Պատումը լինում է հալասարաչափ միայն, երբ $\varphi = \varphi(t)$ ֆունկցիան դժային է: Բոլոր այլ դեպքերում (երբ $\varphi = \varphi(t)$ ֆունկցիան դժային չէ, $\ddot{\varphi} \neq \text{const}$) պատումը կոչվում է անհալասարաչափ:

Օրինակ՝

1. $\ddot{\varphi} = a + bt + ct^2$ (a, b, c հաստատուններ են)
 $\ddot{\varphi} = b + 2ct \neq \text{const}$ ($\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2c = \text{const}$)
2. $\varphi = a \cos(kt + \alpha)$ (a, k, α հաստատուններ են)
 $\ddot{\varphi} = -ak \sin(kt + \alpha)$ [$\ddot{\varphi} = -ak^2 \cos(kt + \alpha)$]

Վերջին օրինակում պատման φ անկյունը աճում է, հասնում մաքսիմումի: Նվազում է, դառնում է բացասական, հասնում է մինիմումի, ապա անելով դառնում է դրական, հասնում մաքսիմումի և այլն:

Անհալասարաչափ շարժման ստորաբաժանումները տե՛ս § 5, 7, 1°:

«Հալասարաչափ և անհալասարաչափ պատում» անվանումները շաղկապված են «հալասարաչափ և անհալասարաչափ շարժում» անվանումների հետ: Իրոք, համաձայն (5, 4, 10)-ի պարտվող մարմնի կետի արագության չափը

$$v = \omega r = |\dot{\varphi}| r,$$

ընդ որում $\dot{\varphi} = \text{const}$: Ուստի եթե $\dot{\varphi} = \text{const}$ (հալասարաչափ պատում), նաև $v = \text{const}$ (կետի հալասարաչափ շարժում):

Իսկ եթե $\dot{\varphi} \neq \text{const}$, նաև $v \neq \text{const}$:

Խնդիր Շրջանային D սկալառակի կենտրոնը ամրացված է և հեռավորության վրա P հարթությունից (տես հետագայում եկող նկ. 7—22ա): D -ի M կետը սահում է P -ի վրա ($OM > R$). M -ի հետագիծը S շրջանագիծն է: Յուրյ առ, որ դիակի շարժումը պատռողական է և որոշել պատման առանցքը, գիտենալով M -ի $\overline{v}_M$ արագությունը, որոշել D -ի մյուս կետերի արագությունները:

§ 5. 5. Շաղկապյունների բաժանումը պազիվ մարմնում

1°. Տանենք պատման OH առանցքով մի P հարթության և դիտարկենք նրա $A, B, \dots$ կետերը, որոնց շառավիղ-վեկտորներն

ևն $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \dots$, իսկ հեռավորությունները առանցքից $\vec{\rho}_A, \vec{\rho}_B, \dots$ (Նկ. 5—7): Քանի որ $\vec{\omega}$ անկումային արագությունը դասավորված է OH -ի վրա, իսկ $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ գտնվում են P -ի վրա, A, B կետերի արագությունները՝

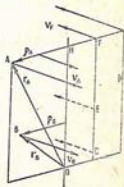
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_A, \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_B = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_B$$

ուղղահայաց են P -ին և հետևաբար զուգահեռ միմյանց:

Պարզ է, որ այդ արագությունները համազուգահեռ են, եթե A, B կետերը վերցված են OH առանցքի միևնույն կողմում: Արագությունները հակազուգահեռ են, եթե կետերը գտնվում են OH -ի տարբեր կողմերում:

Այսպիսով (Նկ. 5—7)՝

[5—C] Պատման առանցքը պարունակող հարույժյան բոլոր կետերի արագությունները զուգահեռ են միմյանց, իսկ նրանց չափերը ողիվ հոմանմանական են կետերի հեռավորություններին առանցքից: Այդ արագությունները համազուգահեռ են, եթե համազուգահեռ են կետերի հեռավորությունները առանցքից. հակառակ դեպքում արագությունները հակազուգահեռ են:



Նկ. 5—7:

Պատման առանցքը հատող լուրջքանչյուր ողիվ գտնվում է այդ առանցքը պարունակող մի հարթության վրա: Հետևապես այն, ինչ որ տնված է այդպիսի հարթությունների կետերի արագությունների մասին, լիովին վերաբերում է առանցքը հատող ողիի կետերի արագություններին:

2^o. Պատման առանցքին զուգահեռ ողիի բոլոր կետերի արագությունները իրար հավասար են:

Իսկապես, գիշյուք CEF ողիղը զուգահեռ է OH -ին (կամ $\vec{\omega}$ -ին, Նկ. 5—7):

$$\left. \begin{aligned} \text{Այժմ } \vec{\rho}_C = \vec{\rho}_E = \vec{\rho}_F, \text{ հետևապես } \vec{\omega} \times \vec{\rho}_C = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_E = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_F, \\ \text{արտիքն } \vec{v}_C = \vec{v}_E = \vec{v}_F \end{aligned} \right\} \quad (5, 5, 1)$$

3^o. Վերցնենք պատվող կարծի մարմնի կամայական B, C կետերը (Նկ. 5—8). կարող ենք գրել՝

$$\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{BC}$$

և

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_C = \vec{\omega} \times (\vec{r}_B + \vec{BC}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times \vec{BC}$$

կամ

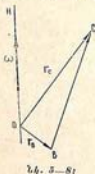
$$\vec{v}_C - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{BC} \quad (5, 5, 2)$$

ընդ որում

$$(\vec{\omega} \times \vec{BC}) \perp \vec{\omega}, \quad (\vec{\omega} \times \vec{BC}) \perp \vec{BC};$$

Արտեղից երկու եզրակացություններ.

[5—D] Պատվող կարծր մարմնի երկու կետերի, արագությունների տարբերությունը ուղղահայաց է կետերը միացնող ուղղին:



նկ. 5—8:

[5—E] Պատվող կարծր մարմնի երկու կետերի արագությունների տարբերությունը կախում չունի պտտման առանցքի դիրքից և հավասար է այն արագությանը, որ կունենար կետերից մեկը, եթե առանցքը անցներ մյուս կետով:

Եթե, օրինակ առանցքը անցներ B կետով, ապա $\vec{v}_C - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{BC}$ և միաժամանակ $\vec{v}_B = 0$, ախի՛նքն $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{BC}$:

Առանցքը C կետով անցնելու դեպքում $\vec{v}_C = 0$, ուստի կստանալինք $-\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{BC}$ կամ $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{CB}$: Անհրաժեշտ է նկատել, որ մաքուր փոխելով պտտման առանցքի դիրքը՝ միշտ ենթադրվում է, որ առանցքը մնում է ինքն իրեն զուգահեռ (քանի որ $\vec{\omega}$ -ն մնում է նույնը):

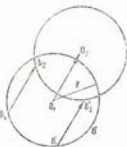
Մասնավոր դեպքում, երբ $\vec{BC} \parallel \vec{\omega}$ և $\vec{v}_C - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{BC} = 0$, ինչպես որ պետք է լինի համաձայն (5, 5, 1)-ի:

4°. Այժմ տեղին է համադրել համընթաց և պատողական շարժումները:

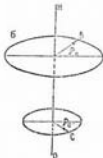
Դիցուք B կետի հետագիծը $\equiv$ շրջանագիծն է, որի կենտրոնն ու շառավիղն են O և R: Եթե մարմնի շարժումը համընթաց է, նրա բոլոր կետերի հետագծերը նույն R շառավիղ ունեցող շրջանագծեր են. արդ շրջանագծերի կենտրոնների դիրքերը որոշվում

են ալս կանոնով՝ կամայական B_1, B_2 կետերի շրջանագծերի O_1, O_2 կենտրոնների հեռավորությունը $\overline{O_1O_2} = \overline{B_1B_2}$ (նկ. 5—9):

Եթե մտաբերենք, որին պատկանում է B կետը, պատվում է անշարժ առանցքի շուրջը, ապա առանցքը ուղղահայաց է σ -ի հարթությանը, անցնում է O կետով, լուրջաքանչլուր կետի հեռադիմը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է պատման առանցքի վրա, իսկ շառավիղը համասար է դիտվող կետի հեռավորությունը առանցքից (նկ. 5—10):



Նկ. 5—9:



Նկ. 5—10:

Պատման դեպքում մարմնի կետերի արագությունները որոշվում են առանցքի դիրքով և օտով՝ ևլլը դիտենալու համար քափական է ունենալ երկու կետերի արագությունները, որոնք դուգահեռ չեն։ Իրոք դիցուք B_1, B_2 կետերի $\bar{v}_1$ և $\bar{v}_2$ արագությունները դողահեռ չեն։ Տանենք B_1 -ից $\bar{v}_1$ -ին ուղղահայաց P_1 հարթությունը, իսկ B_2 -ից — $\bar{v}_2$ -ին ուղղահայաց P_2 հարթությունը։ Համաձայն $[\bar{\omega} - C]$ -ի P_1 և P_2 հարթությունների համաման դիմը պատման առանցքն է։ B_1 -ի հեռավորությունը առանցքից նշանակենք $\bar{r}_1$.

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}_1$$

անալիզի պրոշվում է $\bar{\omega}$, իսկ $\bar{\omega}$ -ի ուղղվածությունը գտնելու համար կարելի է օգտվել այն բանից, որ $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{\omega}$ մեկտարները կադմում են աջ ձևաքի հսկակ։

Հարցի անալիզիական լուծումը ալտիսին է.

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{\omega} \times \bar{r}_2$$

և որովհետև

$$\bar{v}_2 \perp \bar{w}, \quad \bar{v}_2 \cdot \bar{w} = 0,$$

ապա

$$\bar{v}_2 \times \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \times (\bar{w} \times \bar{v}_1) = \bar{w} (\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1)$$

կամ

$$\bar{w} = \frac{\bar{v}_2 \times \bar{v}_1}{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1} \left(= \frac{\bar{v}_1 \times \bar{v}_2}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2} \right), \quad (5.5.3)$$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ արագությունների դադաճեությունը դեպքում (5.5.3)-ի աջ մասը զեր է անվում $\frac{0}{0}$ անորոշությունը (հալատարաբը դառնում է 0, քանի որ համաձայն [5—C]-ի $\bar{v}_2 \perp \bar{v}_1$): Այժմ § 5.5.1-ի վերջում առկա է հիման վրա, B_1, B_2 կետերով անցնող ուղիղը պետք է հատի պատման առանցքը մի (C) կետում, որը որոշվում է

$$CB_1 : CB_2 = v_1 : v_2 \quad (5.5.4)$$

հալատարությունից: Այսինքն, երբ $\bar{v}_2 \parallel \bar{v}_1$, հնարավոր է որոշել առանցքի միայն մի կետը: Եթե մի ուղիղի վրա չգտնվող երեք (B_1, B_2, B_3) կետերի արագություններն են իրար դադաճեա, ապա համաձայն [5—C]-ի $B_1 B_2 B_3$ հարթությունը պարունակում է պարաման առանցքը: Նրա մի կետը C-ն է, տե՛ս (5.5.4), իսկ երկրորդ D կետը գտնում ենք, զիտելով B_1, B_2 կետերը և նրանց արագությունները՝

$$DB_1 : DB_2 = v_1 : v_2$$

Ունենալով պատման առանցքի գիրքը, որոշում ենք $\bar{w}$ -ն: Ինչպես հայտնի է համընթաց շարժման դեպքում մի կետի արագությունը որոշվում են բոլոր կետերի արագությունները:

Բայց, որքան կետերի արագությունները պետք է իրար հավասար լինեն, որ իրավունք ունենանք շարժումը համարել համընթաց:

Դիցուք A և B կետերի արագությունները իրար հավասար են, ալլ կարող է տեղի ունենալ նաև այն դեպքում, երբ մարմինը պտտվում է AB-ին դադաճեա առանցքի շուրջը: Իսկ եթե հավասար արագություններ ունեն միևնույն ուղղին չպատկանող երեք (A, B, C) կետերը, ապա պտտումը բացառվում է, որովհետև առանցքը չի կարող դադաճեա լինել տարրեր (AB, AC) ուղիղների:

§ 5. 6. Արագությունների կախումը առանցքի դիրքից

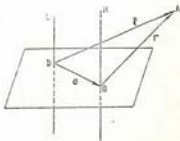
Այդ կախումը որոշելու համար պատկերացնենք երկու զուգահեռ առանցքներ OH և DL (նկ. 5—11) և ենթադրենք, որ միևնույն ω անկյունային արագությամբ մարմինը պտտվում է՝ մի անգամ OH առանցքի շուրջը, մյուս անգամ DL առանցքի շուրջը:

Երբայք OH -ի հետամտությունը DL -ից՝ $\overline{DO} = \vec{b}$: Ընտրենք մի կամայական A կետ, ընդունենք

$$\overline{OA} = \vec{r}, \quad \overline{DA} = \vec{l}:$$

և որոշենք A -ի արագությունը: Երբ OH -ն է պտտման առանցքը

$$\vec{v}_{A, O} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$



Նկ. 5—11.

իսկ DL առանցքի զեպքում $\vec{v}_{A, D} = \vec{\omega} \times \vec{l}$:
Հետևաբար

$$\vec{v}_{A, D} - \vec{v}_{A, O} = \vec{\omega} \times \vec{l} - \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{l} - \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{b}: \quad (5, 6, 1)$$

(5, 6, 1)-ի աջ մասում ոչ $\vec{\omega}$ -ն, ոչ էլ $\vec{b}$ -ն կախված չեն A կետի ընտրությունից, աշխարհով ստացված արգելաշրջը վերաբերում է պտտվող մարմնի բոլոր կետերին: Պահելով O և D ինդեքսները պտտման առանցքները ցույց տալու նպատակով, մարմնի լուրջարանչյուր կետի համար ունենք

$$\vec{v}_D - \vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{b},$$

որակի $\vec{\omega} \times \vec{b}$ արտադրյալը ուղղահայաց է OH , DL առանցքները պարանալող հարթությանը:

Ստացված արգելաշրջը կարելի է ձևակերպել այսպես.

[5—7] Միևնույն անկյունային արագության դեպքում պտտման առանցքի զուգահեռ տեղափոխումը առաջացնում է արագությունների միևնույն տարբերությունը մարմնի բոլոր կետերի համար:

Այդ տարբերությունը հավասար է առաջին (OH) առանցքի կետերի արագությանը, երբ այն պտտվելու նույն անկյունային արագությամբ երկրորդ (DL) առանցքի շուրջը:

§ 5. 7. Անկյունային արագացում

1°. Անկյունային արագացման ածանցյալը ըստ ժամանակի կոչվում է անկյունային արագացում և նշանակվելու է $\ddot{\varphi}$ տառով՝

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \quad (5, 7, 1)$$

քանի որ $\dot{\varphi} = \dot{\omega} = \dot{\omega}$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d(\dot{\omega})}{dt} = \dot{\omega} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d\dot{\omega}}{dt}, \quad (5, 7, 2)$$

Սակայն, երբ քննարկվում է պտտումը հաստատուն առանցքի շուրջը (ախտնքն ախտնքի առանցքի շուրջը, որի ուղղությունը անփոփոխ է) առանցքին զուգահեռ $\dot{\omega}$ միավոր-վեկտորի ուղղությունն էլ պետք է անփոփոխ լինի, որի պատճառով

$$\frac{d\dot{\omega}}{dt} = 0 \quad (5, 7, 3)$$

և (5, 7, 2)-ը վեր է ածվում

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega} \ddot{\varphi} \quad (5, 7, 3')$$

արտահայտությամբ:

$$\text{Այստեղ } \ddot{\varphi}\text{-ն պտտման անկյունն է, իսկ } \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

Այսպիսով, եթե $\varphi = \varphi(t)$ ժամանակի դժային ֆունկցիա է՝ $\varphi = a + bt$ (a, b հաստատուններ են), ապա

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= b = \text{const.} \\ \ddot{\varphi} &= 0, \quad \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5, 7, 4)$$

եթե

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) = a + bt + ct^2 \quad (a, b, c \text{ հաստատուններ են}) \\ \dot{\varphi} &= b + 2ct, \\ \ddot{\varphi} &= 2c = \text{const.}, \quad \ddot{\varphi} = \dot{\omega} \ddot{\varphi} = 2\dot{\omega}c = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (5, 7, 5)$$

(5, 7, 4)-ից և (5, 7, 5)-ից նշանակացում ենք.

[5—G] Հաստատուն առանցքի շուրջը պատման դեպքում անկյունային $\bar{\varepsilon}$ արագացումը.

ա) զրո է, երբ պատման ափսոսանքը ժամանակի զծային ֆունկցիա է,

բ) հաստատուն է, երբ այդ անկյունը ժամանակի քառ-կուսային ֆունկցիա է:

Ի) դեպքում

$$\ddot{z} = \dot{h} \ddot{\varphi} = \text{const}$$

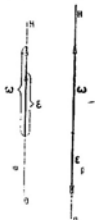
պտտումը կոչվում է համասարաչափ փոփոխվող՝ համասարաչափ արագացող, եթե $\dot{z} \neq 0$, աշխենք, եթե անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը իրար համադրահետ են (նկ. 5—12ա), համասարաչափ դանդաղող, եթե $\dot{z} = 0$ (նկ. 5—12բ):

Իսկ ալ անակի $\ddot{\varphi}(t)$ ֆունկցիաների դեպքում անկյունային արագացումը ժամանակի ֆունկցիա է, որը կարող է զրոյի վերածվել միայն ժամանակի առանձին մոմենտներում: Օրինակ, եթե $\ddot{\varphi} = a \cos(kt + \alpha)$ (a , k , α հաստատուններ են)

$$\ddot{z} = \dot{h} \ddot{\varphi} = -\dot{h} k^2 a \cos(kt + \alpha),$$

$\ddot{z} = 0$ ալն մոմենտներում, երբ $kt + \alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$3 \frac{\pi}{2}, \dots$$



2°. VII դիտում կատեններ, որ երբեմն նկ. 5—12ա, բառանցքը, որի շուրջ մարմինը պտտվում է, ինքն էլ կամ պտտվում է մի ալն առանցքի շուրջ, կամ որևէ կերպ շարժվում է:

Այդպիսի դեպքերում անկյունային արագացման (5, 7, 2) արտահայտությունը հաճախ ձևափոխում են:

3°. $\bar{\varepsilon}$ -ի և $\bar{\omega}$ -ի միջև գոյություն ունի մի առնչություն, որը ճիշտ է և հաստատուն առանցքի դեպքում, և ալն դեպքում, երբ պտտման առանցքը իր հերթին շարժվում է:

Այդ առնչությունը նման է

$$\frac{d\bar{\omega}^2}{2} = \bar{\omega} \cdot d\bar{\varphi}$$

առնչությունը:

Նկատի առնելով, որ

$$\overline{\omega} \cdot \overline{\omega} = \overline{\omega}^2,$$

կարող ենք գրել

$$d\overline{\omega}^2 = 2\overline{\omega} \cdot d\overline{\omega} = 2(\overline{\omega} dt) \cdot \frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

Այստեղ, ըստ (5, 7, 1)-ի՝

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{z}$$

իսկ ըստ (5, 4, 7)-ի

$$\overline{\omega} = \hbar \frac{d\overline{z}}{dt}, \quad \overline{\omega} dt = \hbar d\overline{z} = d\overline{z}.$$

որովհետեւ առաջին փոքր անկյունը միշտ հնարավոր է գիտել որպես վեկտոր ($d\overline{z} = \hbar d\overline{z}$):

Այսպիսով

$$2\overline{\omega} \cdot d\overline{\omega} = 2\overline{z} \cdot d\overline{z}$$

և

$$\frac{d\overline{\omega}^2}{2} = \overline{z} \cdot d\overline{z}: \quad (5, 7, 6)$$

Եւր պատճառն առանցքը անշարժ է, և $\hbar$ և որովհետեւ $d\overline{z} = \hbar d\overline{z}$ միշտ, $\overline{z} \cdot d\overline{z} = \overline{z} d\overline{z}$, որտեղ $\overline{z}$ և $d\overline{z}$ $\overline{z}$ -ի և $d\overline{z}$ -ի թվական արժեքներն են:

Այդ դեպքում (5, 7, 6) դեր է ստացում

$$\frac{d\overline{\omega}^2}{2} = \overline{z} d\overline{z} \quad (5, 7, 7)$$

առնչությունը և նախորդ նրան, նախնանշան են թե տարանշան $\overline{z}$ և $d\overline{z}$ -ն, (5, 7, 7)-ի ձախ մասը կարող է լինել թե դրական և թե բացասական:

Օրինակ, եթե հաստատուն առանցքի դեպքում անկյունային արագությունը նվազում է ժամանակի ընթացքում, $\frac{d\overline{\omega}^2}{2} < 0$, ադ պատճառով $\overline{z}$ և $d\overline{z}$ -ն պետք է տարանշան լինեն. ախնհրահան

պատման անկյունը մեծանում է ավելի և ավելի դանդաղ ($d\varphi > 0$, $\ddot{z} < 0$) կամ պատման անկյունը փոքրանում է ավելի և ավելի արագ ($d\varphi < 0$, $\ddot{z} > 0$):

Ինչպես առիթ է § 5, 4, 4^o-ում հաստատարչափ պատման ղեկքում, երբ պատման առանցքը հաստատուն է $\omega = \text{const}$ և $\ddot{z} = 0$, ալս կարելի է, եզրակացնել նաև (5, 7, 7)-ից:

4: Ինչպես առիթ է, անկյունը վերացական մեծություն է. ուստի անկյունային արագություն ($\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$) և անկյունային արագացման ($\bar{\omega} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$) չափողականությունները համապատասխանաբար կլինեն

$$\frac{1}{\text{ժամանակի միավոր}}, \quad \frac{1}{(\text{ժամանակի միավոր})^2}, \quad \text{օրինակ}$$

$$\omega = 6 \frac{1}{\text{վ}}, \quad z = 15 \frac{1}{\text{վ}^2}:$$

§ 5. 8. Պատկեր մարմնի կետի արագացումը

1^o. Դիցուք OH -ը պատման հաստատուն առանցքն է, $\bar{r} = \overline{OB}$ մարմնի կամայական B կետի շառավիղ-վեկտորը, իսկ $\bar{\rho}$ -ն B -ի հետադիմությունն է առանցքից:

Արտադրենք (5, 4, 8)-ը.

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{\rho} \quad (5.8, 1)$$

$\bar{v}$ -ի անցյալը ըստ t արագացումն է՝

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{\rho})}{dt} = \\ &= \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} \end{aligned}$$

կամ ըստ (5, 4, 5) և (5, 7, 1)

$$\bar{w} = \ddot{z} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \varepsilon \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \bar{v} \quad (5.8, 2)$$

(5, 4, 8)-ի հիման վրա ունենք

$$\bar{w} = \bar{z} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) \quad (5, 8, 3)$$

կամ

$$\bar{w} = \bar{z} \times \bar{p} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{p}), \quad (5, 8, 3')$$

Ինչպես դիտենք, տևս (2, 5, 7), (2, 5, 8), կետի արագացումը կորագրի շարժման դեպքում կազմված է նորմալ և շոշափող բաղադրիչներից

$$\bar{w}_n = \frac{R \omega^2}{R}, \quad \bar{w}_\tau = \frac{A}{\tau} \bar{v}$$

ընդ որում պատման դեպքում կորույթի տեղի R շառավիղը համասար է ρ ։

Քանի որ $\bar{z} \parallel \bar{w}$ ապա համաձայն (5, 4, 9)-ի $(\bar{z} \times \bar{p}) \parallel \bar{v}$ մյուս կողմից $\bar{p} \perp \bar{w}$ և այդ պատճառով

$$\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{p}) = \bar{w} (\bar{w} \cdot \bar{p}) - \bar{p} w^2 = -\bar{p} w^2 \quad (5, 8, 4)$$

Այստեղ $(-\bar{p})$ ուղղված է կետից դեպի շրջանագծի կենտրոնը ունի մեծություն $-\bar{p} \parallel \bar{r}$ ։

Ուրեմն (5, 8, 3)-ում կամ (5, 8, 3')-ում $\bar{z} \times \bar{r}$ կամ $\bar{z} \times \bar{p}$ արտադրվող արագացման շոշափող բաղադրիչն է, իսկ $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) = \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{p}) = \bar{w} \times \bar{v}$ — արագացման նորմալ բաղադրիչն է։

Ստացված արդյունքը նշանակւն է՝

[5—H] Հաստատուն առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի կետի արագացման

$$\left. \begin{aligned} \text{շոշափող բաղադրիչը՝ } \bar{w}_\tau &= \bar{z} \times \bar{r} = \bar{z} \times \bar{p}, \\ \text{նորմալ բաղադրիչը՝ } \bar{w}_n &= \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) = \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{p}) = \\ &= \bar{w} \times \bar{v} = -\bar{p} w^2 \end{aligned} \right\} \quad (5, 8, 5)$$

Քանի որ

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} \perp \bar{p} \quad \bar{w}_\tau \text{-ի չափը՝ } w_\tau &= \varepsilon \rho, \\ \bar{w}_n \text{-ի չափը՝ } w_n &= \rho \omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (5, 8, 6)$$

Այսպիսով արագացման չափը՝

$$w = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (5, 8, 7)$$

Անվանելով β այն անկյունը, որ կազմում է $\bar{w}$ -ն $(-\bar{p})$ -ի հետ, ունենք

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{z \rho}{\rho \omega^2} = \pm \frac{z}{\omega^2}, \quad (5, 8, 8)$$

$$\text{Քանի որ } -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ ապա}$$

$$\beta > 0 \text{ և } \operatorname{tg} \beta > 0, \text{ երբ } \bar{z} \neq \bar{\omega},$$

$$\beta < 0 \text{ և } \operatorname{tg} \beta < 0, \text{ երբ } \bar{z} \neq \bar{\omega}.$$

Այսպիսով արագացման ուղղության մասին կարելի է ասել հետևյալով՝

[5—/] Պատվող մարմնի բոլոր կետերի արագացումները ուղղահայաց են պտտման առանցքին և յուրաքանչյուր կետի արագացումը կազմում է միեւնոյն անկյունը ($-\beta$)-ի հետ, որտեղ β -ն կետի հեռավորությունն է առանցքից:

§ 5. 9. Արագացումների բաժանումը

1. Դիցուք կարծր մարմնի A, B կետերը պտտվում են պտտման (O) առանցքով անցնող P հարթությանը $\bar{\rho}_A, \bar{\rho}_B$ ալի կետերի հեռավորություններն են O -ից, իսկ $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_B$ նրանց արագացումները:

Համաձայն (5, 8, 5)-ի

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_A &= \bar{z} \times \bar{\rho}_A - \bar{\rho}_A \omega^2 \\ \bar{\omega}_B &= \bar{z} \times \bar{\rho}_B - \bar{\rho}_B \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (5, 9, 1)$$

Նկատի առնենք, որ $\bar{\rho}_A \parallel \bar{\rho}_B$ (որովհետեւ A, B կետերը գտնվում են պտտման առանցքով անցնող P հարթության վրա). հետևապես

$$\bar{z} \times \bar{\rho}_A \parallel \bar{z} \times \bar{\rho}_B, \quad \bar{\rho}_A \omega^2 \parallel \bar{\rho}_B \omega^2,$$

Բացի ալի

$$\frac{|\bar{z} \times \bar{\rho}_A|}{|\bar{z} \times \bar{\rho}_B|} = \frac{\rho_A}{\rho_B}, \quad \frac{|\bar{\rho}_A \omega^2|}{|\bar{\rho}_B \omega^2|} = \frac{\rho_A}{\rho_B},$$

Այս բոլորից հետևում է, որ

$$\bar{\omega}_A \parallel \bar{\omega}_B,$$

Այսպիսով հանգում ենք հետևյալ եզրակացության՝

[5—J] Պատման առանցքը պարունակող հարյուրյան բոլոր կետերի արագացումները իրար զուգանա են և ըստ չափի ուղիղ համեմատական կետերի հեռավորություններին առանցքից:

Արագացումները համադրադաճն են, եթե համադրադաճն են կետերի հեռավորությունները առանցքից, հակառակ դեպքում արագացումները հակադրադաճն են:

Նույնը կարելի է ասել պատման առանցքը հատող կամայական ուղղի կետերի արագացումների մասին:

2. [5—K] Պատման առանցքին զուգանա ուղղի կետերի արագացումները իրար հավասար են:

Իսկապես, եթե այդպիսի ուղղի կետերը անվանենք $A, B, \dots$, ապա $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ և (5, 9, 1)-ից երևում է, որ $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$:

3. Դիցուք B, C -ն պատվող մարմնի կամայական կետերն են $\overline{BC}$ -ն C -ի հեռավորությունն է B -ից, իսկ $\overline{BC}$ -ի ալն բաղադրիչը, որ ուղղահայաց է պատման առանցքին, անվանենք $\overline{BC'}$ ըստ [5—K]-ի $\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_{C'}$:

Օգտվենք (5, 8, 5) բանաձևից.

$$\vec{\omega}_B = \vec{z} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times \vec{v}_B,$$

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_{C'} = \vec{z} \times \vec{r}_{C'} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{C'}:$$

Ուստի

$$\vec{\omega}_C - \vec{\omega}_B = \vec{z} \times (\vec{r}_{C'} - \vec{r}_B) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_{C'} - \vec{v}_B):$$

քանի որ

$$\vec{r}_{C'} - \vec{r}_B = \overline{BC'}, \quad \vec{v}_{C'} - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overline{BC'}$$

ապա

$$\vec{\omega}_C - \vec{\omega}_B = \vec{z} \times \overline{BC'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{BC'}),$$

կամ, որովհետև

$$\overline{BC'} \perp \vec{\omega} \text{ և } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{BC'}) = -\overline{BC'} \omega^2,$$

$$\vec{\omega}_C - \vec{\omega}_B = \vec{z} \times \overline{BC'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{BC'}) = \vec{z} \times \overline{BC'} - \overline{BC'} \omega^2 \quad (5, 9, 2)$$

(5, 9, 2)-ի իմաստը հետևյալն է.

[5—L] Պատվող կարծր մարմնի կամայական երկու կետերի արագացումների սալրերությունը հավասար է այն արագացմանը.

որ կուցենար կետերից մեկը, երևեալն $\bar{\omega}$ -ով և երևեալն $\bar{z}$ -ով մարմինը պատկեր մյուս կետով անցնող առանցքի շուրջը:

Արտակ. իհարկե, Լենթադրում է, որ նոր առանցքը պետք է զուգահեռ լինի պատման իրական առանցքին. այս հետևում է այն պահանջից, որ $\bar{\omega}$ -ն պետք է նույնը լինի:

4. Արտակի որոշենք արագացումների կախումը առանցքի շրջից, զիտարկենք երկու զուգահեռ առանցքներ OH և DL և Լենթադրենք, որ մի անգամ պատումը կատարվում է OH -ի շուրջը, մյուս անգամ, նույն անկյունային արագացվածք և նույն անկյունային արագացումով, DL -ի շուրջը. (նկ. 5—13): Լենթադրենք մի կամայական A կետ, որի հետափորությունը OH -ից և DL -ից թող լինեն համապատասխանորար $\bar{\rho}$ և $\bar{l}$:

$$\bar{l} = \bar{\rho} + \bar{b},$$

որտեղ $\bar{b}$ -ն OH -ի հետափորությունն է DL -ից:

Նշանակենք A կետի արագացումը $\bar{\omega}_O$, երբ պատումը կատարվում է OH -ի շուրջը, և $\bar{\omega}_D$, երբ պատման առանցքը DL -ն է: (5, 8, 5)-ը տալիս է

$$\bar{\omega}_O = \bar{z} \times \bar{\rho} - \bar{\rho}\omega^2,$$

$$\bar{\omega}_D = \bar{z} \times \bar{l} - \bar{l}\omega^2,$$

այտանկից

$$\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_O = \bar{z} \times (\bar{l} - \bar{\rho}) - (\bar{l} - \bar{\rho})\omega^2$$

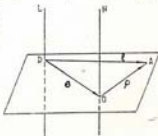
կամ, քանի որ

$$\bar{l} = \bar{\rho} + \bar{b}$$

$$\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_O = \bar{z} \times \bar{b} - \bar{b}\omega^2, \quad (5, 9, 3)$$

Այս բանաձևի մեջ, $\bar{z}$, ω^2 , $\bar{b}$ բոլորովին կախում չունեն A կետի ընտրությունից, հետևապես (5, 9, 3)-ը ճիշտ է մարմնի բոլոր անջուր կետի համար:

[5—M] Անփոփոխ անկյունային արագություն և անկյունային արագացման զեպրում պատման առանցքի զուգահեռ անջափոխումից առաջանում է արագացումների միևնույն տարբերությունը մարմնի յուր իր կետերի համար: Այդ տարբերությունը հավասար է առաջին (OH) առանցքի կամայական կետի արագացմանը, երևեալն մարմինը պատկեր երկրորդ (DL) առանցքի շուրջը:



Նկ. 5—13:

ՀԱՐԻ ՇԱՐԺՈՒՄ

§ 6. I. Հարց պատկերի շարժումը իր հարթության մեջ

1. Այս պիտում բնութագրում է անփոփոխելի հարթ P պատկերի անդրադարձի շարժումը, որի բնիկացում P -ի բոլոր կետերը մնում են անշարժ (Q հարթության վրա (օրինակ, մետաղե շաւրարանի թիթեղ, որը, շարժվելիս, իր բոլոր կետերով մնում է անդամի հարթության վրա)։

Անդրադարձի շարժումը անփոփոխում է «հարթ պատկերի շարժում» իր հարթության մեջ։ Հետադարձում համապատասխան համար «անփոփոխելի հարթ P պատկերի» փոխարեն կոչաւորուի « P հարթ պատկեր», « P պատկեր», իսկ «հարթ պատկերի շարժումը իր հարթության մեջ» կոչւիւնովի P/Q շարժում, ընդ որում Q -ն այն անշարժ հարթությունն է, որի հետ, շարժվելով, համընկում է իր բոլոր կետերով շարժվող P պատկերը։

P/Q շարժման պարզ օրինակ է հարթ պատկերի պտտումը իրեն ուղղահայաց առանցքի շուրջը։

P/Q շարժման լայ օրինակներից մեկը վազանի անփոփոխումն է ուղղադիմ սկզբի վրայով կամ մի շրջանագծի զրուումը մյուս, անշարժ շրջանագծի վրայով, երբ երկու շրջանագծերի հարթությունները համընկնում են։

Ահա մի օրինակ եւ անփոփոխելի AB ձողի A կետը սահում է YOY' առանցքի վրայով, իսկ B կետը՝ XOX' առանցքի վրայով, ընդ որում XOY անկյունը ուղիղ է (նկ. 6—1)։ Անդրադարձ, A կետի հետադարձը YOY' առանցքն է, B կետինը՝ XOX' առանցքը։ Պարզ է, որ AB -ի բոլոր դիրքերի համար նրա D միջնակետի

OD շառավիղ-վեկտորի չափը հաստատուն է: Ուստի D -ի հետագիծը շրջանագիծ է, որի կենտրոնն է O , իսկ շառավիղը $OD = \frac{AB}{2}$:

AB ձողի բոլոր միջև կետերի հետագիծերը էլիպսներ են, որոնց բնագիծն է կենտրոնը O -ն է:

Այդ ապացույցելու համար նշանակենք $\frac{AB}{2}$ -ը l -ով և դիտար-

կենք ձողի կամայական E կետի համար $DE = kl$ (k -ի սահմաններն են $+1$, երբ $k = 1$

E -ն համընկնում է B -ի հետ, իսկ երբ $k = -1$, E -ն համընկնում է A -ի հետ): Նշանակելով E -ի կոորդինատները x , y և նշելով, որ $OD = \frac{AB}{2} = l$, ունենք

$$x = l \cos \alpha + kl \cos \alpha = l(1+k) \cos \alpha$$

$$y = l \sin \alpha - kl \sin \alpha = l(1-k) \sin \alpha,$$

որտեղից

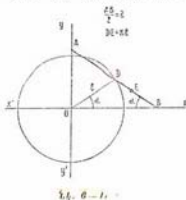
$$\frac{x^2}{l^2(1+k)^2} + \frac{y^2}{l^2(1-k)^2} = 1$$

կամ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, եթե բնագիծներ $l(1+k) = a$, $l(1-k) = b$:

k -ի դրական արժեքների համար E -ն դասավորված է D -ից առ $a > b$, k -ի բացասական արժեքների դեպքում $a < b$:

2. Երբևի՞ն նպատակահարմար է պատկերացնել, որ կան երկու անփոփոխելի հարթ պատկերներ P և P' , ամբողջում մեկը մյուսին ափսոսա, որ կազմեն կարծր մարմին, իսկ P , P' հարթությունները լինեն միմյանց դուգաձև (նկ. 6-2):

Այդ նշանակում է՝ P -ի լուրջացանչյուր B կետին համապատասխանում է P' -ի ափսոսա B' կետը, որ $BB' = h$, որտեղ h -ը P' -ի հետափոխությունն է P -ից:



Քանի որ P և P' հարթությունները չեն կտրույ ոչ մտահալ իրար և ոչ էլ հեռանալ իրարից, նրանց հեռավորությունը շափոհապատասխան է՝ $|\vec{h}| = h = \text{const}$ եթե P պատկերը կատարում է P/Q շարժում, ապա $\vec{h}$ -ի ուղղությունն էլ մնում է անփոփոխ, և այսպիսով $\vec{h} = \text{const}$:

Հետագայում, գիտելով P/P' կարծր մարմինը, միշտ նկատել տեսվում, որ նրա P հարթությունը կատարում է P/Q շարժում:

Պարզ է, որ P և P' -ով կազմված կարծր մարմնի BB' հատվածի բոլոր կետերի (որինանի B և B' -ի) արագությունները նույնն են, արագացումները նույնն են: Իսկապես, եթե B -ի $\vec{OB}$ շառավիղ-վեկտորը նշանակենք $\vec{r}$ (O -ն անշարժ Q հարթության կամայական կետն է),

B' -ի շառավիղ-վեկտորը՝

$$\vec{r}' = \vec{OB'} = \vec{OB} + \vec{BB'} = \vec{r} + \vec{h} \quad (h = \text{const})$$

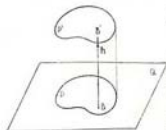
և այդ պատճառով

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (6.1.1)$$

ախնարն

$$\vec{\omega}_{B'} = \vec{\omega}_B, \quad \vec{\omega}_{B'} = \vec{\omega}_B$$

P/P' կարծր մարմնի պատկերացումը հեշտացնում է մի քանի դրույթների ապացույցը: Հետագայում օգտագործվելու են երկու դրույթներ:



Նկ. 6-1:

[6-1] ա) P/Q շարժման դեպքում P պատկերի դիրքը որոշվում է նրա երկու կամայական կետերի դիրքով:

բ) Նրբ P պատկերի մի կետը անշարժ է, P/Q շարժումը հանդիսանում է պատում անշարժ կետով անցնող և P -ին ուղղահայաց առանցքի շուրջը:

Ապացուցենք $[G-A]u$. Ինչպես ասված է (§ 5, 8), կամալական կարծր մարմնի գիրքը սրուշվում է երեք կետերով, որոնք չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա: PP' կարծր մարմնի գիրքը սրուշվում համար վերցնենք երեք կետեր A , B և B' (նկ. 6-2) ընդ որում A -ն և B -ն պատկանում են P պատկերին, իսկ B' -ը P' -ի վրա է և $\overline{BB'} = \overline{h}: P/Q$ շարժման դեպքում $\overline{h} = \text{const}$, հետևապես B' կետի գիրքը լիովին սրուշվում է B -ի գիրքով. այդ պատճառով P/Q շարժման դեպքում PP' մարմնի և P հարթության գիրքը սրուշվում են P -ի երկու կամալական կետերի գիրքերով:

$[G-A]p$ -ի ապացույցն էլ շատ պարզ է:

Դիցուք շարժումը անալիտիկ է, որ P -ի B կետի արագությունը զրո է. համաձայն (6, 1, 1)-ի, B' -ի արագությունը նույնպես պետք է զրո լինի:

Այդպիսով PP' կարծր մարմնի 2 կետերի արագությունները զրո են, ուստի մարմնի շարժումը հանդիսանում է պտտում P -ին ուղղահայաց BB' առանցքի շուրջը: Այս իսկ $[G-A]p$ -ն է:

3^o. Կլինեմատիկայում քննարկվում է կարծր մարմնի մի շարժում են՝ «շարժում, որը զուգահեռ է հարթությանը» («հարթ-զուգահեռական շարժում»): Այդպես կոչվում է կարծր մարմնի այն շարժումը, երբ բոլոր կետերի տեղափոխումները զուգահեռ են միևնույն (Q) հարթությանը (այսինքն կապանար են): Անվանենք P , P' , $P'' \dots$ մարմնի հատույթները Q -ին զուգահեռ հարթություններով: Պարզ է, որ երբ կարծր մարմինը կտատարում է շարժում, զուգահեռ Q հարթությանը, ապա յուրաքանչյուր ալգպիտի հատույթ կշարժվի, մնալով իր հարթության մեջ:

Այդպիսով կարծր մարմնի՝ հարթությանը զուգահեռ շարժման քննարկումը վեր է անվում P/Q շարժման քննարկմանը:

Վերևում գիտարկված PP' կարծր մարմնի շարժումը հանդիսանում է հարթ-զուգահեռական շարժման մի դեպք:

§ 6. 2. Հարթ պատկերի շարժումը իր հարթության մեջ կարող է լինել կամ համընթաց կամ սյառադական

1. Ընդունելով անշարժ Q հարթության կետերից մեկը (O) (նկ. 6-3ա), որպես շառավիղ-վեկտորների սկիզբ, կարելի է P

պատկերի $A, B, \dots$ կետերի զիբքերը որոշել նրանց շառավիղ-
փեկաորենների միջոցով՝

$$\bar{r}_A = \overline{OA}, \quad \bar{r}_B = \overline{OB}$$

և արտահղից

$$\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt}, \quad \bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt}$$

Այսպիսով $[G-A]$ -ից հետևում է, որ P/Q շարժման զեպ-
քում, անհնալով P -ի երկու կետերի շառավիղ-փեկաորենները, կարելի



է որոշել P -ի բոլոր կետերի շառավիղ-
փեկաորենները և, անհնալով երկու կետե-
րի արագությունները (և արագացում-
ները), որոշել P -ի բոլոր կետերի արա-
գությունները արագացումները):

Ապացուցենք, որ

$[G-B]$ P/Q շարժումը համընթաց

է, երբ P -ի երկու կետերի արագությունները իրար հավասար են:

Իսկապես անվանենք A, B, P պատկերի ալն կետերը, որոնց
արագությունները նախն են: Դիտենք PP' մարմինը, նրա B'
կետը ունի նախ արագությունը, ինչ որ A և B կետերը: Համա-
ձայն § 5, 3, 4-ի կարծի մարմնի շարժումը համընթաց է, եթե
կան երեք, մի ուղղի վրա չգտնվող կետեր, որոնց արագություն-
ներն իրար հավասար են: Այսպիսով $[G-B]$ թևորեմը ապացուց-
ված է:

2. Մյուս կարևոր թևորեմը հետևյալն է:

$[G-C]$ երբ P պատկերի շարժումը համընթաց չէ, ապա P -ն
յուրաքանչյուր մեմենա պտտվում է իրեն ուղղահայաց մի
առանցքի շուրջը:

Այդ ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ եթե
շարժումը համընթաց չէ, ապա յուրաքանչյուր մոմենտ P -ի կե-
տերից մեկի արագությունը հավասար է զրոյի:

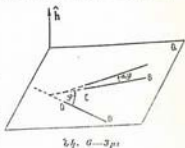
Վերցնենք անշարժ Q հարթության վրա մի ուղիղ OO' ,
իսկ P -ի վրա երկու կետեր C, B (նկ. 6—3բ): Դիցուք t մոմեն-
տում CB համալումը կազմում է OO' -ի հետ φ անկյուն: Քանի որ
շարժումը համընթաց չէ, CB ուղղի ուղղությունը պետք է փոփոխ-

մի ժամանակի ընթացքում, դիցուք մի ժամանակամիջոցում ω -ի անը հախառար է մի: Պարզ է, մի-ով, փոփոխվում են P -ի լուրջքանչյուր ազդի ազդաթվանը: մի-ն կաշվում է P -ի պաշտման աարական անկում: Անվանելով $\hat{h}$ P -ին ազդահալաց միտմիս փեկաորը կաշոյ ենք դրել

$$\hat{h} \frac{d\omega}{dt} = \omega,$$

որակ ω -ն պատկերի պատման անկումային աքաղաթվանն է:

Բանի որ $\overline{CB}$ -ի չափը, $CB = \text{const}$ (δ , 3 , 3)-ի հիման վրա անենք



$$\frac{d\overline{OB}}{dt} - \frac{d\overline{OC}}{dt} = \frac{d\overline{r}_B}{dt} - \frac{d\overline{r}_C}{dt} = \overline{v}_B - \overline{v}_C = \omega \times \overline{CB}; \quad (6, 2, 1)$$

ենթադրենք, $\overline{v}_B$ -ն հայտնի է (հ. 6-4) ասենք $\overline{v}_B$ -ին ազդահալաց DBE ազդը, որը պատկանում է P -ին:

Պարզ է, որ DBE -ն զուգահեռ է $\omega \times \overline{v}_B$ աքաղաթվան: Հետևապես DBE -ի սրել C կետի համար անենք

$$\overline{CB} = \lambda \omega \times \overline{v}_B, \quad (6, 2, 2)$$

որակ λ -ն կամարտան սկալար գործակից է: Տեղադրելով (6, 2, 2)-ը (6, 2, 1)-ի մեջ, ստանում ենք

$$\overline{v}_B - \overline{v}_C = \lambda \omega \times (\omega \times \overline{v}_B)$$

կամ, քանի որ $\omega \perp \overline{v}_B$, ապա

$$\overline{v}_B - \overline{v}_C = -\lambda \overline{v}_B \omega^2;$$

$$\text{Ընդունելով } \lambda = -\frac{1}{\omega^2}, \quad (6, 2, 3)$$

հանգում ենք

$$\overline{v}_B - \overline{v}_C = \overline{v}_B$$

հախառարաթվանը, կամ $\overline{v}_C = 0$:

Այդ նշանակում է, որ P -ի ոչ համընթաց շարժման դեպքում լուրջքանչյուր մոմենտ կա մի C կետ, որի աքաղաթվանը զրո է: Սրանից ե $[G-A]$ -ից հետևում է $[G-C]$ թեթեւի:

C կետի գիրքը հեշտ որոշվում է, եթե հալանի են $\bar{\omega}$ և $\bar{v}_B$:
Իսկապես (6, 2, 2) և (6, 2, 3)-ը տալիս են

$$\overline{CB} = -\frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_B}{\omega^2}$$

կամ

$$\overline{BC} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_B}{\omega^2}, \quad (6, 2, 4)$$

(6, 2, 4)-ով որոշվում է C -ի հեռավորությունը B -ից: Օգտակար է հիշել, որ $\bar{\omega}$, $\bar{v}_B$ և $\overline{BC}$ կազմում են վեկտորների աչ ձևերի եռյակ: P -ի լուրագրանչուր կետի արագությունը

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (6, 2, 5)$$

որտեղ $\bar{\omega}$ — անկլունային արագությունն է, իսկ $\bar{r}$ գիտվող կետի հեռավորությունն է պտտման առանցքից՝ կամ (ինչ որ միևնույնն է) C կետից: Օրինակ B կետի դեպքում $\bar{r} = \overline{CB}$ և

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{CB}, \quad (6, 2, 6)$$

3°. Արդ տրված են $\overline{CB}$ -ն և $\bar{v}_B$ -ն, $\bar{\omega}$ -ն որոշվում է ալպես. բազմապատկենք $\bar{r}$ -ն վեկտորապես (6, 2, 5)-ով:
 $\bar{r} \times \bar{v}_B = \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} r^2$ (քանի որ $\bar{\omega} \cdot \bar{r} = 0$),

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{r} \times \bar{v}_B}{r^2} \quad (\bar{r} = \overline{CB}), \quad (6, 2, 7)$$

$\bar{\omega}$ -ն կարելի է նաև որոշել, գիտենալով P պատկերի երկու կամալական կետերի արագությունները:

Դիցուք A և B կետերի արագություններն են $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$: Նշանակենք $\overline{AB}$ -ն $\bar{l}$ -ով,

$$\overline{AB} = \bar{l}$$

ըստ (6, 2, 1)-ի

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{l} \quad (6, 2, 8)$$

կամ

$$\bar{l} \times (\bar{v}_B - \bar{v}_A) = \bar{l} \times (\bar{\omega} \times \bar{l}),$$

Քանի որ $\bar{l} \perp \bar{\omega}$, $\bar{\omega} \cdot \bar{l} = 0$, ուստի

$$\bar{l} \times (\bar{v}_B - \bar{v}_A) = \bar{\omega} l^2,$$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{l} \times (\bar{v}_B - \bar{v}_A)}{l^2}, \quad (6, 2, 9)$$

Պարզ է, որ (6, 2, 7)-ը (6, 2, 9)-ի մասնավոր դեպքն է, երբ $\bar{v}_A = 0$:

4^o. $P|Q$ ոչ համընթաց շարժումը, հանդիսանալով պտտում հաստատուն ուղղութիւն ունեցող առանցքի շուրջը, շատ նման է նախորդ գլխում ուսումնասիրված պտտմանը անշարժ առանցքի նկատմամբ: Օրինակ (6, 2, 5), (6, 2, 1) բանաձևերը համապատասխանաբար համընկնում են (5, 3, 8), (5, 4, 1) բանաձևերի հետ:

Ստիպել այդ երկու շարժումների միջև կա մի շատ զգալի տարբերութիւն. նախորդ գլխում պտտման առանցքը անշարժ է, փոփոխվել կարող է միայն $\bar{\omega}$ -ի չափը և ուղղվածութիւնը, մարմնի բոլոր կետերի հետագծերը շրջանագծեր են: Իսկ $P|Q$ ոչ համընթաց շարժման դեպքում P -ի բոլոր կետերի հետագծերը սովորաբար շրջանագծեր չեն լինում. հետևապես պտտման առանցքը ընդհանուր առմամբ չի կարող անշարժ մնալ: Օրինակ, երբ AB ձողի A կետը սահում է Oy առանցքի վրայով, B կետը սահում է Ox առանցքի վրայով (տես § 6, 1, 1^o) միայն AB -ի D միջնակետի հետագիծն է շրջանագիծ, իսկ A և D -ի ու B և D -ի միջև ընկած կետերի հետագծերը էլիպսներ են:

Այդպիսի օրինակները բազմաթիւ են:

$P|Q$ ոչ համընթաց շարժման պտտման առանցքը անշարժ է միայն այն դեպքում, երբ P -ի բոլոր կետերի հետագծերը համակենտրոն շրջանագծեր են: Ընդհանուր առմամբ այդ տեղի չունի և պտտման առանցքը, միշտ մնալով ուղղահայաց P , Q հարթութիւններին, անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը: Այս պատճառով $P|Q$ ոչ համընթաց շարժումը չուրաքանչյուր մոմենտ հանդիսանում է ակնթարթային պտտում, պտտման (CC') առանցքը՝ ակնթարթային առանցք, իսկ այն (C) կետը, որում այդ առանցքը հասում է P , Q հարթութիւնները, ակնթարթային կենտրոն (նկ. 6—5):

§ 6. 3. Արագությունների բաժանումը

1. P հարված պատկերի ուղի համընթաց P/Q շարժման դեպքում P -ի որևէ կետի արագության արտահայտությունը (Յ, 2, 6)՝

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{CB}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

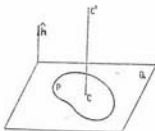
համընկնում է անշարժ առանցքի շուրջ պտտման մարմնի կետի արագության (3, 3, 8) արտահայտության հետ՝

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Այստեղից եզրակացնում ենք

[6—D] Յուրաքանչյուր մոմենտ P պատկերի կետերի արագությունները, երբ P/Q շարժումը համընթաց չէ, այնպիսիք են, կարծես թե P -ն պտտվում է $\vec{\omega}$ անկյունային արագությամբ իր հարթությանը ուղղահայաց անշարժ առանցքի շուրջը:

Ուշ համընթաց P/Q շարժում կատարող P -ի յուրաքանչյուր կետի արագությունը ուղղահայաց է նրա հետադարձության C ուղղնաթափային կենտրոնից (Նկ. 6—5):



Նկ. 6—3:



Նկ. 6—5:

Արագության չափը համառոտ է անկյունային արագության և հիշված հետադարձության չափերի արտադրյալին

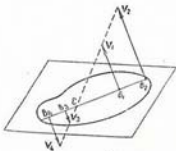
$$v_B = \omega CB:$$

2. ա) P -ին պատկանող և աննթափախ (C) կենտրոնով անցնող յուրաքանչյուր ուղղի կետերի արագությունները ուղղահայաց են այդ ուղղին և ըստ չափի ուղիղ համեմատական այդ կետերի հետադարձություններին C -ից:

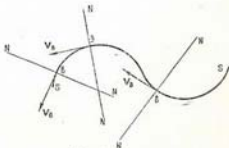
Այդպիսի ուղղի կետերի արագությունները համադրաձև են, եթե կետերը գտնվում են C -ի միևնույն կողմը, և հակադրաձև, եթե կետերը գտնվում են C -ի տարբեր կողմերը: Օրինակ (նկ. 6—7), B_1 , B_2 կետերի արագությունները համադրաձև են, B_3 , B_4 -ի արագությունները հակադրաձև են, B_1 և B_2 -ի արագությունները հակադրաձև են:

բ) C -ից հախտաբար շարժվող հետադարձվածների վրա դաժնող կետերի արագությունների շարժերը իրար հախտաբար են:

գ) Դիցուք P պատկերը կատարում է ոչ համընթաց P/Q շարժում և SS -ը P -ի B կետի հետադիմն է (նկ. 6—8): SS -ի լուրջանշյալը կետում B -ի արագության աղբյուրները համընկնում է ալք կետի շոշափողի հետ:



Նկ. 6—7:



Նկ. 6—8:

Այսպիսով, ալք արագությունը ուղղահայաց է կետի հետադարձվածներ C անկմարմալին կենտրոնից:

Այսպիսով, եթե հայտնի են P պատկերի որևէ (B) կետի հետադիմն և ալք կետի դիրքը գիտվող մոմենտում, ապա անկմարմալին (C) կենտրոնը ալք մոմենտում կգտնվի B կետով տարած (NBN) գլխավոր նորմալի վրա:

3°. P/Q ոչ համընթաց շարժում կատարող P պատկերի կետերի արագություններին վերաբերող բոլոր հարցերը կարող են լուծվել (6, 2, 8) բանաձևի օգնությամբ: (6, 2, 8) բերում է, որին հետևյալ մոմենտում, որը կարող է տեղափոխվել բազմազան կիրառումներ:

Բազմապատկենք (6, 2, 8)-ի երկու մասերը սկալարորեն $\hat{l}$ միավոր վեկտորով. քանի որ $\hat{l} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{l})$ խառը արտադրյալը զրո է, ապա

$$\hat{l} \cdot \bar{v}_B = \hat{l} \cdot \bar{v}_A,$$

որտեղ B և A -ն P -ի կամայական երկու կետերն են, իսկ $\hat{l} \cdot \bar{v}_B$ արտադրյալը $\bar{v}_B$ -ի պրոեկցիան է $\bar{l} = \overline{AB}$ ուղղաթիվան վրա. նման իմաստ ունի նաև $\hat{l} \cdot \bar{v}_A$: Այսինքն

[6—E] P հարթ պատկերի յուրաքանչյուր երկու կետերի արագությունների պրոեկցիաները այդ կետերով անցնող ուղղի վրա իրար հավասար են:

Դիցուք A , B , D կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա և

$$\overline{AD} = k \overline{AB}$$

ըստ (6, 2, S)

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

$$\bar{v}_D - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AD} = k \bar{\omega} \times \overline{AB} = k(\bar{v}_B - \bar{v}_A)$$

այստեղից

$$\bar{v}_D = k \bar{v}_B + (1 - k) \bar{v}_A, \quad (6, 3, 1)$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $k = \frac{1}{2}$, այսինքն D կետը AB հատվածի միջնակետն է,

$$\bar{v}_D = \frac{\bar{v}_B + \bar{v}_A}{2}, \quad (6, 3, 2)$$

§ 6. 3. Շառժական և անօարժ ցենտրիդները

1°. Ինչպես ասված է § 6, 2, 3°-ում ակնթարթային առանցքը անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը տարածության մեջ (միշտ մնալով ուղղահայաց P , Q հարթություններին): Հետևապես ակնթարթային առանցքի և P , Q հարթությունների հատման կետը՝ ակնթարթային կենտրոնը, նույնպես անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը այդ հարթությունների վրա:

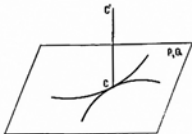
Ակնթարթային կենտրոնների երկրաչափական տեղերը P և Q հարթությունների վրա կոչվում են ցենտրիդներ (նկ. 6—9):

[6—F] Անշարժ (Q) հարբուրյան այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հաջորդաբար դառնում են ակնթարթային կենտրոններ. կոչվում է անշարժ ցենտրիդ:

[6— F'] ճարձվող P պատկերի այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հաջորդաբար դառնում են ակնբարձրային կենտրոն-ներ, կոչվում է շարժական ցենտրոիդ:

Շարժական ցենտրոիդը կազմված է P պատկերին պատկա-նող կետերից, և այդ պատճառով հանդիսանում է անփոփոխելի դիմ, որը շարժվում է P -ի հետ որպես մի ամբողջություն:

Համաձայն ստաժին, անշարժ և շարժական ցենտրոիդները լուրաքանչյուր մոմենտ ունեն մի ընդհանուր կետ՝ այն է ակնթա-թային կենտրոնը:



Նկ. 6—9:

2°. Շարժական և անշարժ ցենտրոիդների սահմանումներից բխում է, որ ակնթաթային C կենտրոնը անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը այդ երկու ցենտրո-իդների վրա: Բոլորը կատարվում է ակնպես, կարծես թե մի ազատ C կետ շարժվում է շարժական ցենտրոիդի վրայով, իսկ վերջինս շարժվում է իր հերթին P պատկերի հետ ակնպես, որ C -ի հետագիծը Q -ի վրա հանդիսանում է անշարժ ցենտրոիդը:

Անվանենք անշարժ և շարժական ցենտրոիդների ընդհանուր կետի շոշափողների միավոր վեկտորները համապատասխանաբար $\hat{T}$ և $\hat{s}$ (Նկ. 6—10, ա, բ, գ), իսկ ցենտրոիդների աղեղները, լու-րաքանչյուրը հաշված մի կամայական կետից, S և S' : Այդ նշա-նակումներով C կետի շարժումների արագությունները շարժական և անշարժ ցենտրոիդների վրա կլինեն համապատասխանորեն

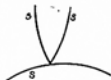
$$\bar{v} = \hat{s} \frac{ds}{dt}, \quad \bar{V} = \hat{T} \frac{dS}{dt} \quad (6, 4, 1)$$



Նկ. 6—10 ա:



Նկ. 6—10 բ:



Նկ. 6—10 գ:

Տ՝ Տ, 7, Յ-ում կապագույցի հետևիչը կարևոր թևորմաբ
 [6—F"] Ընդհանուր C կետում ակնբարբային կենտրոնի
 (Մ, V) արագությունները շարժական և անշարժ ցենտրոիդների
 վրա իրար հավասար են՝ $\bar{v} = \bar{V}$:
 (6, 4, 1)-ից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\bar{z}}}{dt} &= \dot{\bar{I}} \frac{dS}{dt}, \\ \dot{\bar{z}} &= \dot{\bar{I}}, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{dS}{dt}, \end{aligned} \quad (6, 4, 2)$$

այսինքն

(և հետևապես 6—10բ, 6—10գ նկարները նիշու չեն, նիշու նկարն
 է 6—10ա): Այս նշանակում է, որ

[6—F"] P/Q ոչ համընթաց շարժման դեպքում շարժական
 ցենտրոիդը առանց սահելու գլորվում է անշարժ ցենտրոիդի
 վրայով:

$\bar{v}$, $\bar{V}$ արագությունները կարևոր դեր են կատարում մի քանի
 հարցերում:

Ըստ [6—A]-ի P պատկերի երկու կետերի հեռավորում
 որոշվում են P-ի բալոր կետերի հեռավորները և քանի որ այդ երկու
 կետերը կարելի է ընտրել շարժական ցենտրոիդի վրա, ապա տե-
 միջապես պարզ է, որ

[6—FIV] երկու ցենտրոիդների ձևերով լիովին որոշվում են
 P պատկերի բոլոր կետերի հեռավորները (անկախ գլորման ալա-
 գությունից):

§ 6. 5. Ակնբարբային կենտրոնի, արժական և անարժ ցենտրոիդների սրտումը:

1^o. Անթափանցիվ կենտրոնի դիրքը կարելի է որոշել, տե-
 նալով տարբեր տվյալներ:

ա) Դիցուք արված են P պատկերի անկյունային արագու-
 թյունը և P-ի կետերից մեկի արագությունը:

Անվանենք այդ կետը B, արագությունը $\bar{v}_B$, իսկ անկյունային
 արագությունը ω , համաձայն (6, 2, 4)-ի

$$\overline{BC} = \frac{\omega \times \bar{v}_B}{\omega^2}, \quad (6, 5, 1)$$

որտեղ C-ն անթափանցիվ կենտրոնն է:

բ) եթե հայանի են երկու կետերի ոչ զուգահեռ արագությունների աղագոթյունները, ապա C -ի գիրքը որոշելու համար օգտվում են այն հանդամանքից, որ յուրաքանչյուր կետի արագությունը աղագահայաց է կետի հեռավորությունը ակնթարթային կենտրոնից.

Երկուք (նկ. 6—11) A և B կետերի արագությունները համապատասխանաբար զուգահեռ են Aa և Bb ուղիղներին՝

$$\vec{v}_A \parallel \vec{Aa}, \quad \vec{v}_B \parallel \vec{Bb},$$

իսկ

$$\overline{CA} \text{ և } \overline{CB},$$

A և B կետերի հեռավորություններն են ակնթարթային կենտրոնից:

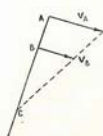
Համաձայն նոր ասվածի

$$\overline{CA} \perp \vec{Aa}, \quad \overline{CB} \perp \vec{Bb};$$

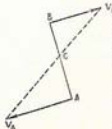
Ուստի C -ի գիրքը որոշելու համար պետք է A կետից աղագահայաց տանել Aa -ին և B կետից աղագահայաց Bb -ին. աղագահայացների հատման կետը C -ն է:

զ) երբ հայանի են երկու (A, B) կետերի արագությունները ($\vec{v}_A, \vec{v}_B$), ակնթարթային կենտրոնի գիրքը կարելի է որոշել, անգամ եթե արագությունները իրար զուգահեռ են:

Ոչ զուգահեռ $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ արագությունների գեոցրում խնդիրը զեր է ամփում այս պարագրաֆի բ կետին: Իսկ եթե արագությունները զուգահեռ են (բայց իրար հավասար չեն՝ $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$), ապա,



Նկ. 6—12ա



Նկ. 6—12բ

օգտվելով § 6, 3, 2^ա-ից, պետք է միացնել արագությունների ծայրերը՝ M կետից աղագոթ ուղղի և AB հատվածի (կամ նրա շարունակության) համաման կետը կլինի ակնթարթային C կենտրոնը (նկ. 6—12ա, բ):

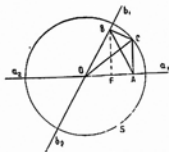
2^բ. Համաձայն [6—A]-ա և [6—F^{IV}]-ի P/Q շարժման գեոցրում յուրաքանչյուր կետի հեռագիրը որոշվում է երկու

կամայական կետերի հետադներով, կամ շարժական և անշարժ ցենտրոիդների ձևերով:

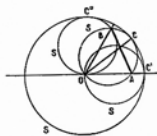
Համադրելով այս երկու դրույթները, գալիս ենք այն եզրակացության, որ անշարժ և շարժական ցենտրոիդների ձևերը կուրելի է որոշել P պատկերի երկու կետերի հետադների միջոցով:

Ներքևը բերված են ցենտրոիդների ձևերի ալյապիսի որոշման օրինակներ:

ա) Դիտարկենք $\bar{I} = \overline{AB}$ անփոփոխելի հատվածի այն շարժումը, որում A , B ծայրերը սահում են համապատասխանաբար a_1Oa_2 և b_1Ob_2 ուղիղների վրայով, որոնք հատվում են O կետում և անկյան տակ (նկ. 6—13ա, բ) (այս շարժման մասնավոր դեպքը, երբ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ նկարագրված է § 6, 1, 1²-ում):



Նկ. 6—13ա:



Նկ. 6—13բ:

Պարզ է, որ A -ի արագությունը դասավորված է a_1Oa_2 ուղղի վրա, իսկ B -ի արագությունը՝ b_1Ob_2 ուղղի վրա: Այսպիսով այս շարժումը վերաբերում է I° բ դեպքին: Հետևապես C տկնթարթային կենտրոնը BC -ի և AC -ի հատման կետն է, որտեղ

$$BC \perp b_1Ob_2, \quad AC \perp a_1Oa_2:$$

CAO և CBO ուղղանկյուն եռանկյունների ընդհանուր ներքնածիղք OC -ն է: Հետո է համոզվել, որ OC -ի երկարությունը անկախ է A և B ծայրերի դիրքերից a_1Oa_2 և b_1Ob_2 ուղիղների վրա:

Իրոք, տանենք BF . OA և նշանակենք

$$OA = a, \quad OB = b, \quad BC = h, \quad AB = l, \quad OC = p:$$

Այսպիսով

$$OF = b \cos \alpha, \quad FA = h \sin \alpha, \quad l^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

$$OBC \text{ եռանկյունը տրոհվում է } p^2 = b^2 + h^2$$

Մյուս կողմից

$$a = b \cos \alpha + h \sin \alpha.$$

ախտեղից

$$h = \frac{a - b \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad h^2 = \left(\frac{a - b \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

և

$$p^2 \sin^2 \alpha = b^2 \sin^2 \alpha + (a - b \cos \alpha)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = l^2,$$

$$p = OC = \frac{l}{\sin \alpha} = \text{const.}$$

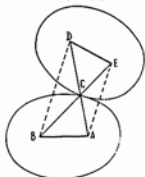
Այս նշանակում է, որ տնշարժ Q հարթություն վրա ակնթիվ թարթալին կենտրոնները միշտ գտնվում են $\frac{l}{\sin \alpha}$ հեռավորության վրա O կետից. այսինքն տնշարժ ցենտրոիդը S շրջանագիծն է, որի կենտրոնն է O , իսկ շառավիղը $\frac{l}{\sin \alpha}$:

Որպեսզի որոշենք շարժական ցենտրոիդի ձևը, միացնենք AB տնտիտիոնի հատվածին OC տրամագիծ ունեցող S շրջանագիծը: Այժմ AB հատվածի հետ շարժվում է S շրջանագիծը և աճյակն, որ S -ի կետերը հաջորդաբար տնցնում են O կետով, իսկ O -ին տրամագծորեն հակադիր կետը ($C, C', C'' \dots$) միշտ հանդիսանում է ակնթարթալին կենտրոն:

Այսպիսով S շրջանագծի կետերը հաջորդաբար դառնում են ակնթարթալին կենտրոն. ուստի S -ը շարժական ցենտրոիդն է:

Ցենտրոիդներ հանգիստացող շրջանագծերը իրար շոշափում են ակնթարթալին կենտրոնում, ինչպես և պետք է լինի:

բ) Հակադրագհեռակողմ կալվում է չորս տնտիտիոնի հատվածներով կազմված հարթ $ABDE$ քառանկյունը, որում (նկ. 6—14) հակադիր կողմերի երկարությունները իրար



Նկ. 6—14

հավասար են՝ $AB = DE = a$, հասկաց կողմերի երկարություններն իրար հավասար են՝ $AD = BE = b$, անկյունները կարող են փոփոխվել:

Լենթադրենք, որ AB կողմը անշարժ է և որոշենք հակադիր DE կողմի ցենտրոնները:

Քանի որ AB կողմը անշարժ է, D և E կետերի հետագծերը γ և ε շրջանագծերն են, որոնց շառավիղը հավասար է b , իսկ կենտրոններն են համապատասխանաբար A և B :

Համաձայն [6—A] ա-ի երկու (D , E) կետերի հետագծերով հնարավոր է որոշել DE հապավոր անշարժ և շարժական ցենտրոնները γ -ին ուղղահայաց է AD , ε -ին ուղղահայաց է BE , առանցիկ § 6, 3, 1-ր-ի հիման վրա եզրակացնում ենք, որ DE -ի անկյունաբաժան C կենտրոնը AD -ի և BE -ի համասն կետն է:

Ծնարհով ADE և BEA եռանկյունների հավասարությունը

$$\angle BEA = \angle DAE$$

նման պատճառով

$$\angle ADB = \angle EBD,$$

այնպես որ CED և BCA եռանկյունները հավասար են՝

$$CE = CA, \quad CD = CB:$$

Հետևաբար

$$BC + CA = EC + CE = b = \text{const}, \quad (a)$$

$$DC + CE = DC + CA = b = \text{const}: \quad (b)$$

(a) պարամետրն բաժարարող կետերի երկրաչափական տեղը էլիպս է, որի ֆոկուսներն են A և B , այդ էլիպսը անշարժ է, շնորհիվ AB հատվածի անշարժությունը, և հանդիսանում է անշարժ ցենտրոնից:

(b) պարամետրն բաժարարող C կետերի երկրաչափական տեղը նույնպես էլիպս է, որի ֆոկուսները (D , E) շարժվում են DE հատվածի հետ: Այս երկրորդ էլիպսը շարժական ցենտրոնիցն է:

Երկու էլիպսները, պարզ է, իրար հավասար են և, ինչպես կանոններ, իրար շոշափում են ընդհանուր C կետում:

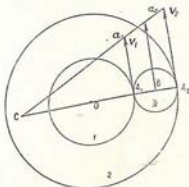
Ըստ էլիպսների հատկությունների C կետում անշարժ էլիպսի նորմալը կիսում է ACB անկյունը, իսկ շարժվող էլիպսի նորմալը կիսում է DCE անկյունը: Բայց այդ անկյունները իրար հավասար են, հետևապես C կետում երկու էլիպսների նորմալները կազմում

են մի ուղիղ: Այստեղից հետևում է, որ նորմալներին ուղղահայաց շոշափողները նախնական պետք է կաղմեն մի ուղիղ, այսինքն C կետում երկու էլիպսները իրար շոշափում են:

§ 6. 6. Խնդիրներ

Ն ն գ ի ր 1: Համակենտրոն 1, 2 շրջանագծերը պատվում են իրենց կենտրոնով անցնող ուղղահայաց տասնյքի շաբլը համապատասխանաբար $\bar{v}_1$ և $\bar{v}_2$ անկյունային արագություններով (նկ. 6—15): D սկալատակը տասնյք սահման գլորվում է 1, 2 շրջանագծերի վրայով: Որտեղ D -ի շարժումը (նկատի ունենալով բոլոր հնարավոր դեպքերը):

Լ ու լ ծ ու մ: D -ի ընդհանուր կետերը 1, 2, շրջանագծերի հետ տեղանկնք A_1, A_2 : OA_1A_2 ուղիղը A_1, A_2 կետերում ուղղահայաց է շրջանագծերին և սկալատակին: A_1 և A_2 կետերի $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ արագությունները ուղղահայաց են OA_1A_2 -ին, այսինքն $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$:



Նկ. 6—15:

Համաձայն § 6, 5, I° բ-ի, D սկալատակի տեղեկություն C կենտրոնը $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ -ի ծայրերով անցնող a_1a_2 և A_1A_2 ուղիղների հատման կետն է:

Պետք է նկատի առնել հետևյալ դեպքերը.

- ա) $\bar{v}_1 \uparrow \bar{v}_2, v_1 < v_2$ բ) $\bar{v}_1 \uparrow \bar{v}_2, v_1 > v_2$
 գ) $\bar{v}_1 \uparrow \bar{v}_2$ դ) $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$

ա դեպքում $\overline{A_1C} \parallel \overline{A_1O}$, բ դեպքում $\overline{A_1C} \parallel \overline{OA_1}$, գ դեպքում C -ն գտնվում է A_1A_2 հատվածի վրա (A_1 և A_2 -ի միջև), դ դեպքում շարժումը համընթաց է, D -ի բոլոր կետերի հետագծերը շրջանագծեր են, որոնց շառավիղները հավասար են OB և որոնցից յուրաքանչյուրը ունի իր կենտրոնը:

ա, բ, գ դեպքերից յուրաքանչյուրի համար տեղեկություն կենտրոնի դիրքի և անկյունային արագության արտահայտությունները գտնելու է ստանալ:

Օգտվենք (6, 2, 9)-ից ընդունելով $\bar{l} = \overline{A_1 A_2}$, կառանանք

$$\bar{v} = \frac{\overline{A_1 A_2} \times (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{(A_1 A_2)^2},$$

Այստեղ աշ մասի բոլոր մեծությունները խնդրի տվյալներն են: C ակնթաքթալին կենտրոնի դիրքը որոշելու նպատակով օգտվենք այն հանգամանքից, որ D -ն գլորվում է առանց սահելու և արդ պատճառով 1 շրջանագծի A_1 կետի $\bar{v}_1 = \bar{v} \times r_1$ արագությունը հախաար է D -ի A_1 կետի $\bar{v} \times C\bar{A}_1$ արագությունը.

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \times r_1 = \bar{v} \times C\bar{A}_1.$$

$$\text{այստեղից } \bar{v} \times (\bar{v}_1 \times r_1) = \bar{v} \times (\bar{v} \times C\bar{A}_1)$$

կամ, քանի որ

$$\bar{r}_1 \perp \bar{v}, \quad C\bar{A}_1 \perp \bar{v}$$

ապա

$$-r_1 (\bar{v} \cdot \bar{v}_1) = -C\bar{A}_1 \bar{v}^2,$$

որտեղից

$$\overline{A_1 C} = \frac{-r_1 (\bar{v} \cdot \bar{v}_1)}{\bar{v}^2}.$$

B -ն $A_1 A_2$ -ի միջնակետն է. ըստ (6, 3, 2)-ի

$$\bar{v}_B = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2}; \quad \bar{v}_B = \bar{v} \times \overline{CB}:$$

Մյուս կողմից B -ի հետափոխության համար O -ից, $OB = \frac{r_1 + r_2}{2}$

հետևապես կարելի է պատկերացնել, որ $\overline{OB}$ շառավիղ-վեկտորը պատվում է O -ով անցնող և շրջանագծերի Q հարթությունը ուղղահայաց առանցքի շուրջը Ω անկլունային արագությամբ. ընդ որում

$$\bar{v}_B = \Omega \times \overline{OB}:$$

Համառոտեցնելով $\bar{v}_B$ -ի երկու արտահայտությունները, ստանում ենք

$$\bar{v} \times \overline{CB} = \Omega \times \overline{OB}$$

և

$$\overline{OB} \times (\bar{v} \times \overline{CB}) = \overline{OB} \times (\Omega \times \overline{OB}).$$

նկատի ունենալով, որ

$$\bar{\omega} \perp \overline{OB}, \quad \bar{\Omega} \perp \overline{OB}$$

աճենք

$$\bar{\Omega} (OB)^2 = \bar{\omega} (\overline{OB} \cdot \overline{CB}),$$

որտեղից

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} \frac{\overline{OB} \cdot \overline{CB}}{(OB)^2}, \quad \Omega = \omega \left| \frac{CB}{OB} \right|$$

(որովհետեւ $\overline{CB} \parallel \overline{OB}$). Ընդհանուր առմամբ $\bar{\Omega} \neq \omega$:

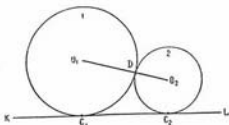
Ենթադրենք, որ $\bar{\omega}_1$ և $\bar{\omega}_2$ անկյունային արագությունները (և հետևապես A_1, A_2 կետերի արագությունների չափերը՝ v_1, v_2) հաստատուն են:

Միաժամանակ հաստատուն կլինեն ω, A_1C, CB . հետևապես նաև CO , այսինքն 1, 2 շրջանագծերի պտտումների շնորհիվ BOC ուղիղը նույնպես կպտտվի՝ $\bar{\Omega}$ անկյունային արագությամբ և C կետը կդժի շրջանագիծ, որի կենտրոնն է O -ն, իսկ շառավիղը OC -ն: Այդ շրջանագիծը անշարժ ցենտրիդն է:

Քանի որ BOC ուղիղը պտտվում է $\bar{\Omega}$ անկյունային արագությամբ, ակնթաթկալին կենտրոնի արագությունը (շարժական ցենտրիդի զրոյում արագության անշարժի վրայով) հավասար է

$$\bar{\Omega} \times \overline{OC}:$$

Խնդիր 2: 1, 2 սկալառակները, որոնց O_1, O_2 կենտրոնները միացված են անփոփոխելի ձողով, զրոյում են առանց սահելու KL ուղղի վրայով (նկ. 6—16):



Նկ. 6—16:

Բնութագրել սկալառակների շարժումները և որոշել արագությունները ընդհանուր D կետում:

Լ ու ծ ու մ: Ինչպես գիտենք, սկալառականները անթափանցելի կենտրոններ հանդիսանում են համապատասխանաբար C_1 , C_2 կետերը: Անախտելի անկյունային արագությունները $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, ստանում ենք սկալառականների O_1 , O_2 կենտրոնների արագությունները՝

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{\omega}_1 \times \overline{C_1 O_1}, & \bar{v}_2 &= \bar{\omega}_2 \times \overline{C_2 O_2} \\ \text{ընդ որում } \bar{v}_1 &\parallel \bar{v}_2 & \text{և } \overline{C_1 O_1} &\parallel \overline{C_2 O_2} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Հետ է համոզվել, որ $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$: Իսկապես $\overline{O_1 O_2}$ անախտելի համաձայն շարժման բնիկացրում մնում է ինքն իրեն պարզանա, այսինքն կատարում է համընթաց շարժում, ուստի

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \quad (b)$$

Այժմ (a)-ից ստանում ենք, որ $\bar{\omega}_1 \parallel \bar{\omega}_2$, այսինքն սկալառականների պատասխանը կատարվում են միևնույն կողմը:

Քանի որ ω_1 և ω_2 աղյուսակապ են սկալառականների հարթությունը, ապա

$$\bar{\omega}_1 \perp \overline{C_1 O_1}, \quad \bar{\omega}_2 \perp \overline{C_2 O_2},$$

այսպիսով (a) ու (b)-ն տալիս են՝

$$\omega_1 C_1 O_1 = \omega_2 C_2 O_2$$

կամ՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

որտեղ R_2 , R_1 2 և 1 սկալառականների շառավիղներն են:

Համաձայն (6, 2, 8)-ի

$$\bar{v}_{1D} - \bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1 D}, \quad \bar{v}_{2D} - \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2 D}, \quad (c)$$

որտեղ D -ն սկալառականների ընդհանուր կետն է, իսկ $\bar{v}_{1D}$ և $\bar{v}_{2D}$ նշանակում են համապատասխանաբար D -ի արագությունները, երբ D կեսը պատկանում է առաջին կամ երկրորդ սկալառականին:

Այս երկու համապատասխանների աջ մասերը հակադարձան են (որովհետև $\bar{\omega}_1 \parallel \bar{\omega}_2$, $\overline{O_1 D} \parallel \overline{O_2 D}$) և ըստ Հափի հավասար:

Այդ պատճառով (c)-ից ու (b)-ից ստանում ենք

$$\bar{v}_{1D} - \bar{v}_{2D} = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1 D} - \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2 D} = 2\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1 D},$$

Քանի որ

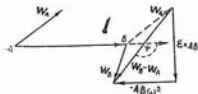
$$O_1 D = R_1, \quad O_2 D = R_2$$

ձախ մասի չափը հավասար է

$$2\omega_1 R_1 = 2v_1:$$

§ 6, 7. Հարթ պատկերի կետերի արագացումներ

1°. Քանի որ $P|Q$ շարժման պոտման առանցքի ուղղությամբ անփոփոխ է, P պատկերի երկու կետերի արագացումների տարբերության համար կիրառելի է (5, 8, 2)-ը Փոխարինելով C -ն B -ով իսկ B -ն A -ով, ունենք (նկ. 6—17),



Նկ. 6—17:

որտեղ

$$\vec{w}_Q - \vec{w}_A = \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} - \overline{AB} \omega^2, \quad (6, 7, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \frac{d\omega}{dt} \quad P|Q \text{ շարժման անկյունային արագացում է:} \\ \vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}, \quad \vec{\varepsilon} \perp P, \quad \vec{\varepsilon} \perp Q, \end{aligned} \right\} \quad (6, 7, 2)$$

(6, 7, 1) կարելի է ստանալ նաև, ածանցելով բոտ է-ի

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overline{AB}$$

առնչությունը, եթե նկատի առնենք, որ

$$\vec{\omega} \perp \overline{AB} \quad \text{և} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{AB}) = -\overline{AB} \omega^2,$$

(6, 7, 1)-ի բոլոր անդամները դառնում են P, Q հարթությունների վրա, իսկ աջ մասի երկու անդամները իրար ուղղահայաց են:

Համաձայն (6, 7, 2)-ի կամ $\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$, կամ $\vec{\varepsilon} \perp \vec{\omega}$, առաջին դեպքում $P|Q$ շարժումը կոչվում է արագացող, իսկ երկրորդ դեպքում՝ դանդաղող:

(6, 7, 1) առնչությունը ճիշտ է P պատկերի չուրաքանչյուր դուրյալ կետերի նկատմամբ: $\vec{\varepsilon} \times \overline{AB}$ և $-\overline{AB} \omega^2$ բաղադրիչների ուղղահայացության շնորհիվ (6, 7, 1)-ի աջ մասի չափը հավասար է $AB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$, այդ չափը ողիղ համեմատական է AB -ին, իսկ համեմատականության գործակիցը $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$ նույնն է P պատկերի բոլոր կետերի համար:

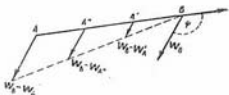
$\bar{z} \times \overline{AB} - \overline{AB} \omega^2$ տարրերությունը $\overline{AB}$ -ի հետ կազմում է բաժնի անկյուն, որի տանգենսը, սինուսը և կոսինուսը հավասար են

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{z}{x^2}, \quad \sin \phi = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \omega^2}}, \quad \cos \phi = -\frac{\omega^2}{\sqrt{z^2 + \omega^2}}, \quad (6, 7, 3)$$

ϕ անկյունը նույնն է P պատկերի լուրջանջուր գույք կետերի համար:

2^o. Ապացուցենք, որ լուրջանջուր մոմենտ P -ի կետերից մեկի արագացումը զրո է (նկ. 6—18):

Իրոք, ենթադրենք, B -ի արագացումը ($\overline{w}_B$) արված է. տանենք B կետից ալնպիսի կիսաուղիղ BA' , որ $\overline{A'B}$ -ն կազմի $\overline{w}_B$ -ի հետ (6, 7, 3)-ով որոշված ϕ անկյունը՝



Նկ. 6—18:

$$\angle (A'B, \overline{w}_B) = \phi:$$

Այս կիսաուղիղի բոլոր ($A', A'', \dots$) կետերի համար ($\overline{w}_B - \overline{w}_{A'}$), ($\overline{w}_B - \overline{w}_{A''}$) տարրերությունները նույնպես կազմում են ϕ անկյուն $\overline{A'B}$ -ի հետ, այսինքն ($\overline{w}_B - \overline{w}_{A'}$) $\uparrow\uparrow\overline{w}_B$, ($\overline{w}_B - \overline{w}_{A''}$) $\uparrow\uparrow\overline{w}_B$:

Ըստ 1^o-ի $|\overline{w}_B - \overline{w}_{A'}|$ տարրերությունը ուղիղ համեմատական է $A'B$ -ին, ուստի կիսաուղիղի վրա միշտ հնարավոր է ընտրել մի ալնպիսի A կետ, որ բավարարի

$$\overline{w}_B - \overline{w}_A = \overline{w}_B$$

պայմանին, այսինքն

$$\overline{w}_A = 0:$$

Այս դատադրություններում ենթադրվում է, որ ω և z -ը միաժամանակ զրո չեն և այդ դեպքում A կետը միակն է:

Իսկ, եթե միաժամանակ $\omega = 0$, $z = 0$, ապա (6, 7, 1) տալիս է

$$\overline{w}_B - \overline{w}_A = 0, \quad \overline{w}_B = \overline{w}_A.$$

այսինքն P պատկերի B , A և բոլոր մյուս կետերի արագացումները իրար հավասար են: Եվ այդպես էլ պետք է լինի, որով-

հետև արդ գեղարվեստ շարժումը կամ համընթաց է, կամ ակնթարթորեն համընթաց է:

Պետք է նկատի առնել, որ բնդհանուր առմամբ ω , z (և հետևապես $z \times \overline{AB} - \overline{AB}\omega^2$) ժամանակի ֆունկցիաներ են, արդ պատճառով A կետը ինչպես նաև արագությունների ակնթարթային C կենտրոնը, անընդհատ փոփոխում է իր զիւրքը P և Q հարթության մեջ:

A կետը կոչվում է արագացումների ակնթարթային կենտրոն: Այսպիսով մենք հանգեցրինք հետևյալ արդյունքի.

[6—G] Եթե ω և z -ը միաժամանակ զրո են, P պատկերի շարժումը համընթաց է, կամ ակնբարբորեն համընթաց է:

Եթե ω և z -ից մեկը զրո չէ, P պատկերը ունի մի (A) կետ, որի արագացումը զրո է, և որը կոչվում է արագացումների ակնբարբային կենտրոն:

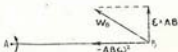
Արագացումների կենտրոնի զիրքը բնդհանուր առմամբ անընդհատ փոփոխվում է թե P պատկերի և թե Q անշարժ հարթության մեջ:

3°. Եթե A կետի արագացումը $\overline{\omega A} = 0$, (6, 7, 1)-ը վեր է ածվում

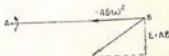
$$\overline{\omega B} = z \times \overline{AB} - \overline{AB}\omega^2 \quad (6, 7, 4)$$

առնչությամբ, որտեղ B -ն P պատկերի կամայական կետն է:

(6, 7, 1)-ից պարզ է, թե ինչպես պետք է կառուցել B կետի $\overline{\omega B}$ արագացումը, երբ տված են z , ω և A կետը (նկ. 6—19ա, բ). Նկ. 6—19ա-ում $z \uparrow \omega$, նկ. 6—19բ-ում $z \downarrow \omega$: (6, 7, 4)-ից բխում են արագացումների կենտրոնի հատկությունները:



Նկ. 6—19ա



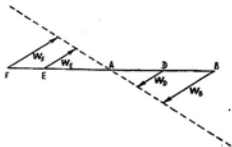
Նկ. 6—19բ

ա) [6—G'] Արագացումների ակնբարբային կենտրոնն անցնող ուղղի բոլոր $B, D, E, F, \dots$ կետերի արագացումները իրար զուգահեռ են: (Նկ. 6—20):

A -ի միջնույն կողմը դասավորված կետերի արագացումները համազուգահեռ են. A -ի տարրեր կողմերը դասավորված կետերի արագացումները հակազուգահեռ են:

բ) Հաժիտարը Հափի արագացումները ունեցող կետերի երկրա-
Հաժիտական տեղը շրջանագիծ է, որի կենտրոնն է A -ն:

գ) $[G-G'']$ Յուրաքանչյուր մոմենտ J պատկերի կետերի
արագացումները այնպիսիք են, կարծես լին P -ն պտտվում է
անկյունային արագությունով ω և ε անկյունային արագացումով



Նկ. 6 շտ.

անշարժ առանցքի շուրջը,
որը ուղղահայաց է P -ին
և անցնում է A կետով:

Յուրաքանչյուր (B) կե-
տի արագացումը կազմում
է AB -ի հետ

$$\varphi = \arctg \left(-\frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)$$

անկյուն, որը միեւնույնն է
 P -ի բոլոր կետերի համար:

§ 6. Ց. Արագացումների կենտրոնի դիրքի անալիտիկ որոշումը

1. Արագացումների կենտրոնի դիրքը որոշելու համար, բազ-
մապատկենք $\vec{\varepsilon}$ -ը վեկտորապես (6, 7, 4)-ի երկու մասով՝

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_B = \vec{\varepsilon} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) - (\vec{\varepsilon} \times \vec{AB}) \omega^2,$$

Համաձայն (6, 7, 4)-ի

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{AB} \omega^2 = (\vec{\omega}_B + \vec{AB} \omega^2) \omega^2,$$

միտս կողմից. $\vec{\varepsilon} \perp \vec{AB}$, $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{AB} = 0$ և այդ պատճառով

$$\vec{\varepsilon} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{AB}) = -\vec{AB} \varepsilon^2,$$

Այստեղից, նկատի առնելով, որ $-\vec{AB} = \vec{BA}$, ստանում ենք

$$\vec{BA} = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_B + \vec{\omega}_B \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (6, 8, 1)$$

2. Համեմատելով (6, 8, 1)-ը $\vec{BC}$ -ի (6, 2, 4) արտահայտու-
թյան հետ՝

$$\vec{BC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{\omega}_B}{\omega^2}$$

(որտեղ $\vec{\omega}$ -ն արագության վեկտորն է կենտրոնն է), տես-

նույն էնք. որ ընդհանուր առմամբ $\overline{BA} \neq \overline{BC}$, այսինքն ընդհանուր առմամբ արագությունների և արագացումների ակնթարթային կենտրոնները չեն համընկնում:

Համեմատելով հարթ պատկերի $P|Q$ շարժումը և կարծր մարմնի պտտումը անշարժ առանցքի շուրջը, նկատում ենք զգալի տարբերություն:

Իրոք, դիցուք B -ն կարծր մարմնի կետերից մեկն է. տաննք B -ով պտտման առանցքին ուղղահայաց հարթությունը, անվանենք հարթության և առանցքի հատման կետը C , իսկ $\overline{CB}$ նշանակենք φ : Բաց (5, 3, 8) և (5, 8, 5)-ի

$$\overline{v_B} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \overline{\omega} \times \overline{CB},$$

$$\overline{\omega_B} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} = \overline{\varepsilon} \times \overline{CB} = \overline{CB}\omega^2:$$

Համադրենք այս տոնջությունները (6, 2, 6) և (6, 7, 4)-ի հետ՝

$$\overline{v_B} = \overline{\omega} \times \overline{CB}$$

$$\overline{\omega_B} = \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} = \overline{AB}\omega^2:$$

Կարծր մարմնի դեպքում, երբ պտտման առանցքը անշարժ է, թե արագությունը և թե արագացումը արտահայտվում են միևնույն $\overline{\omega} = \overline{CB}$ -ի միջոցով. իսկ P պատկերի $P|Q$ շարժման դեպքում ունենք $\overline{CB}$ -ն արագության համար և $\overline{AB}$ -ն արագացման համար, ընդ որում A և C -ն ընդհանուր առմամբ չեն համընկնում:

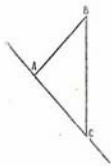
Բացի այդ $\overline{\varepsilon} \times \overline{CB}$ և $(-\overline{CB}\omega^2)$ հանդիսանում են համապատասխանաբար արագացման շոշափող և նորմալ բաղադրիչները. իսկ $\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}$ և $(-\overline{AB}\omega^2)$ ըստ ձևի բոլորովին նման են $(\overline{\varepsilon} \times \overline{CB})$ -ին և $(-\overline{CB}\omega^2)$ -ին, բայց ոչ $\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}$ -ն է հանդիսանում շոշափող արագացում և ոչ էլ $(-\overline{AB}\omega^2)$ -ն նորմալ արագացում: Եվ իրոք, նորմալ արագացումը ուղղահայաց է արագությանը, այսինքն դուգահեռ է $\overline{CB}$ -ին, իսկ $(-\overline{AB}\omega^2)$ դուգահեռ է $\overline{AB}$ -ին: Նման պատճառարանություն տեղի ունի նաև $(\overline{\varepsilon} \times \overline{AB})$ բաղադրիչի նկատմամբ (Տես ներքևում բերված խնդիրը):

Այդ պատճառով արագացման $\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}$ բաղադրիչը կոչվում է պտտողական տրագացում, իսկ $(-\overline{AB}\omega^2)$ բաղադրիչը՝ կենտրոնածից արագացում:

Խնդիր: Որոշել P պատկերի այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց պտտողական արագացումը համընկնում է շոշափող

արագացման հետ, իսկ կենտրոնածիղ արագացումը հաշվառար է նորմալ արագացմանը:

Լ ա ռ ծ ա ռ մ: Ըստ խնդրի պայմանի (նկ. 6—21), ալգոլիտի B կետի



համար $\vec{w}_z = z \times \vec{AB}$, իսկ $\vec{w}_n = -\vec{AB} \omega^2$: Մյուս կողմից $\vec{w}_n \perp \vec{v}$, իսկ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{CB}$. Եթե $\vec{v} \perp \vec{CB}$, հետևաբար $\vec{w}_z$ և $\vec{z} \times \vec{AB}$ նույնպես ուղղահայաց են $\vec{CB}$ -ին, որից բխում է, որ

$$(\vec{z} \times \vec{AB}) \cdot \vec{CB} = 0$$

կամ

$$\vec{z} \cdot (\vec{AB} \times \vec{CB}) = 0:$$

Քանի որ $\vec{z} \perp P$ հարթությանը, այդ խառը արտադրյալը կլինի դրո միայն այն դեպքում, երբ $\vec{AB} \times \vec{CB} = 0$ այսինքն $\vec{AB} \parallel \vec{CB}$ և որովհետև $\vec{AB}$ և $\vec{CB}$ -ն ունեն ընդհանուր

B կետը, ապա կադում են մի ուղիղ: Այսպիսով B կետերի երկրաչափական տեղը այն ուղիղն է, որ անցնում է արագությունների և արագացումների տվյալներով կենտրոններով:

Նկ. 6—21:

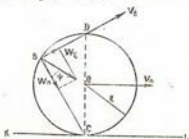
§ 6. 9. ԽՈՐԱԿՐՈՒՄ

Խնդիր 1: Շրջանը գլորվում է առանց սահելու KL ուղղի վրայով (նկ. 6—22): Շրջանի կենտրոնի արագությունը հաստատուն է: Որոշել շրջանի կետերի արագացումները, նրանց շոշափող և նորմալ բաղադրիչները, արագացումների տվյալներով կենտրոնը:

Լ ա ռ ծ ա ռ մ: Քանի որ շրջանի (O) կենտրոնի արագացումը զրո է O -ն արագացումների կենտրոնն է:

Բացի այդ $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{CO}$,

$v_0 = \omega CO$, $\omega = \frac{v_0}{CO} = \text{const.}$ Հետևապես անկյունային արագացումը դրո է, $\vec{z} = 0$:



Նկ. 6—22:

և միավոր վեկտորը ուղղահայաց է շրջանագծի և ուղղի հարթությանը. քանի որ $\dot{\varphi} = \text{const}$, $\ddot{\varphi} = 0$: Այսպիսով

$$\bar{\omega} = \text{const}, \quad \dot{\bar{\omega}} = 0: \quad (a)$$

Նախ դանենք $\bar{\omega}_B$ -ի արտահայտությունը: O -ն անշարժ է, ուստի կարելի է որպես B -ի շառավիղ-վեկտոր ընդունել $\overline{OB}$,

$$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB},$$

որտեղ $\overline{OC} = R\dot{i}$, $\overline{CB} = -R\varphi\dot{j}$, R -ը շրջանագծի շառավիղն է:

Նկատի առնելով, որ $\frac{d\dot{i}}{dt} = \dot{j}\dot{\varphi}$, $\frac{d\dot{j}}{dt} = -\dot{i}\dot{\varphi}$, ստանում ենք

$$\bar{\omega}_B = \frac{d\overline{OB}}{dt} = \frac{d(R\dot{i} - R\varphi\dot{j})}{dt} = R(\dot{j}\dot{\varphi} - \dot{j}\dot{\varphi} + \dot{i}\varphi\dot{\varphi}) = R\varphi\dot{\varphi}\dot{i},$$

քանի որ $\ddot{\varphi} = 0$,

$$\bar{\omega}_B = \frac{d\bar{\omega}_B}{dt} = R(\varphi\dot{i} + \varphi\dot{\varphi}\dot{j}) = R\varphi^2(\dot{i} + \varphi\dot{j}), \quad (b)$$

Այժմ որոշենք արագացումների A ակնթարթային կենտրոնի զիրքը. $(G, S, 1)$ -ի և (b) -ի հիման վրա

$$\bar{B}\lambda = \frac{\bar{\omega}_B}{\omega^2} = R(\dot{i} + \varphi\dot{j}) = \overline{BC} + R\dot{i},$$

իսկ վերևում ստանդից տեսնում ենք, որ

$$\overline{BO} = \overline{BC} - R\dot{i}.$$

Այսպիսով A -ն և շրջանի O կենտրոնը սիմետրիկ են BD ուղղի նկատմամբ:

Օգտվելով $(G, \tau, 1)$ -ից, (b) -ից և (a) -ից, հեշտ է որոշել C կետի արագացումը՝

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_B = -\overline{BC}\omega^2,$$

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_B - \overline{BC}\omega^2 = R\omega^2(\dot{i} + \varphi\dot{j}) - R\varphi\omega^2\dot{j} = R\omega^2\dot{i},$$

Գրելով B -ի փոխարեն C $(G, \tau, 4)$ -ից ստանում ենք (a) -ի հիման վրա նախ արտահայտությունը $\bar{\omega}_C$ -ի համար:

և միավոր վեկտորը ուղղահայաց է շրջանագծի և ուղղի հարթությանը. քանի որ $\dot{\varphi} = \text{const}$, $\ddot{\varphi} = 0$: Այսպիսով

$$\bar{\omega} = \text{const}, \quad \bar{\varepsilon} = 0: \quad (a)$$

Նախ դիտենք $\bar{\omega}_B$ -ի արտահայտությունը: O -ն անշարժ է, ուստի կարելի է որպես B -ի շառավիղ-վեկտոր ընդունել $\bar{OB}$,

$$\bar{OB} = \bar{OC} + \bar{CB},$$

որտեղ $\bar{OC} = R\hat{i}$, $\bar{CB} = -R\varphi\hat{j}$, R -ը շրջանագծի շառավիղն է:

Նկատի առնելով, որ $\frac{d\hat{i}}{dt} = \hat{j}\dot{\varphi}$, $\frac{d\hat{j}}{dt} = -\hat{i}\dot{\varphi}$, ստանում ենք

$$\bar{\omega}_B = \frac{d\bar{OB}}{dt} = \frac{d(R\hat{i} - R\varphi\hat{j})}{dt} = R(\dot{\varphi}\hat{j} - \dot{\varphi}\hat{i} + \dot{\varphi}\hat{i}) = R\varphi\hat{i}:$$

Քանի որ $\ddot{\varphi} = 0$,

$$\bar{\omega}_B = \frac{d\bar{\omega}_B}{dt} = R(\varphi^2\hat{i} + \varphi\dot{\varphi}\hat{j}) = R\varphi^2(\hat{i} + \varphi\hat{j}), \quad (b)$$

Այժմ որոշենք արագացումների A ակնթարթային կենտրոնի դիրքը. $(\theta, \delta, 1)$ -ի և (b) -ի հիման վրա

$$\bar{B}\lambda = \frac{\bar{\omega}_B}{\omega^2} = R(\hat{i} + \varphi\hat{j}) = \bar{BC} + R\hat{i},$$

իսկ վերևում ասածից ստանում ենք, որ

$$\bar{BO} = \bar{BC} - R\hat{i}.$$

այսպիսով A -ն և շրջանի O կենտրոնը սիմետրիկ են BD ուղղի նկատմամբ:

Օգտվելով $(\theta, \gamma, 1)$ -ից, (b) -ից և (a) -ից, հեշտ է որոշել C կետի արագացումը՝

$$\bar{\omega}_C - \bar{\omega}_B = -\bar{BC}\omega^2,$$

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_B - \bar{BC}\omega^2 = R\omega^2(\hat{i} + \varphi\hat{j}) - R\varphi\omega^2\hat{j} = R\omega^2\hat{i},$$

Գրելով B -ի փոխարեն C $(\theta, \gamma, 4)$ -ից ստանում ենք (a) -ի հիման վրա նույն արտահայտությունը $\bar{\omega}_C$ -ի համար:

$$\overline{\omega}_E = -\overline{OE}\omega^2, \quad \overline{\omega}_O = \overline{EO}\omega^2, \quad \overline{\omega}_B = \overline{BO}\omega^2, \quad \overline{\omega}_M = \overline{MO}\omega^2;$$

Այս բոլոր արտահայտություններում ω^2 կարելի է փոխարինել $\left(\frac{v_D}{l}\right)^2$ -ով:

§ 6 10. Հիմնական առնչություններն այլ մեկնաբանում

1°. (6, 2, 8) և (6, 7, 1) բանաձևերից օգտվելով մենք հանգեցինք արագությունների ակնթարթային կենտրոնի, ցենտրոիդների և արագացումների ակնթարթային կենտրոնի զսղափարների և կառուցվածքային արդ զսղափարների վրա P/Q շարժման տեսությունը:

Բայց (6, 2, 8), (6, 7, 1) բանաձևերը կարելի է մեկնաբանել և այլ կերպ: Իրոք, դրենք (6, 2, 8) բանաձևը այսպես՝

$$\overline{v}_B = \overline{\omega} \times \overline{EB} + \overline{v}_E; \quad (6, 10, 1)$$

Նույնը կարելի է դրել և կամալական M կետի համար

$$\overline{v}_M = \overline{\omega} \times \overline{EM} + \overline{v}_E;$$

E կետը, որի արագությունը կադմում է աջ մասերի երկրորդ անդամը, կոչվում է բևեռ, որը ղեկավարվում է

$$\overline{\omega} \times \overline{EB}, \quad \overline{\omega} \times \overline{EM}$$

արտադրյալները ներկայացնում են այն արագությունները, որոնք կունենալին B , M , ... կետերը, եթե P պատկերը պտտվել ω անկյունային արագությամբ P -ին ուղղահայաց և E կետով անցնող առանցքի շուրջը:

Իսկ $\overline{v}_E$ կլինի P պատկերի յուրաքանչյուր կետի արագությունը, եթե P -ն կատարեր համընթաց P/Q շարժում ախտիսի արագությամբ, որը հավասար է E բևեռի արագությանը:

Ասածից հետևում է, որ (6, 10, 1) առնչությունը կարելի է ձևակերպել այսպես.

[6 — H] Ոչ համընթաց P/Q շարժման ղեկավար P պատկերի յուրաքանչյուր (B) կետի արագությունը արտահայտվում է գումարով, որի մի գումարելին հավասար է բնաթված բևեռի արագությանը, իսկ մյուս գումարելին այն արագությունն է, որը կունենար B կետը, եթե P -ն պտտվեր ω անկյունային արագությամբ բևեռով անցնող և P -ին ուղղահայաց առանցքի շուրջը:

Անցնենք արագացման արտահայտութիւնը

$$\overline{\omega}_B - \overline{\omega}_E = \varepsilon \times \overline{EB} - \overline{EB}\omega^2$$

կամ

$$\overline{\omega}_B = \overline{\omega}_E + (\varepsilon \times \overline{EB} - \overline{EB}\omega^2) \quad (6, 10, 2)$$

Փակագծերում գտաւորւած երկու անդամների գումարը ներկայացնում է այն արագացումը, որը կունենար B կետը, եթե P պատկերը պատկեր իրեն ուղղահայաց E -ով անցնող առանցքի շուրջը, ունենալով ω անկյունային արագութիւն ε անկյունային արագացում: Արդիւսով՝

[6, H'] Ոչ համընթաց P/Q շարժման դեպքում P պատկերի յուրաքանչյուր (B) կետի արագացումը արտահայտւում է գումարով, որի մի գումարելին հավասար է ընտրւած բևեռի արագացմանը, իսկ մյուս երկու գումարելիները ներկայացնում են B -ի այն արագացումը, որը կառաջանար P -ի պտտումից բխելով անցնող և P -ին ուղղահայաց առանցքի շուրջը ω անկյունային արագութեամբ և ε անկյունային արագացումով:

§ 6, 11. Կոորդինատային արտահայտւոյուններ

1°. Որոշենք P/Q շարժման դեպքում P -ի կետերի արագութիւնների, արագացումների և երկու ցնդորոշիչների համաստեղութիւնների կոորդինատային արտահայտւոյունները:

Վերցնենք երկու կոորդինատային սիստեմներ՝ $OXYZ$, որի OX և OY առանցքներն անշարժորեն ամրացված են Q անշարժ հարթութիւն հետ, և $oxyz$, որի ox և oy առանցքներն ամրացված են շարժվող P պատկերին (նկ. 6—24): O -ն սովորաբար գիտվում է որպէս բևեռ:

OX , OY , OZ առանցքների միավոր վեկտորներն են $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, իսկ ox , oy , oz առանցքների միավոր վեկտորները՝ $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$: Այս երկու խումբ վեկտորները կազմում են աչ ձևով եռյակներ, արդ պատճառով P -ին ու Q -ին ուղղահայաց $\hat{k}$, $\hat{K}$ վեկտորներն իրար համադրական են՝ $\hat{k} \parallel \hat{K}$:

Ասածից պարզ է, որ $\hat{k} = \hat{K}$

$$\left. \begin{aligned} \text{կամ, քանի որ } \hat{k} &= \hat{i} \times \hat{j}, \quad \hat{K} = \hat{I} \times \hat{J} \\ \text{ապա } \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{I} \times \hat{J} \end{aligned} \right\} \quad (6, 11, 1)$$

Հետևապես

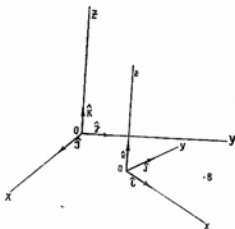
$$\left. \begin{aligned} \omega = \dot{\alpha} \hat{K} = \dot{\omega} \hat{K} \\ \dot{\alpha} = \dot{\omega} = \dot{\alpha} \hat{K} \end{aligned} \right\} \quad (6, 11, 2)$$

0 կետի $\vec{O}\vec{O}$ շառավիղ-վեկտորը, արագութունը և արագացումը կարտահայտվեն $OXYZ$ սխեմեմում արպեն

$$\vec{O}\vec{O} = \dot{I}X_0 + \dot{J}Y_0 \quad (6, 11, 3)$$

$$\vec{v}_0 = \dot{I}\dot{X}_0 + \dot{J}\dot{Y}_0 \quad (6, 11, 4)$$

$$\vec{\omega}_0 = \dot{I}\ddot{X}_0 + \dot{J}\ddot{Y}_0 \quad (6, 11, 5)$$



Նկ. 6-21

P պատկերի կամայական B կետի $\vec{O}\vec{B}$ հեռավորությունը, արագություն և արագացման արտահայտությունները $OXYZ$ կոորդինատային սխեմեմում կլինեն՝

$$\vec{O}\vec{B} = \dot{I}X + \dot{J}Y, \quad (6, 11, 6)$$

$$\vec{v} = \dot{I}\dot{X} + \dot{J}\dot{Y}, \quad (6, 11, 7)$$

$$\vec{\omega} = \dot{I}\ddot{X} + \dot{J}\ddot{Y} \quad (6, 11, 8)$$

Նույն B կետի $\vec{O}\vec{B}$ հեռավորությունը, արագությունը և արագացումը $OXYZ$ կոորդինատային սխեմեմում կարտահայտվեն արպեն

$$\vec{oB} = \dot{i}x + \dot{j}y \quad (6, 11, 9)$$

$$\vec{v} = \dot{i}v_x + \dot{j}v_y \quad (6, 11, 10)$$

$$\vec{w} = \dot{i}w_x + \dot{j}w_y, \quad (6, 11, 11)$$

որտեղ v_x, v_y, w_x, w_y -ը $\vec{v}_B$ -ի և $\vec{w}_B$ -ի պրոեկցիաներն են OX և OY առանցքների վրա:

Վերջապես անվանենք $v_{ox}, v_{oy}, w_{ox}, w_{oy}$ O կետի արագություն և արագացման պրոեկցիաները OX և OY առանցքների վրա:

2°. Եթե B կետը պատկանում է P պատկերին, ապա P -ի O և B կետերի համար կիրառելի է (6, 2, 8) բանաձևը՝

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{oB};$$

իսկ ըստ (6, 11, 2), (6, 11, 9) ու (6, 11, 10)-ի

$$\begin{aligned} \dot{i}v_x + \dot{j}v_y &= \dot{i}v_{ox} + \dot{j}v_{oy} + \vec{\omega} \times (\dot{i}x + \dot{j}y) = \dot{i}v_{ox} + \dot{j}v_{oy} + \\ &+ \vec{\omega}(\dot{j}x - \dot{i}y). \end{aligned}$$

արտեղից ստացվում է

$$v_x = v_{ox} - \vec{\omega}y, \quad v_y = v_{oy} + \vec{\omega}x, \quad (6, 11, 12)$$

Եթե B -ի փոխարեն վերցված է P -ի այն (C) կետը, որը գիտվող մոմենտում հանդիսանում է արագությունների ակնթարթային կենտրոն, ապա

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad y = y_C, \quad x = x_C$$

և (6, 11, 12)-ից ստանում ենք C -ի կոորդինատները $OXYZ$ սխեմայում

$$x_C = -\frac{v_{oy}}{\vec{\omega}}, \quad y_C = \frac{v_{ox}}{\vec{\omega}}, \quad z_C = 0, \quad (6, 11, 13)$$

Ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները $OXYZ$ սխեմայում որոշելու համար պետք է

$$\vec{v}_C - \vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{OC} = -\vec{v}_O$$

բանաձևում փոխարինել $\vec{OC}$ -ն $\vec{OC} = \vec{OC} - \vec{OO}$ տարբերությամբ ($\vec{OC} = \vec{OO} + \vec{OC}$), ալգորիտով կստանանք

$$-\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times (\vec{OC} - \vec{OO});$$

Այս բանաձևում $\vec{v}_0$ -ն և $\vec{OC} - \vec{OO}$ կարելի է արտահայտել (6, 11, 4), (6, 11, 6) և (6, 11, 3)-ի միջոցով: Ելժմ

$$(\dot{J}\dot{X}_0 + \dot{J}\dot{Y}_0) = \vec{\omega} \hat{K} \times (\dot{J}X_C + \dot{J}Y_C - \dot{J}X_0 - \dot{J}Y_0)$$

և քանի որ

$$\hat{K} \times \hat{I} = \hat{J}, \quad \hat{K} \times \hat{J} = -\hat{I}$$

ապա

$$X_C = \frac{X_0 \vec{\omega} - \dot{Y}_0}{\vec{\omega}}, \quad Y_C = \frac{Y_0 \vec{\omega} + \dot{X}_0}{\vec{\omega}}, \quad (6, 11, 14)$$

Արտաքանդով (6, 11, 13) և (6, 11, 14)-ից մամանակը, կատանանք շարժական և անշարժ ցենտրոիդների համաարումները կոորդինատային ձևով:

3°. Արագացումների կոորդինատային արտահայտությունները ստանալու համար նպատակահարմար է օգտվել

$$\vec{w}_B - \vec{w}_0 = \vec{z} \times \vec{OB} - \vec{OB} \omega^2$$

սանդուխտների:

Համաձայն (6, 11, 11), (6, 11, 9)-ի սնննք

$$\begin{aligned} (\dot{J}\vec{w}_x - \dot{J}\vec{w}_y) - (\dot{J}\vec{w}_{0x} + \dot{J}\vec{w}_{0y}) &= \vec{z} \hat{K} \times (\dot{J}x + \dot{J}y) - (\dot{J}x + \dot{J}y) \omega^2 = \\ &= \vec{z} (\dot{J}x - \dot{J}y) - (\dot{J}x + \dot{J}y) \omega^2, \end{aligned}$$

որտեղից գտնում ենք

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w_{0x} - zy - x\omega^2, \\ w_y &= w_{0y} + zx - y\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (6, 11, 15)$$

Այստեղ w_x , w_y -ը P պատկերին պատկանող կամալական (B) կետի արագացման պրոեկցիաներն են շարժական OX , OY առանցքների վրա:

Պրոեկտներ w_B և w_0 -ն անշարժ OX , OY առանցքների վրա, փոխարինենք $\vec{OB}$ -ն ($\vec{OB} - \vec{OO}$) տարրերով լամբ, օգտվենք (6, 11, 5) և (6, 11, 8)-ից. ախախտով (նկատի առնելով, որ $\hat{K} \times \hat{I} = \hat{J}$, $\hat{K} \times \hat{J} = -\hat{I}$) կատանանք

$$\ddot{X} = \ddot{X}_0 - \ddot{z}(Y - Y_0) - (X - X_0)\omega^2, \quad (6, 11, 16)$$

$$\ddot{Y} = \ddot{Y}_0 + \ddot{z}(X - X_0) - (Y - Y_0)\omega^2,$$

Փոխարինենք B կետը P -ի արևն (A) կետով, որը գիտվող մոմենտում հանդիսանում է արագացումների կենտրոն, արևինքն ընդունենք (6, 11, 15) և (6, 11, 16)-ում

$$\mathcal{W}_X = 0, \quad \mathcal{W}_Y = 0$$

$$\ddot{X} = 0, \quad \ddot{Y} = 0:$$

Այդ դեպքում (6, 11, 15)-ը տալիս է

$$\mathcal{W}_{OX} = \ddot{z}y_A = X_A\omega^2$$

$$\mathcal{W}_{OY} = y_A\omega^2 = -\ddot{z}X_A:$$

Արտաքսելով արև կրկու համաարույթումներից մի անգամ y_A , մյուս անգամ X_A , կստանանք

$$X_A = \frac{\mathcal{W}_{OX}\omega^2 - \ddot{z}\mathcal{W}_{OY}}{z^2 + \omega^4} \quad (6, 11, 17):$$

$$y_A = \frac{\mathcal{W}_{OX}\ddot{z} + \mathcal{W}_{OY}\omega^2}{z^2 + \omega^4}:$$

Նման ձևով անշարժ $OXYZ$ կոորդինատային սխեմում

$$X_A = \frac{\ddot{X}_0\omega^2 - \ddot{z}\ddot{Y}_0 + X_0(z^2 + \omega^4)}{z^2 + \omega^4} \quad (6, 11, 18):$$

$$y_A = \frac{\ddot{X}_0\ddot{z} + \ddot{Y}_0\omega^2 + Y_0(z^2 + \omega^4)}{z^2 + \omega^4}$$

(6, 11, 17) և (6, 11, 18) կարելի է ստանալ ավելի պարզ ձևով, օգտվելով (6, 8, 1)-ից, արևինքն

$$\overline{OA} = \frac{\ddot{z} \times \overline{\mathcal{W}_O} + \overline{\mathcal{W}_O}\omega^2}{z^2 + \omega^4}$$

և $\overline{OA} = \overline{OO} + \overline{OA}$ անհրաժեշտներից:

§ 6, 12. Լրացուցիչ հեղեկություններ

1°. Բացի արագությունների և արագացումների ակնթալթալին կենտրոններից (C , A) կա մի երրորդ կետ, որը պետանի է P/Q շարժման ավելի մանրամասն քննարկման դեպքում:

Այդ երրորդ կետը կոչանալիքի L , իսկ նրա հետախույրությունը C -ից՝

$$\overline{CL} = \bar{l}.$$

L -ը հարթ պատկերի ալն կետն է, որի արագությունը u հավասար է շարժական ցենտրոիդի գլխման արագությանը գիտվող մոմենտում:

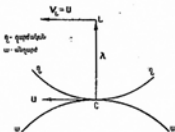
Համաձայն (6, 2, 6)-ի

$$u = \omega \times \overline{CL} = \bar{\omega} \times \bar{l}, \quad (6. 12, 1)$$

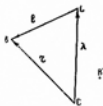
և քանի որ $\bar{\omega}$ -ն ունի ցենտրոիդների ընդհանուր կետի շոշափողի ուղղությունը, $\bar{l}$ -ն պետք է ուղղահայաց լինի ալդ շոշափողին (նկ. 6—25):

Պարզ է, որ C -ի շարժական լինելու հետևանքով L կետը նույնպես պետք է անընդհատ փոփոխի իր դիրքը P և Q հարթությունների վրա: P պատկերի բոլոր կետերի արագությունները տարբեր են, ուստի L -կետը միակն է:

L -ի հետ գիտալիվում է ալն շրջանաղիծը, որի տրամագիծն է $CL = \bar{l}$ (CL -ով բացի արամագծի չափից որոշվում է նաև շրջանաղծի կենտրոնը, ալխնքն շրջանաղիծը լիովին): Այդ շրջանաղիծը կոչվում է շրջման կետերի շրջանաղիծ, իսկ L -ը՝ շրջման կետերի կենտրոն:



Նկ. 6—25:



Նկ. 6—26:

Նշանակենք (նկ. 6—26) P պատկերի կամալական B կետի հետախույրությունը C -ից և I -ից՝

$$\left. \begin{aligned} \overline{CB} = \bar{r}, \quad \overline{LB} = \bar{l}. \\ \text{նկարից պարզ է, որ } \bar{r} = \bar{\lambda} + \bar{l} \text{ կամ } \bar{r} - \bar{\lambda} = \bar{l}; \end{aligned} \right\} (6, 12, 2)$$

ծթե B -ն վերցված է շրջման կետերի շրջանագծի վրա, ապա

$$\bar{l} \perp \bar{r} \text{ և } \bar{r} \cdot \bar{l} = 0; \quad (6, 12, 3)$$

Մյուս բոլոր (շրջանի ներսում կամ շրջանից դուրս գտնվող) կետերի համար

$$\bar{r} \cdot \bar{l} \neq 0.$$

($\bar{r} \cdot \bar{l} > 0$ շրջանից դուրս գտնվող, օրինակ B կետի համար, $\bar{r} \cdot \bar{l} < 0$ շրջանի ներսում գտնվող, օրինակ, B' կետի համար):

2°. $\bar{\lambda}$ -ի չափը կապված է երկու ցենտրոիդների կորուսված շառավիղների հետ: Իրոք, բազմապատկելով (6, 12, 1)-ի երկու մասերը $d\bar{t}$ -ով, ստանում ենք

$$\bar{u}d\bar{t} = (\bar{w}d\bar{t}) \times \bar{\lambda}; \quad (6, 12, 4)$$

Նկատի առնենք, որ $\bar{u}$ -ն — ըստ L կետի սահմանումի—շարժական ցենտրոիդի զիորման արագությունն է, և $\bar{u}d\bar{t} = \bar{v}ds$ ցենտրոիդների ընդհանուր կետի տեղափոխումն է $d\bar{t}$ ժամանակամիջոցում $\bar{w}d\bar{t} = d\bar{z}$ -ն պատկերի պտտման անկյունն է: Գիտենալով, որ (6, 12, 4) արտահայտության երկու մասերն էլ համազուգահեռ են $\bar{z}$ -ին, ստանում ենք

$$ds = \lambda d\varphi \quad \text{կամ} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (6, 12, 4')$$

6—27 ա, բ, գ, նկարներից, որոնցում TCT -ն ցենտրոիդների շոշափողն է իրենց ընդհանուր C կետում, երևում է, որ

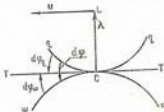
$$d\bar{\varphi} = d\bar{\varphi}_2 - d\bar{\varphi}_1$$

կամ անցնելով թվական արժեքներին՝

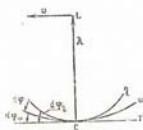
$$d\varphi = d\varphi_2 - d\varphi_1$$

որտեղ $d\varphi_2$ այն անկյունն է, որով կպտտվիր շարժական ցենտրոիդը, զիորվելով ds -ով TCT ուղղի վրայով, իսկ $d\varphi_1$ այն անկյունը, որով կպտտվիր անշարժ ցենտրոիդը, զիորվելով ds -ով նույն TCT ուղղի վրայով:

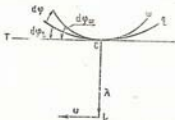
Պարզ է, որ $\sigma=27\omega$ նկարում $d\varphi$ և $d\varphi_2$ պետք է համարվեն դրական, իսկ $d\varphi_\omega$ բացասական. $\sigma=27\rho$ նկարում երևյալ անկյուններն էլ ($d\varphi$, $d\varphi_2$, $d\varphi_\omega$) դրական են:



Նկ. $\sigma=27\omega$:



Նկ. $\sigma=27\rho$:



Նկ. $\sigma=27q$:

Այժմ (σ , 12, 4) կգրվի տվյալն

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d\varphi_2}{ds} - \frac{d\varphi_\omega}{ds}$$

կամ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_\omega}, \quad (6, 12, 5)$$

որտեղ R_2 և R_ω -ն շաբաղական և անշաբաղ ցենտրոիդների կորուսթյան շառավիղներն են բնդհանուր C կետում: R_ω -ն բացասական է $\sigma=27\omega$ նկարում և դրական $\sigma=27\rho$ նկարում:

(6, 12, 5) բանաձևը թույլ է տալիս, գիտնալով λ , R_2 , R_ω մեծություններից երկուսը, որտեղ երրորդը: Օրինակ, եթե անշաբաղ ցենտրոիդը ուղիղ զիծ է, $\frac{1}{R_\omega} = 0$. հետևապես

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R_2}, \quad \lambda = R_2:$$

Եթե G —շնա նկարի ղեպքում ցենտրոիդները նույն R շառավիղ ունեցող շրջանագծեր են, ապա

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R}$$

և այսպիսով

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

3°. P պատկերի կետերի արագացումների համար արդեն առաջիկած են երկու արտահայտություններ՝ $(6, 7, 1)$, $(6, 7, 4)$ ։ Երրորդ, նույնպես կարելու, արտահայտությունը կարելի է արտածել հետևյալ եղանակով։

Դիցուք B -ն P պատկերի կետերից մեկն է, իսկ

$$\vec{r} = \overline{CB}, \quad \vec{\omega} = \overline{\omega} \times \vec{r} = \overline{\omega} \times \overline{CB}$$

$$\overline{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\overline{\omega} \times \overline{CB})}{dt}$$

աղ կետի շառավիղ-վեկտորը, արագությունը և արագացումը։

$$\overline{\omega} = \frac{d(\overline{\omega} \times \overline{CB})}{dt} = \vec{z} \times \overline{CB} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{CB}}{dt}$$

Քանի որ C -ն չի պատկանում P -ին և C -ի արագությունը զրո է, ու $\vec{z}$ հավասար է $\vec{u}$ (շարժական ցենտրոիդի զարժան արագությանը), ապա, նկատի առնելով, որ $\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$, որտեղ O -ն Q հարթության կետերից մեկն է, ունենք

$$\frac{d\overline{OB}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\overline{OC}}{dt} = \vec{u}$$

և

$$\frac{d\overline{CB}}{dt} = \vec{v} - \vec{u},$$

իսկ

$$\overline{\omega} = \vec{z} \times \vec{r} + \overline{\omega} \times (\vec{v} - \vec{u}) \quad (6, 12, 6)$$

Որովհետև $\vec{v} = \overline{\omega} \times \vec{r}$ և համաձայն $(6, 12, 1)$ -ի $\vec{u} = \overline{\omega} \times \vec{r}$, իսկ $\overline{\omega} \perp \vec{r}$, $\overline{\omega} \perp \vec{r}$, ապա

$$\overline{\omega} = \vec{z} \times \vec{r} + (\vec{z} - \vec{r}) \overline{\omega} \quad (6, 12, 6')$$

$(6, 12, 6)$ և $(6, 12, 6')$ բաժանելով կարելի է կիրառել P պատ-

կերի լուրացանչուր կետի համար: Օրինակ, P -ի այն կետի համար, որը համընկնում է C -ի հետ

$$\bar{r} = 0, \quad \bar{v} = 0 \quad \text{և} \quad \bar{w} = -\bar{w} \times \bar{u} = +\bar{w}, \quad (6, 12, 7)$$

P -ի այն կետի համար, որ համընկնում է L -ի հետ, $\bar{r} = \bar{\lambda}$,

$$\bar{w} = \bar{z} \times \bar{\lambda}, \quad (6, 12, 8)$$

(6, 12, 8)-ը ցույց է տալիս, որ երբ $\bar{z} = 0$ (այսինքն $\bar{w} = \text{const}$ կամ w -ն հանգել է իր էքստրեմումին), արագացումների կենտրոնը համընկնում է L -ի հետ:

Ապացուցենք, որ արագացումների կենտրոնը միշտ դասավորված է շրջման կետերի շրջանագծի վրա, A կետի համար (6, 12, 6')-ից ունենք

$$\bar{w}_A = \bar{z} \times \bar{r}_A + (\bar{\lambda} - \bar{r}_A) \omega^2 = 0$$

բազմապատկելով սկալարորեն $\bar{r}_A$ -ով, ստանում ենք

$$\bar{w}_A \cdot \bar{r}_A = \bar{r}_A \cdot (\bar{z} \times \bar{r}_A) + \bar{r}_A \cdot (\bar{\lambda} - \bar{r}_A) \omega^2 = 0$$

կամ, քանի որ $\bar{r}_A \cdot (\bar{z} \times \bar{r}_A) = 0$, իսկ (6, 12, 2)-ի հիման վրա

$$(\bar{\lambda} - \bar{r}_A) \omega^2 = -\bar{r}_A \cdot \bar{r}_A,$$

այսպես

$$\bar{r}_A \cdot \bar{r}_A = 0,$$

այսինքն համաձայն (6, 12, 3)-ի A կետը գտնվում է շրջման կետերի շրջանագծի վրա:

4°. «Շրջման կետերի շրջանագծի» անունը բացատրելու համար վերլուծենք (6, 12, 6') բանաձևով արտահայտված արագացումը նորմալ և շոշափող բաղադրիչների նախ նկատի առնենք, որ (6, 12, 6')-ում սրալես շառավիղ-վեկտորների սկիզբը ընդունված է արագութվունների C կենտրոնը: Այդ պատճառով $\bar{r}$ -ը ուղղահայաց է դիտվող կետի հետագծի շոշափողին: Հետևապես $\bar{z} \times \bar{r}$ արտադրյալը զուգահեռ է այդ շոշափողին, իսկ $(\bar{\lambda} - \bar{r}) \omega^2$ — նայած $\bar{r}$ -ի — կարող է ունենալ ցանկացած ուղղութիւն:

$(\bar{\lambda} - \bar{r}) \omega^2$ արտադրյալի այն բաղադրիչը, որ զուգահեռ է r -ին, կլինի նորմալ արագացումը $\bar{w}_n$: Շոշափող արագացումը հավասար է $\bar{z} \times \bar{r}$ արտադրյալի և $(\bar{\lambda} - \bar{r}) \omega^2$ արտադրյալի $\bar{r}$ -ին ուղղահայաց բաղադրիչի գումարին:

6--28 նկարի վրա C -ն արագությունների տեղափոխման կենտրոնն է. $\vec{CL} = \vec{l}$, իսկ ICK ուղիղը պատկանում է P պատկերին: Իրականք արդ ուղղի կամաչական B կետը.

$$CB = r, \quad \vec{BL} = \vec{CL} - \vec{CB} = \vec{l} - r$$



Նկ. 6--28:

LD -ն L -ից ICK ուղղի վրա իջեցրած ուղղահայացն է. $\vec{BL} = \vec{BD} + \vec{DL}$, $\vec{BD}$ -ն գտնվում է ICK ուղղի վրա: Համաձայն վերը տառերի

$$\vec{BD}\omega^2 = \omega_n$$

$$DL\omega^2 + \frac{1}{2} \times \vec{CB} = \omega_n$$

Նման ձևով E ու F կետերի համար կանենանք համապատասխան արարք

$$r = \vec{CE}, \quad \vec{l} - r = \vec{ED} + \vec{DL}, \quad \omega_n = \vec{ED}\omega^2$$

$$r = \vec{CF}, \quad \vec{l} - r = \vec{FD} + \vec{DL}, \quad \omega_n = \vec{FD}\omega^2$$

Այսպիսով ICK ուղղի բոլոր կետերի նորմալ արագացումները ուղղված են դիտվող կետից դեպի D կետը:

Մինչդեռ այդ կետերի շառավիղ-վեկտորները ($\vec{CB}$, $\vec{CE}$, $\vec{CF}$) սկսվում են C կետում և ուղղված են դեպի B , E և F կետերը, ընդ որում, տե՛ս Նկ. 6--28

$$\vec{BD}\omega^2 \parallel \vec{CB}, \quad \vec{ED}\omega^2 \parallel \vec{CE}, \quad \vec{FD}\omega^2 \parallel \vec{CF}$$

Բաժանենք ICK ուղիղը երեք մասերի՝ միջին CD մասը և ծայրային DK ու CI մասերը:

Այն, ինչ ասված է B -ի նորմալ արագացման մասին, կարելի է կրկնել միջին CD մասի յուրաքանչյուր կետի նկատմամբ:

Այն, ինչ ճիշտ է E կետի նկատմամբ, ճիշտ է DK ծայրային մասի բոլոր կետերի համար:

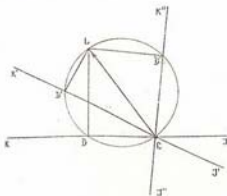
Մայրալին CI մասի յուրաքանչյուր կետի նկատմամբ կիրառելի է F կետի մասին ասվածը:

Այսպիսով, հիշելով, որ կետի նորմալ արագացումը միշտ ուղղված է կետից դեպի հետագծի կորագծյալ կենտրոնը, գալիս ենք հետևյալ նորարացությունը՝

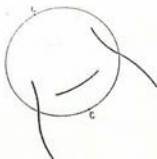
[6—I] Ինքնուրույն մամենում C -ից նայելիս ICK ուղղին, անհնում ենք միջին մասի կետերի հետագծերը ուղուցիկ կողմից, իսկ ծայրամասերի կետերի հետագծերը զոգավոր կողմից:

ICK -ի D կետի նորմալ արագացումը զրո է, իսկ արագությունը զրո չէ. այդ նշանակում է, որ D -ում հետագիծը ունի շրջման կետ:

5. Դիտարկենք (նկ. 6—29ա) P պատկերին պատկանող և C -ում հատվող ուղիղների մի ժամանակ. L կետից իջեցնենք LD , LD' , LD'' ուղղահայացներ փնջի լուրջանջյալ ուղղի վրա. D , D' , D'' կետերը ուղիղ (LD , LD' , LD'') անկյունների գագաթներն են: Փնջի լուրջանջյալ ուղիղը կտրելի է բաժանել միջին (CD , CD' , CD'') և ծայրային (KD , $K'D'$, $K''D''$), (IC , $I'C$, $I''C$) մասերի: Այնպես է, որ D , D' , $D'' \dots$ կետերի երկրաչափական տեղը առն շրջանագիծն է, որի տրամագծերից մեկը CL -ն է:



Նկ. 6—29ա:



Նկ. 6—29բ:

Համաձայն [6—I]-ի D , D' , $D'' \dots$ կետերում հետագծերը ունեն շրջման կետ: Այդ է պատճառը, որ D կետերի երկրաչափական տեղ հանդիսացող շրջանագիծը (կոչվում է շրջման կետերի շրջանագիծ (նկ. 6—29ա)):

Շրջանագծի ներսում գտնվող լուրջանջյալ կետ պատկանում է փնջի ուղիղներից մեկի միջին մասին: Համաձայն [6—I]-ում

ասածի ալի ներքի կետերում հետազոտելի ուսուցիչությունը ուղղված է դեպի C (ախնճն C կետից դիտելիս, այդ կետերից լուսաքանչյուրի հետադիմը տեսնում ենք ուսուցչի կողմից, (նկ. 6—29բ)։

Իսկ շրջանագծից դուրս գտնվող կետերում հետազոտելի զո-
ղավորություններն ուղղված են դեպի C -ն (նկ. 6—29բ)։

6°. Դժվար չէ նաև որոշել P պատկերի այն կետերի երկրա-
չափական տեղը, որոնց շոշափող արագացումները զրո են։

Նկատել, անհերք, որ $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ և $\vec{w}_1 \parallel \vec{v}$, իսկ $\vec{w}_2 \perp \vec{v}$
կազմենք $\vec{v} \cdot \vec{w}$ արտադրյալը, այս արտադրյալը զրո է, երբ կամ
 $\vec{v} = 0$, կամ $\vec{w}_2 = 0$ ։

$\vec{v} = 0$ P -ի այն կետում, որը համընկնում է C -ի հետ։ Այս-
պիսով, արտաքսելով C կետը, կտրելի է որոշել $\vec{w}_2 = 0$ պայմանը
լավարարող կետերի երկրաչափական տեղը, հիշելով

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

անհրաժեշտից։

(6, 12, 6)-ը և $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$ արտահայտությունը տալիս են

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot [\vec{z} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{v} - \vec{u})] = \\ &= \vec{w} \cdot [\vec{r} \times (\vec{z} \times \vec{r}) + \vec{r} \times [\vec{w} \times (\vec{v} - \vec{u})]] \end{aligned}$$

արտահղից

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{z}) \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{w} \cdot \vec{w} [\vec{r} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) - (\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{w} \cdot \vec{r}] = 0$$

կամ, որովհետև

$$\vec{w} \cdot \vec{r} = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{z}) \vec{r} \cdot \vec{r} - w^2 \vec{r} \cdot \vec{u} = 0,$$

հետևապես

$$(\vec{w} \cdot \vec{z}) \vec{r} \cdot \left[\vec{r} - \frac{w^2 \vec{u}}{\vec{w} \cdot \vec{z}} \right] = 0:$$

ընդունենք, որ $\vec{w} \neq 0$, $\vec{z} \neq 0$, այս դեպքում $\vec{w} \cdot \vec{z} \neq 0$ և ստա-
նում ենք

$$\vec{r} \cdot \left[\vec{r} - \frac{w^2 \vec{u}}{\vec{w} \cdot \vec{z}} \right] = 0: \quad (6, 12, 9)$$

(6, 12, 9)-ը ներկայացնում է այն շրջանագծի համաարումը, որը անցնում է C կետով ($r = 0$) և որի տրամագծերից մեկն է

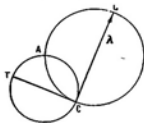
$$\frac{\omega^2}{\omega + \xi}$$

Մի քանի դիտողություններ P -ի այն կետը, որը համընկնում է C -ի հետ, բավարարում է (6, 12, 9)-ին, մայց չի պատկանում $\overline{\omega} = 0$ կետերի երկրաչափական տեղին. այդ մասին ասված է վերևում, իսկ 4⁰-ում ցույց է տրված, որ այդ կետի շոշափող արագացումը՝

$$\overline{\omega} = \lambda \omega^2 \neq 0;$$

Շրջան կետերի շրջանագծեր և նոր դիտված (6, 12, 9) շրջանագծեր հատվում են C կետում և C -ով անցնող $\overline{CL} = \lambda$ և $\overline{CT} = \frac{\omega^2}{\omega + \xi}$ արամագծերը իրար ուղղահայաց են:

Այդպիսի շրջանագծերը կոչվում են օրթոգոնալ: Բացի C -ից այդ շրջանագծերը հատվում են նաև մի երկրորդ կետում: Վերջին հենց արագացումների տեղաթափային A կենտրոնն է (նկ. 6—30):



Նկ. 6—30:

§ 6. 13. Արագացումների եզրագծերի սկաններ

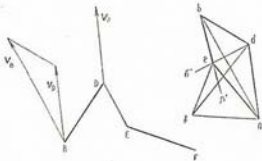
1⁰. Դիտենալով P հարթ պատկերի երկու կետերի ոչ զուգահեռ արագությունների ուղղությունները, կարելի է (տե՛ս § 6, 5) որոշել արագությունների տեղաթափային կենտրոնը և այնուհետև P -ի բոլոր մյուս կետերի արագությունների ուղղությունները:

Երբ հայտնի են երկու կետերի արագությունները միշտ հնարավոր է գտնել բացի արագությունների կենտրոնից նաև տեղաթափային անկյունային արագությունը (օրինակ, օգտվելով (6, 2, 9)-ից) և, հետևաբար, բոլոր մյուս կետերի արագությունները:

Բայց P -ի բոլոր կետերի արագությունները որոշել կարելի է նաև, ունենալով ավելի սահմանափակ տվյալներ, այն է՝ մի կամայական (B) կետի արագությունը և մյուս կամայական կետի

դուրյալները նախնական օգտվելով (G, Z, S) -ից: Իրոք մի կամայական E կետի արագությունը որոշելու համար կարող ենք ըստ (G, Z, S) -ի գրել

$$\vec{v}_E - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{BE}, \quad \vec{v}_E - \vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{DE};$$



Նկ. 6—32:

Այսպիսով $(\vec{v}_E - \vec{v}_B) \perp \vec{BE}$, $(\vec{v}_E - \vec{v}_D) \perp \vec{DE}$ և կթե տանձնք ծ-ից BE -ին ուղղահայաց $b\beta'$, իսկ d -ից DE -ին ուղղահայաց $d\delta'$, ապա $b\beta'$ -ի և $d\delta'$ -ի հատման կետը կլինի e , իսկ $\vec{Oe} = \vec{v}_E$:

Այս վերջին եզրանակով կարելի է ստանալ P -ի ցանկացած կետի արագությունը:

Մտկային ունենալով P -ի կրկու կետերի արագությունները (օրինակ $\vec{v}_B = \vec{Ob}$, $\vec{v}_D = \vec{Od}$) նպատակահարմար է մյուս կետերի արագությունները ստանալ այլ ձևով:

Դիտարկենք $BDEF \dots$ փկտորական շղթան $(\vec{BD} + \vec{DE} + \dots + \vec{EF} \dots)$ (սրբ մասնավոր զեպերում կարող է փերածվել մի բաղմանկլան, օրինակ մի եռանկլան): Հեշտ է կառուցել $BDEF \dots$ -ին համապատասխանող փոքրատառ $bdef \dots$ շղթան:

Իրոք, համաձայն (G, Z, S) -ի

$$\vec{v}_D - \vec{v}_B = \vec{bd} = \vec{\omega} \times \vec{BD}, \quad \vec{v}_E - \vec{v}_D = \vec{de} = \vec{\omega} \times \vec{DE},$$

$$\vec{v}_F - \vec{v}_E = \vec{ef} = \vec{\omega} \times \vec{EF}$$

քնդ որում

$$(\vec{\omega} \times \vec{BD}) \perp \vec{BD}, \quad (\vec{\omega} \times \vec{DE}) \perp \vec{DE}, \quad (\vec{\omega} \times \vec{EF}) \perp \vec{EF};$$

Այս առնչություններից հետևում է՝

ա) $BDEF \dots$ և $bdef \dots$ շղթաների համապատասխան վեկտորները ($\overline{BD}$ և $\overline{bd}$, $\overline{DE}$ և $\overline{de}$) իրար ուղղահայաց են. լուրջանչյուր փոքրատառ վեկտորը դարձված է P -ի պտտման ուղղությամբ 90° անկյունով համապատասխան մեծատառ վեկտորի նկատմամբ:

$$բ) \quad bd : BD = de : DE = ef : EF \dots = \omega \quad (6, 13, 1)$$

գ) ա-ից և բ-ից ելքակացնում ենք, որ երբ $BDEF \dots$ շղթան արված է, ապա, ունենալով փոքրատառ շղթայի կոդմերից մեկը (օրինակ $\overline{bd}$ -ն), կարելի է կառուցել ամբողջ փոքրատառ շղթան և, եթե բացի արված է P -ի սրևէ կետի արագությունը (օրինակ $\overline{v_B} = \overline{Ob}$), կարելի է գտնել O բևեռը ու անունենալ P -ի $D, E, F \dots$ կետերի արագությունները՝

$$\overline{v_D} = \overline{Od}, \quad \overline{v_E} = \overline{Oe} \dots \quad (6, 13, 2)$$

ա-ից և բ-ից բխում է նաև փոքրատառ ($bdef \dots$) և մեծատառ ($BDEF \dots$) շղթաների նմանությունը:

դ) Դիցուք $\overline{EF'} = k\overline{E'F}$ և սկսյալ k դործակիցը կարող է ունենալ ցանկացած դրական կամ բացասական արժեք:

Պարզ է, որ $\overline{v_{F'}} - \overline{v_E} = \overline{ef'} = \omega \times \overline{EF'} = k\omega \times \overline{EF} = k\overline{ef}$: Այսպիսով P -ի մի ուղղի վրա գտնվող երեք E, F, F' կետերի շեղքում

$$\frac{EF'}{EF} = \frac{ef'}{ef} = k,$$

այսինքն, գիտենալով F' կետի դիրքը EF ուղղի վրա, անմիջապես կարելի է սրուշել f' կետի դիրքը ef ուղղի վրա, և, հետևապես F' -ի արագությունը

$$\overline{v_{F'}} = \overline{v_E} + \overline{ef'}$$

կամ

$$\overline{Of'} = \overline{Oe} + \overline{ef'} = \overline{Oe} + k\overline{ef}:$$

Այսպես կառուցված գծագիրը կոչվում է արագությունների պլան և թույլ է տալիս գրաֆիկորեն սրուշել հարթ պտտերի բոլոր կետերի արագությունները:

3°. Ըստ (6, 13, 1)-ի $\overline{v_D} - \overline{v_B} = \omega \times \overline{BD} - \overline{BD}\omega$ արտահայտության աջ մասի երկրորդ գումարելին

$$\overline{BD\omega^2} = -BD \left(\frac{bd}{BD} \right)^2, \quad (6.13.3)$$

Այսպիսով ալի դամարելին կարելի է որոշել. էթե արդեն կատարված է արագացման ներքին պլանը:

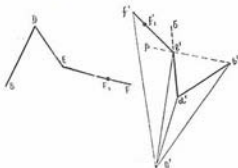
Ալի դեպքում կարելի է նաև որոշել P -ի կամայական D կետի արագացման նորմալ բաղադրիչը. էթե նախնի է D -ի հետագծի կորագծյալ K կենտրոնը:

Իսկապես	$\overline{\omega_{D,u}} = \frac{\dot{n} \overline{\omega_D^2}}{DK}$		
Ըստ (6.13.2)-ի $\overline{\omega_{D,u}}$	$\frac{\dot{n} (Od)^2}{DK}$		(6.13.3')
որտեղ	$\dot{n} = DK$		

4. Անցնենք արագացումների որոշման գրաֆիկական եղանակին:

Նախ ենթադրենք, որ նախնի են P -ի կամայական B և D կետերի արագացումները՝ $\overline{\omega_B}$, $\overline{\omega_D}$: Ներքևում ցույց կարվի թե ինչպես, ստանալով (6.13.3) և (6.13.3')-ից կարելի է որոշել $\overline{\omega_{D,u}}$ -ն, էթե տրված է $\overline{\omega_B}$ -ն:

Նկ. 6—33-ում պատկերված են $\overline{\omega_B} = \overline{O'b'}$ և $\overline{\omega_D} = \overline{O'd'}$: O' -ը ախ կետն է, որից առավելա են P -ի բոլոր կետերի արագացումները և որը կոչվում է բևեռ:



Նկ. 6—33:

Այսպիսով

$$\overline{\omega_D} - \overline{\omega_B} = \overline{O'd'} - \overline{O'b'} = \overline{b'd'}$$

Նշանակենք $(\overline{BD} \sim \overline{b'd'})$ անկյունը α : Վերջենք P -ի այլ երկու կամայական կետեր, որինսկ E, F : Ինչպես հայտնի է տեսությունից $\overline{WF} = \overline{WE}$ տարբերությունը $\overline{EF}$ -ի հետ կազմում է նույն α անկյունը, այսինքն նույնպես $(\overline{E'F'} \sim \overline{e'f'}) = \alpha$: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս կատուցել փոքրատառ $b'd'e'f' \dots$ զնկառարական շղթան, որը նման է $BDEF \dots$ շղթային, և որի դադարձները բազմաբարձ են:

$$\overline{O'b'} = \overline{WB}, \quad \overline{O'd'} = \overline{WD}, \quad \overline{O'e'} = \overline{WE} \dots$$

պալմանին:

Իրոք, b' կետից տանենք b' -ն ուղիղը, որը կազմում է α անկյուն $\overline{BE}$ -ի հետ, իսկ d' -ից տանենք d' -ն ուղիղ, որը կազմում է α անկյուն $\overline{DE}$ -ի հետ: b' -ն և d' -ն հատման կետ կլինի e' -ը: Նույն կզանախով որոշվում է f' կետը:

Քանի որ $\overline{b'd'} = \overline{WD} - \overline{WB}$, ապա պարզ է, որ $\overline{d'e'} = \overline{WE} - \overline{WD}$ և այլն:

Այսպիսով $\overline{WD} + (\overline{WE} - \overline{WD}) = \overline{O'd'} + \overline{d'e'} = \overline{O'e'} = \overline{WE}$, նման ձևով $\overline{O'f'} = \overline{WF}$ և այլն:

Այս գծադիրը կոչվում է արագացումների պլան:

Դիցուք P -ի F_1 կետը գտնվում է EF ուղղի վրա, այսինքն $\overline{EF_1} = k\overline{EF}$ (k գործակիցը կարող է սահմանալ ցանկացած դրական կամ բացասական արժեքը), այնպես որ

$$\vec{z} \times \overline{EF_1} - \overline{EF_1} \omega^2 = k(\vec{z} \times \overline{EF} - \overline{EF} \omega^2):$$

Պարզ է, որ

$$\overline{WF_1} - \overline{WE} = k(\overline{WF} - \overline{WE})$$

կամ

$$\overline{e'f_1} = k\overline{e'f'},$$

այսինքն e', f' և f_1 կետերը մի ուղղի վրա են և

$$e'f_1 : e'f' = EF' : EF:$$

Երկու զիտոդաթյուն:

Ըստ § 6, 6, 1-ի, P -ի կամայական երկու (D, E) կետերի արագացումների տարբերություն չափը՝

$$|\overline{\omega}_E - \overline{\omega}_D| = DE \sqrt{z^2 + \omega^2}$$

միաս կողմից արագացումների պլանը տալիս է

$$|\overline{\omega}_E - \overline{\omega}_D| = d'e'$$

հետևապես

$$d'e' : DE = \sqrt{z^2 + \omega^2},$$

նկ. 6—34-ի վրա

$$d'e'_0 \parallel DE, \quad e'e'_0 \perp DE, \quad \overline{d'e'} = \overline{d'e'_0} + \overline{e'e'_0},$$

Քանի որ

$$\overline{d'e'} = z \times \overline{DE} - \overline{DE}\omega^2$$

նկ. 6—34:

և զրահացնում ենք

$$\overline{e'e'_0} = z \times \overline{DE}, \quad e'e'_0 = zDE, \quad z = e'e'_0 : DE:$$

5°. Յույց տանք, թե զրաֆիկորեն ինչպես է որոշվում կամաքական D կետի արագացումը, երբ հայտնի է կամաքական B կետի արագացումը, եթե տրված են արագությունների պլանը ու D -ի հետադի կորսթյան կենտրոնը (K):

(6, 2, 8)-ից ունենք

$$\overline{\omega}_D = \overline{\omega}_B + (z \times \overline{BD} - \overline{BD}\omega^2)$$

ինդ որում, տես (6, 13, 2), $-\overline{BD}\omega^2$ որոշվում է արագությունների պլանից, իսկ $(z \times \overline{BD}) \perp \overline{BD}$, բայց z -ը դեռ հայտնի չէ:

Մյուս կողմից

$$\overline{\omega}_D = \overline{\omega}_{D,2} + \overline{\omega}_{D,1}$$

և համաձայն (6, 13, 3)-ի

$$\overline{\omega}_{D,2} = \frac{h v_D^2}{DK} = \frac{h (Od)^2}{DK},$$

$$\overline{\omega}_{D,1} \perp \overline{\omega}_{D,2}$$



նկ. 6—35:

Այստեղից բխում է հետևյալ կառուցումը (նկ. 6—35). կամաքական I կետից տանում ենք $\overline{IN} = \overline{\omega}_B$ և նշանակում ենք $\overline{NM} = -\overline{BD}\omega^2$. M -ից տանում ենք $RA R$ ուղիղը ուղղահայաց NM -ին: Եթե անվանենք $\overline{\omega}_D$ -ն IS , պարզ է, որ S կետը պետք է լինի RMR ուղղի վրա:

1-ից ամենևին

$$\overline{IT} = \overline{\omega}_{T,u} = \frac{n\overline{\omega}_D^2}{DK},$$

իսկ T -ից — UTU աղիղը $\perp IT$: Քանի որ $UTU \parallel \overline{\omega}_D$, $\angle S$ կետը պետք է նաև գտնվի UTU -ի վրա:

Այսպիսով S -ը RMR և UTU աղիղների հատման կետն է և $\overline{\omega}_D = \overline{IS}$:

6°. Հետևապես, եթե արված են՝

P պատկերի կամայական (B) կետի արագացումը ($\overline{\omega}_B$), մի առ (D) կետի հետադի կորույթյան կենտրոնը (K) և արագությունների պլանը, շուտա կարելի է նախ գտնել D կետի արագացումը (անս 5°) և այնուհետև գտնել պատկերի ցանկացած կետի արագացումը (անս 4°):

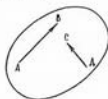
ԿԱՐՄԻ ՄԱՐՄՆԻ ՇԱՐԺԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՊ ԴԵՊՐԵ

§ 7. 1. Կարծր հասվածքների հասկարյուններ

1. Բացարձակ կարծր մարմնի (անփոփոխելի սխառմի) կենտրոնական ուսումնասիրելու համար անհրաժեշտ է լրացնել այդ մարմնի վերաբերյալ § 2, 1-ում տրված տեղեկությունները: Կետերի կամալական սխառմամբ ընտրենք կետերի որևէ դուր՝ A և B , C և D և ալն (նկ. 7—1):

$\vec{b} = \overline{AB}$ վեկտորը (որի սկիզբն ու վերջը հանդիսանում են համապատասխանաբար A և B կետերը), $\vec{c} = \overline{DC}$ վեկտորը և ալն, անվանենք դիտվող սխառմի վեկտորական հատվածներ:

[7—A] Սահմանում: Կետերի այն սխառմը, որի վեկտորական հատվածների չափերը անփոփոխելի են, կոչվում է բացարձակ կարծր մարմին (անփոփոխելի սխառմ):



Նկ. 7—1:

Այսպիսի սխառմները հետադադում անվանվելու են համառոտակի «կարծր մարմիններ», իսկ «կարծր մարմնի վեկտորական հատված» փոխարեն օգտագործելու ենք «կարծր հատված»:

Դիցուք $\vec{b}$, $\vec{c}$ կարծր հատվածներ են, իսկ $\vec{b}$ և $\vec{c}$ միավոր վեկտորները համադուրահե և համապատասխանաբար $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորներին:

$$\vec{b} = \vec{b}\vec{b}, \quad \vec{c} = \vec{c}\vec{c}, \quad (7, 1, 1)$$

որտեղ $\vec{b}$ և $\vec{c}$ -ն, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորական հատվածների չափերն են: Համաձայն [7—A]-ի

$$b = \text{const}, \quad c = \text{const}.$$

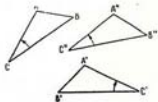
Նույնը վերաբերում է յուրաքանչյուր վեկտորական հասկացման չափին: Կարծր մարմնի զիրքի փոփոխման հետ միաժամանակ փոփոխվում են նրա վեկտորական հասկացմաների զիրքերը և, ընդհանուր առմամբ, ուղղութիւնները, իսկ նրանց չափերը մնում են անփոփոխ:

Այսպէս, օրինակ, կարծր մարմնի երեք զիրքերում նրա երեք կետերը կազմում են ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ եռանկյունները (նկ. 7—2). Ընդհանուր դեպքում BC , $B'C'$, $B''C''$ վեկտորական հասկացմաները միմյանց զուգահեռ չեն, բայց

$$BC = B'C' = B''C'':$$

Նույնը կարելի է ասել և եռանկյուն կազմող միջուս (AB , CA) հասկացմաների մասին:

2°. Ըստ [7—A]-ի ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ հավասար եռանկյուններ են. ուրեմն մարմնի տարրեր զիրքերում նույնանուն (օրինակ C , C' , C'') դասիվածների անկյունները պետք է հավասար լինեն:



Նկ. 7—2:

Հետևապէս՝

[7—B] երկու վեկտորական հասկացմաներով կազմված անկյունը հաստատուն է:

[7—A] և [7—B] դրույթները բերում են կարծր մարմնի ախպիսի սահմանումի, որը շատ հարմար է կիրառութիւնների համար:

Պայմանավորվենք մարմնի վերջնական զիրքը նշել մի շարիտով վերինից, իսկ սկզբնական զիրքին վերաբերող տառերը գրել ստանց ինքեքսի: Այսպէս $\bar{b} = \overline{AB}$ և $\bar{b}' = \overline{A'B'}$ ներկայացնում են $\overline{AB}$ վեկտորական հասկացման կարծր մարմնի սկզբնական և վերջնական զիրքերում (նկ. 7—3):

$$\varphi = \angle(\bar{b}, \bar{c}) \quad \text{և} \quad \varphi' = \angle(\bar{b}', \bar{c}')$$

Հանդիսանում են $\bar{b} = \overline{AB}$ և $\bar{c} = \overline{DC}$ հասկացմաներով կազմված անկյունները մարմնի սկզբնական և վերջնական զիրքերում.

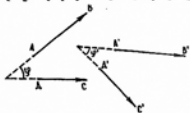
[7—A]-ից և [7—B]-ից հետևում է, որ

$$\left. \begin{aligned} b &= b', \quad c = c', \quad \varphi = \varphi', \quad \cos \varphi = \cos \varphi' \\ &\text{և այդ պատճառով} \quad bc \cos \varphi = b'c' \cos \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (7, 1, 3)$$

կամ, ըստ վեկտորների սկալար արտադրյալի սահմանմանը,

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b}' \cdot \vec{c}' \quad (7, 1, 4)$$

(7, 1, 4)-ը կարծր մարմնի ամենահարմար սահմանումն է. ալ-սինքն կարծր մարմնի լուրջանշյուր երկու վեկտորական հատ-վածները պետք է բավարարեն (7, 1, 4) պայմանին:



Նկ. 7-3:

(7, 1, 4)-ից հետևող մի շարք: եղբակացությունները կենսարկվեն § 9, 1—§ 9, 3-ում, իսկ այժմ մեզ բավական է դիտենալ, որ

[7—C] ա) Կարծր մարմնի համագուգանեա վեկտորական հատվածները միշտ մնում են

համագուգանեա, իսկ հեղագուգանեա վեկտորական հատված-ները՝ հեղագուգանեա.

բ) Կարծր մարմնի հավասար վեկտորական հատվածները միշտ մնում են իրար հավասար:

[7—C] ա եղբակացությունը անմիջապես բխում է (7, 1, 3)-ից՝ $\cos \varphi = \cos \varphi'$. Ներկա դեպքում $\cos \varphi = \cos \varphi' = 1$, կամ (հակադրագահեա հատվածների դեպքում) $\cos \varphi = \cos \varphi' = -1$:

[7—C] բ եղբակացությունը նույնպես ստացվում է (7, 1, 3)-ից: Երկու վեկտորական հատվածներ $\vec{b}$ և $\vec{c}$ հավասար են, եթե

$$b = c \quad \text{և} \quad \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 0,$$

Ըստ (7, 1, 3)-ի $b = b'$, $c = c'$, այսինքն $b' = c'$ և

$$\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \cos(\vec{b}', \vec{c}') = -1,$$

և այսպիսով

$$\vec{b}' = \vec{c}'$$

Ակներեա է, որ ավելի հարմար է դիտել ընդհանուր սկիզբ ունեցող վեկտորական հատվածներ, քան թե հատվածներ, որոնց սկիզբները տարբեր են:

Համաձայն [7—C] ա, բ, պարզ է, որ

[7—D] կարծր մարմնի վեկտորական հատվածները դիտելիս միշտ կարելի է ընդունել, որ նրանց բոլորի սկզբները գտնվում են միևնույն կետում:

Ածանցելով (7. 1. 4)-ը բոլոր t -ի, ստանում ենք օգտակար առնչություն՝

$$\dot{\bar{b}} \cdot \dot{\bar{c}} - \bar{b} \cdot \dot{\dot{\bar{c}}} = 0, \quad (7. 1. 5)$$

որից հետևում է, որ $\dot{\bar{b}} \cdot \bar{c}$ և $\bar{b} \cdot \dot{\bar{c}}$ սկալար արտադրյալները տարանելի են. այդ նշանակում է, որ $\angle(\dot{\bar{b}}, \bar{c})$ ու $\angle(\bar{b}, \dot{\bar{c}})$ անկյուններին մեկը սուր է, մյուսը բութ:

§ 7. 2. Կարժր հասվածի կիճեմասիկան

1. Նախորդ պարագրաֆում ասածի հիման վրա կարծր մարմնի շարժումը ուսումնասիրելու համար նպատակահարմար է մարմնի փոխարեն դիտել նրա կամայական կետում սկսվող վեկտորական հատվածների փունջը: Այդ պատճառով կարծր մարմնի կիճեմասիկան նպատակահարմար է սկսել վեկտորական հատվածի կիճեմասիկայից հետո:

Սկսենք կարծր մարմնին չպատկանող A, B կետերից և $\bar{b} = \overline{AB}$ վեկտորից: Դիցուք O -ն շառավիղ-վեկտորների ընդհանուր, անշարժ սկիզբն է.

$$\bar{r}_A = \overline{OA}, \quad \bar{r}_B = \overline{OB}$$

A, B կետերի շառավիղ-վեկտորներն են (նկ. 7-4):

$$\bar{b} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{r}_B - \bar{r}_A, \quad (7. 2. 1)$$

իսկ

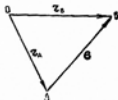
$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{d\bar{b}}{dt}$$

կամ

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \dot{\bar{b}} \quad (7. 2. 2)$$

Այստեղ $\bar{v}_B$ և $\bar{v}_A$ -ն B և A կետերի արագություններն են. թե A, B կետերը և թե $\bar{v}_B, \bar{v}_A$ արագությունները բոլորովին կամայական են:

$$\dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{dt}$$



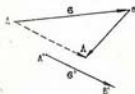
Նկ. 7-4:

$\bar{b}$ վեկտորի ածանցյալն է ըստ ժամանակի. այդ ածանցյալը արտահայտում է $\bar{b}$ վեկտորի փոփոխման արագությունը և սովորաբար կոչվում է « $\bar{b}$ վեկտորի փոփոխման արագություն»:

Այնպիսի լավ ըմբռնելու համար «վեկտորի փոփոխական արագություն» գաղափարը, ենթադրենք, որ $\bar{b} = \overline{AB}$ վեկտորը (նկ. 7-5) Δt ժամանակից հետո վերածվել է $\bar{b}' = \overline{A'B'}$ վեկտորի.

$$\overline{A'B'} - \overline{AB} = \bar{b}' - \bar{b}$$

աարբերությունը հանդիսանում է $\bar{b}$ վեկտորի փոփոխությունը, իսկ



Նկ. 7-5:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{b}' - \bar{b}}{\Delta t} \right) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BD}}{\Delta t} = \\ &= \frac{d\bar{b}}{dt} = \dot{\bar{b}} \end{aligned}$$

կլինի $\dot{\bar{b}}$ վեկտորի փոփոխման արագությունը:

Այսպիսով (7, 2, 2)-ը նշանակում է՝

[7—E] Կամայական վեկտորի փոփոխման արագությունը հավասար է նրա վերջի և սկզբի արագությունների աարբերությանը:

[7—E] զրույթը վերաբերում է յուրաքանչյուր վեկտորի, հետևապես կիրառելի է նաև կամայական վեկտորական հատվածի համար:

2°. Բացի (7, 2, 2)-ից վեկտորական հատվածի փոփոխման արագությունը կարելի է արտահայտել նաև այլ ձևով:

Ըստ (7, 1, 1)-ի $\bar{b} = \dot{b}\bar{b}$, $b = \text{const}$:

Այստեղից $\bar{b}$ -ի փոփոխման արագությունը՝

$$\dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{dt} = \dot{b}\bar{b} \quad (7, 2, 3)$$

Ընդ որում համաձայն միավոր-վեկտորների (1, 5, 6) հատկության.

$$\dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{dt}$$

ածանցյալը պետք է $\bar{b}$ -ին ուղղահայաց լինի: Այսպիսով, եթե P

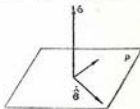
հարթությունը ուղղահայաց է $\vec{b}$ վեկտորական հատվածին, ապա $\vec{b}$ -ի ածանցյալը տեղաք է գտնվի P հարթության վրա (նկ. 7—6):

$\vec{b}$ -ի և $\vec{b}'$ -ի փոխադարձ ուղղահայացությունը կամ $\vec{b}$ -ի և $\vec{b}'$ -ի ուղղահայացությունը կարելի է արտահայտել ապալես.

$$\vec{b} \cdot \vec{b}' = 0, \quad \vec{b}' \cdot \vec{b} = 0: \quad (7, 2, 4)$$

Այժմ հեշտ է հասկանալ, թե կամայական վեկտորի փոփոխման արագությունը ինչու է աարբերվում վեկտորական հատվածի փոփոխման արագությունից:

Կամայական վեկտորի փոփոխման արագությունը կարող է ունենալ ցանկացած ուղղություն, այսինքն կարող է կադմել ցանկացած անկյուն դիտվող վեկտորի հետ: Իսկ վեկտորական հատվածի փոփոխման արագությունը ուղղահայաց է հատվածին:



Նկ. 7—6:

Համադրելով (7, 2, 2) և (7, 2, 3) ստանում ենք վեկտորական հատվածի փոփոխման արագության համար հետևյալ առնչությունը՝

$$\vec{b}' = \vec{v}_B \cdot \vec{b} - \vec{v}_A \cdot \vec{b} = b\dot{b}: \quad (7, 2, 5)$$

(7, 2, 5)-ը բերում է շատ կարևոր արդյունքի:

Բաղմապատկենք (7, 2, 5)-ի երկու մասերը սկալարորեն $\vec{b}$ -ով

$$\vec{v}_B \cdot \vec{b} - \vec{v}_A \cdot \vec{b} = b\dot{b} \cdot \vec{b}$$

կամ (7, 2, 4)-ի հիման վրա

$$\vec{v}_B \cdot \vec{b} = \vec{v}_A \cdot \vec{b}: \quad (7, 2, 6)$$

Այստեղ $\vec{v}_B \cdot \vec{b}$ և $\vec{v}_A \cdot \vec{b}$ $\vec{v}_B$ -ի և $\vec{v}_A$ -ի պրոեկցիաներն են $\vec{b}$ -ի ուղղության վրա, այսինքն վեկտորական հատվածի ուղղության վրա:

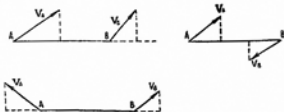
(7, 2, 6)-ը ստացվել էր շարժման ավելի մասնավոր դեպքի համար, տե՛ս [6—E]:

Պետք է նկատի առնել, որ թեպետ A և B -ն մենք դիտում ենք որպես վեկտորական հատվածի սկիզբը և վերջը, բայց ակնհերձ է, որ որպես A և B կարելի է ընդունել այդ հատվածի երկու կամայական կետեր:

Այսպիսով մենք հանգեցինք վեկտորական հատվածները և կարծր մարմինները բնութագրող հետևյալ թեորեմին.

[7—F] Կամայական շարժման դեպքում վեկտորական հատվածի բոլոր կետերի արագությունների պրոեկցիաները հատվածի ուղղության վրա իրար հավասար են:

[7—F] Թեորեմը անմիջական հետևանք է վեկտորական հատվածի չափի անփոփոխության. նկ. 7—7-ում պատկերված են տար-



Նկ. 7—7:

բեր դեպքեր, երբ A , B կետերի՝ արագությունների պրոեկցիաները AB ուղղի վրա իրար հավասար չեն. նկարներից պարզ է, որ այդ բոլոր դեպքերում հատվածի չափը պետք է կամ մեծանար, կամ փոքրանար:

Պետք է նկատի առնել, որ (1, 2, 3)-ում արագություններից մեկը կարող է զրո լինել. եթե

$$\vec{v}_A = 0, \quad \vec{v}_B = \dot{\vec{b}}, \quad \text{եթե } \vec{v}_B = 0, \quad \vec{v}_A = -\dot{\vec{b}}:$$

3. $\vec{b} = \overline{AB}$ և $\dot{\vec{b}}$ վեկտորների փոխադարձ ուղղահայացությունից հետևում է մի արտահայտություն ևս $\dot{\vec{b}}$ -ի համար:

Իսկապես տանենք AB -ով մի հարթություն (P), որը ուղղահայաց է $\dot{\vec{b}}$ -ին (նկ. 7—8):

Ինչպես հայտնի է, եթե

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

ապա

$$\vec{a} \perp \vec{c}, \quad \vec{b} \perp \vec{c},$$

Այստեղից պարզ է, որ P -ի վրա միշտ կարելի է ընտրել մի ամպիսի $\bar{\omega} = \overline{AC}$ վեկտոր, որ

$$\overline{AC} \setminus \overline{AB} = \bar{\omega} \times \bar{b} = \bar{b}^{\perp} \quad (7, 2, 7)$$

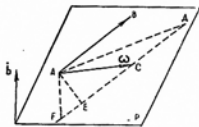
Այս հանդամանքը չափ կարևոր է:

Պարզ է, որ

$$(\bar{\omega} + \lambda \bar{b}) \times \bar{b} = \bar{\omega} \times \bar{b}. \quad (7, 2, 7')$$

այստեղից հետևում է, որ եթե $\bar{\omega} = \overline{AC}$ բազմաբարձ է (7, 2, 7)-ին, ապա $\overline{AC}$ -ի փոխարեն կարելի է վերցնել լուրջանջվող $(\overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF})$ վեկտոր, որի սկիզբը A -ն է, իսկ վերջը գտնվում է $\bar{b}$ -ին զուգահեռ $FEC D$ ուղղի վրա:

(7, 2, 7')-ին բազմաբարձ $(\bar{\omega} + \lambda \bar{b})$ վեկտորի մինիմալ չափը հավասար է AE , ընդ որում $\overline{AE} \perp \bar{b}$: Փոքրագույն չափի $\bar{\omega}_m$ -ն կարելի է հեշտ որոշել:



Նկ. 7-8.

Իսկապես համաձայն (7, 2, 7) և (7, 2, 5)-ի

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega}_m \times \bar{b}.$$

որտեղ $\bar{\omega}_m$ փոքրագույնն է ըստ չափի և հետևապես $\bar{\omega}_m \perp \bar{b}$:

Բազմապատկելով $\bar{b}$ -ն վեկտորապես $(\bar{v}_B - \bar{v}_A)$ -ով, ունենք

$$\bar{b} \times (\bar{v}_B - \bar{v}_A) = \bar{b} \times (\bar{\omega}_m \times \bar{b}).$$

աշ մասը հավասար է

$$\bar{\omega}_m b^2 - \bar{b} (\bar{\omega}_m \cdot \bar{b}),$$

բայց $\bar{\omega}_m \cdot \bar{b} = 0$, որովհետև $\bar{\omega}_m \perp \bar{b}$:

Այսպիսով

$$\bar{b} \times (\bar{v}_B - \bar{v}_A) = \bar{\omega}_m b^2$$

իսկ

$$\bar{\omega}_m = \frac{\bar{b} \times (\bar{v}_B - \bar{v}_A)}{b^2} \quad (7, 2, 8)$$

6 § 7, 3. Կարծր մարմնին վերաբերող հիմնական քննումը

1°. Անցնելով կարծր մարմնի կինեմատիկային, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

[7—G] Կարծր մարմնի յուրաքանչյուր շարժման դեպքում զոյություն ունեն այնպիսի վեկտորական հատվածներ, որոնց փոփոխման արագությունը զրո է. մյուս վեկտորական հատվածների փոփոխման արագությունները կոպլանդար են և ուղղահայաց փոփոխման զրո արագություն ունեցող հատվածներին:

Նախ բերենք օրինակներ:

Համընթաց շարժման դեպքում մարմնի բոլոր կետերը ունեն նույն արագությունը՝

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C \dots$$

արդ պատճառով, ըստ (7, 2, 5), բոլոր վեկտորական հատվածների փոփոխման արագությունները հավասար են զրոյի. վերցնենք օրինակ $\overline{AB}$ հատվածը՝ այս դեպքում

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 0.$$

Նույնը վերաբերում է բոլոր մյուս հատվածներին:

Դիտարկենք կարծր մարմնի պտտումը անշարժ առանցքի շուրջը:

Օգտվելով [7—D]-ից, ընդունենք, որ բոլոր վեկտորական հատվածները սկսվում են պտտման առանցքի վրա գտնվող մի A կետից: A -ի արագությունը՝ $\vec{v}_A = 0$ և ըստ (7, 2, 5)-ի վեկտորական $(\overline{AB}, \overline{AC}, \dots)$ հատվածների փոփոխման արագությունները հավասար են նրանց ծայրերի $(B, C, \dots)$ արագություններին: Բայց արդ արագությունները՝ $\vec{v}_B, \vec{v}_C, \dots$ ուղղահայաց են պտտման առանցքին և ուրեմն կոպլանդար են: Մենք նույնպես գիտենք, որ պտտման դեպքում առանցքին զուգահեռ հատվածների բոլոր կետերի արագությունները իրար հավասար են. այսպիսով, եթե $\overline{EF}$ հատվածը զուգահեռ է առանցքին, ապա $\vec{v}_E = \vec{v}_F$ և $\overline{EF}$ հատվածի փոփոխման արագությունը

$$\vec{v}_F - \vec{v}_E = 0:$$

Այս բոլորը համընկնում է [7—G] թեորեմի բովանդակության հետ:

2. [7—G] թևերումը ապացուցելու համար գիտարկենք երեք վեկտորական հատվածներ $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{e}$. Ընդ որում $\bar{b}$ և $\bar{c}$ -ն կամայական, ոչ զուգահեռ հատվածներ են, իսկ $\bar{e} = \bar{b} \times \bar{c}$:

Այդպիսի երեք վեկտորական հատվածները կոչվանաւ շնուտի ցանկացած շորրորդ $\bar{p}$ հատվածը կարելի է արտահայտել $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{e}$ վեկտորական հատվածների և երեք սկալար հաստատուն գործակիցների միջոցով՝

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} + z \bar{e} \\ \bar{e} &= \bar{b} \times \bar{c} \end{aligned} \right\} \quad (7, 3, 1)$$

$\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{e}$ եռյակի միջոցով արտահայտված երկու տարրեր ($\bar{p}$, $\bar{p}'$) վեկտորները տարրերվում են (β, γ, z) , (β', γ', z') գործակիցներով:

Սկզբում ապացուցենք $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{e}$ ածանցյալների կոչվանաբությունը: Երեք վեկտորների կոչվանաբության պայմանը հետևելու է՝

$$\dot{\bar{e}} \cdot (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}}) = 0: \quad (7, 3, 2)$$

Այստեղ, համաձայն (7, 3, 1)-ի

$$\dot{\bar{e}} = \dot{\bar{b}} \times \bar{c} + \bar{b} \times \dot{\bar{c}}$$

և (7, 3, 2)-ի ձախ մասը դառնում է

$$(\dot{\bar{b}} \times \bar{c}) \cdot (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}}) + (\bar{b} \times \dot{\bar{c}}) \cdot (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}}) \quad (7, 3, 2')$$

կամ, եթե փոխենք $\times$ և $\cdot$ նշանների տեղերը, կունենանք

$$\dot{\bar{b}} \cdot [\bar{c} \times (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}})] + \bar{b} \cdot [\dot{\bar{c}} \times (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}})] \quad (7, 3, 2'')$$

Բացելով կրկնակի վեկտորական արտադրյալները, կստանանք

$$\left. \begin{aligned} \bar{c} \times (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}}) &= \dot{\bar{b}} (\bar{c} \cdot \dot{\bar{c}}) - \dot{\bar{c}} (\bar{c} \cdot \dot{\bar{b}}) = -\dot{\bar{c}} (\bar{c} \cdot \dot{\bar{b}}) \\ \text{քանի որ ըստ (7, 2, 4)-ի } \bar{c} \cdot \dot{\bar{c}} &= 0, \\ \text{նման ձևով } \dot{\bar{c}} \times (\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}}) &= \dot{\bar{b}} (\dot{\bar{c}} \cdot \dot{\bar{c}}) - \dot{\bar{c}} (\dot{\bar{b}} \cdot \dot{\bar{c}}) \end{aligned} \right\} \quad (7, 3, 3)$$

Նկրմուծելով (7, 3, 3) արտահայտությունները (7, 3, 2'')-ի մեջ և

նկատելով, որ ըստ (7, 2, 4)-ի $\dot{\bar{b}} \cdot \dot{\bar{b}} = 0$, (7, 1, 5)-ի հիման վրա ստանում ենք

$$\begin{aligned} \dot{e} \cdot (\dot{b} \times \dot{c}) &= -(\dot{b} \cdot \dot{c})(\dot{c} \cdot \dot{b}) - (\dot{b} \cdot \dot{c})(\dot{b} \cdot \dot{c}) = \\ &= -(\dot{b} \cdot \dot{c})(\dot{c} \cdot \dot{b} + \dot{b} \cdot \dot{c}) = 0; \end{aligned}$$

Այս $\dot{e}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ վեկտորների կոպլանարությունը (7, 3, 2) պարամն է:
Հետագայում անհրաժեշտ է հիշել, որ կոպլանար են $\dot{e}$, $\dot{b}$,
 $\dot{c}$ վեկտորները, իսկ $\bar{e}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորները կոպլանար չեն:

3°. Անցնենք [7—G] թեորեմի ապացուցմանը: (7, 3, 1)-ի
աջ մասի β , γ , z գործակիցները հաստատուն են. այդ պատճառով
 $\bar{p}$ -ի անանջլայր՝

$$\bar{p} = \beta \dot{b} + \gamma \dot{c} + z \dot{e}; \quad (7, 3, 4)$$

$\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{e}$ վեկտորների կոպլանար լինելու հետևանքով միշտ
հնարավոր է ամրակա ընտրել β , γ , z գործակիցները, որ $\beta \dot{b}$, $\gamma \dot{c}$,
 $z \dot{e}$ վեկտորները կազմեն փակ հանկույն. այդ դեպքում պարզ է,
որ եթե β , γ , z -ի փոխարեն ընտրվեն նրանց ուղիղ համեմատական
 $\beta' = \alpha \beta$, $\gamma' = \alpha \gamma$, $z' = \alpha z$ գործակիցներ (որտեղ համեմատականու-
թյան α գործակիցը կամայական է), ապա $\bar{p}$ -ի փոխարեն կոտա-
նանք նրան գուցահեղ $\bar{q}$ վեկտորական հասկած

$$\bar{q} = \beta' \bar{b} + \gamma' \bar{c} + z' \bar{e},$$

որի փոփոխման արագությունը

$$\dot{\bar{q}} = \beta' \dot{\bar{b}} + \gamma' \dot{\bar{c}} + z' \dot{\bar{e}}$$

նույնպես հավասար է զրոյի:

Այսպիսով ապացուցվեց [7—G] թեորեմի առաջին մասը, այն
է՝ լուրաքանչյուր շարժման դեպքում մարմնում կա մի ուղղու-
թյուն՝ $\bar{p}$, որին գուցահեղ բոլոր վեկտորական հասկածների փո-
փոխման արագությունները զրո են:

[7—G]-ի երկրորդ մասի ապացույցը հետևյալն է: Այն բոլոր
դեպքերում, երբ β , γ , z գործակիցները չեն վերածվում զրոյի,
(7, 3, 4)-ի աջ մասի $\beta \dot{b}$, $\gamma \dot{c}$, $z \dot{e}$ վեկտորների կոպլանարությու-
նից բխում է, որ $\bar{p}$ -ն էլ նրանց կոպլանար է: Այսպիսով, եթե

$\vec{p} = 0$, ապա $\vec{p}$ -ին զուգահեռ բոլոր վեկտորական հատվածների փոփոխման արագությունները զրո են. $\vec{p}$ -ին ոչ զուգահեռ վեկտորական հատվածների փոփոխման արագությունները միմյանց կոպլանար են: Այս է $[7-G]$ թեորեմի երկրորդ մասը:

§ 7. 4. $[7-G]$ թեորեմի հետևանքները

1. Դիտարկենք կարծր մարմնի կամայական $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$ հատվածները: Համաձայն (7, 2, 7)-ի $\overline{AB}$ -ի փոփոխման արագությունը, (նկ. 7-8 և նկ. 7-9)

$$\dot{\vec{b}} = \vec{\omega}_b \times \vec{b}, \quad (7, 4, 1)$$

ընդ որում $\vec{\omega}_b$ կարող է ունենալ ցանկացած ուղղությունը P_b հարթության մեջ:

Պարզ է, որ $\overline{AC}$ -ի փոփոխման արագություն էլ (նկ. 7-9) կրթվի նույն ձևով, տե՛ս (7, 4, 1),

$$\dot{\vec{c}} = \vec{\omega}_c \times \vec{c} \quad (7, 4, 2)$$

և $\vec{\omega}_c$ կարող է ունենալ ցանկացած ուղղությունը P_c հարթության մեջ (P_c -ն ուղղահայաց է $\vec{c}$ -ին և անցնում է AC -ով):

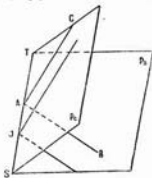
Քանի որ $\overline{AC}$ և $\overline{AB}$ -ն չեն դառափորված մի ուղիղի վրա, P_b և P_c հարթությունները պետք է հատվեն: Անվանենք հատման ուղիղը ST (նկ. 7-9): Ելնելով $\vec{\omega}_b$ և $\vec{\omega}_c$ -ի ուղղությունների կամայականությունից, ընդունենք, որ թե՛ $\vec{\omega}_b$ և թե՛ $\vec{\omega}_c$ -ն զուգահեռ են ST -ին՝

$$\vec{\omega}_b \parallel ST, \quad \vec{\omega}_c \parallel ST, \quad \vec{\omega}_b \parallel \vec{\omega}_c, \quad (7, 4, 3)$$

Ապացուցենք, որ (7, 4, 3) պայմանի դեպքում

$$\vec{\omega}_b = \vec{\omega}_c, \quad (7, 4, 4)$$

Դրա համար արտահայտենք $\dot{\vec{b}} \times \dot{\vec{c}}$ վեկտորական արտադրյալը, օգտվելով մի անգամ (7, 4, 1)-ից, մյուս անգամ՝ (7, 4, 2)-ից: Այդպիսով կունենանք



Նկ. 7-9:

$$\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}} = (\bar{\omega}_b \times \bar{b}) \times \dot{\bar{c}} = \dot{\bar{c}} \times (\bar{b} \times \bar{\omega}_b)$$

$$\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}} = \dot{\bar{b}} \times (\bar{\omega}_c \times \bar{c});$$

Բացենք աջ մասերի կրկնակի արտադրյալները

$$\dot{\bar{c}} \times (\bar{b} \times \bar{\omega}_b) = \bar{b} (\bar{\omega}_b \cdot \dot{\bar{c}}) - \bar{\omega}_b (\bar{b} \cdot \dot{\bar{c}})$$

$$\dot{\bar{b}} \times (\bar{\omega}_c \times \bar{c}) = \bar{\omega}_c (\dot{\bar{b}} \cdot \bar{c}) - \bar{c} (\bar{\omega}_c \cdot \dot{\bar{b}}).$$

Քանի որ

$$P_b \perp \dot{\bar{b}}, \quad P_c \perp \dot{\bar{c}},$$

այս $\bar{\omega}_b \perp \dot{\bar{b}}$ և ըստ (7, 4, 3)-ի $\bar{\omega}_c \perp \dot{\bar{b}}, \quad \bar{\omega}_c \cdot \dot{\bar{b}} = 0, \quad \bar{\omega}_c \perp \dot{\bar{c}}$ և

ըստ (7, 4, 3)-ի $\bar{\omega}_b \perp \dot{\bar{c}}, \quad \bar{\omega}_b \cdot \dot{\bar{c}} = 0.$

Արդիւսով ստանում ենք

$$\dot{\bar{b}} \times \dot{\bar{c}} = -\bar{\omega}_b (\bar{b} \cdot \dot{\bar{c}}) = \bar{\omega}_c (\bar{c} \cdot \dot{\bar{b}}) \quad (7, 4, 5)$$

Բայց ըստ (7, 1, 5)-ի

$$\dot{\bar{b}} \cdot \bar{c} = -\dot{\bar{c}} \cdot \bar{b},$$

ուստի

$$\bar{\omega}_b = \bar{\omega}_c.$$

Այս է (7, 4, 4)-ը:

Չ°. Արժ մ նկատի առնենք, որ

1) ըստ [7—G]-ի կա միայն մի ուղղություն, որին ուղղահայաց են վեկտորական հատվածների փոխախման արագությունները.

2) ըստ [7—D]-ի կարելի է ենթադրել, որ բոլոր հատվածները սկսվում են մի կետում:

Այստեղից հեշտ է եզրակացնել՝ եթե երկու $\overline{AB}, \overline{AC}$ հատվածների փոխարեն դիտարկվեն ցանկացած թվով հատվածներ՝ $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}, \overline{AF}, \dots$ ապա նրանց համադասառասխանող բոլոր հարթությունները ($P_b, P_c, P_e, P_f, \dots$) կհատվեն մի ST ուղիղով և հատվածների յուրաքանչյուր զույգի համար ($\overline{AB}, \overline{AC}; \overline{AB}, \overline{AE}; \overline{AB}, \overline{AF}, \dots$) կստանանք

$$\bar{\omega}_b = \bar{\omega}_c, \quad \bar{\omega}_b = \bar{\omega}_e, \quad \bar{\omega}_b = \bar{\omega}_f, \dots$$

նշանակելով համասար $\overline{\omega}_b, \overline{\omega}_c, \overline{\omega}_a$ վեկտորները $\overline{\omega}$ տառով հանգում ենք շատ կարևոր թևորևմի:

[7—H] Ամենաընդհանուր դեպքում գոյություն ունի մի այնպիսի $\overline{\omega}$ վեկտոր, որ կարծր մարմնի յուրաքանչյուր $\overline{p}$ վեկտորական հատվածի փոփոխման արագությունը՝

$$\dot{\overline{p}} = \overline{\omega} \times \overline{p} : \quad (7. 4, 6)$$

(7. 4, 6)-ից և (7. 4, 3)-ից հետևում է, որ $\overline{\omega}$ վեկտորը ուղղահայաց է բոլոր վեկտորական հատվածների փոփոխման (գրգռից տարրեր) արագություններին:

3°. Փոխարկելով (7. 4, 5)-ում $\overline{\omega}_b$ և $\overline{\omega}_c$ -ն $\overline{\omega}$ -ով ստանում ենք $\overline{\omega}$ -ի համար երկու համարմեք արտահայտություններ

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega} &= \frac{\dot{\overline{b}} \times \dot{\overline{c}}}{\dot{\overline{b}} \cdot \dot{\overline{c}}} \\ \overline{\omega} &= - \frac{\dot{\overline{b}} \times \dot{\overline{c}}}{\dot{\overline{c}} \cdot \dot{\overline{b}}} = \frac{\dot{\overline{c}} \times \dot{\overline{b}}}{\dot{\overline{c}} \cdot \dot{\overline{b}}} \end{aligned} \right\} \quad (7. 4, 7)$$

(Նկատի ունեի, որ $\dot{\overline{b}} \cdot \dot{\overline{c}} = - \dot{\overline{c}} \cdot \dot{\overline{b}}, \dot{\overline{b}} \times \dot{\overline{c}} = - \dot{\overline{c}} \times \dot{\overline{b}}$):

Ըստ ձևի (7. 4, 7)-ը համընկնում է (5, 3, 3)-ի հետ, որով որոշվում է անշարժ առանցքի շուրջ պտտվող կարծր մարմնի անկլինային արագությունը:

4°. Պոխարկենք $\overline{\omega}$ -ին դուգաճև $\overline{A}\overline{Q} = \overline{q}$ կամայական վեկտորական հատվածը. (7. 4, 6)-ի հիման վրա $\overline{q}$ -ի փոփոխման արագությունը

$$\dot{\overline{q}} = \overline{\omega} \times \overline{q}$$

Բայց, քանի որ

$$\overline{q} \parallel \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} \times \overline{q} = 0 \quad \text{և} \quad \dot{\overline{q}} = 0: \quad (7. 4, 8)$$

Բոլոր մյուս $\overline{\omega}$ -ին ոչ դուգաճև $\overline{p}$ հատվածների փոփոխման արագությունները ուղղահայաց են $\overline{\omega}$ -ին:

Այսպիսով (7. 4, 6)-ը հանգեցնում է [7—G] թևորևմին համապատասխանող եզրակացությունների:

§ 7. 5. Մեկ անգամ կես ունեցող կարծի մարմնի շարժումը

1^o. Կիրառենք $[7-H]$ թևորեմը և նախորդ պարադոքսում ստացած արդյունքները այն կարծի մարմնի նկատմամբ, որի մի (A) կետը մշտապես անշարժ է: Ենթադրենք, որ անշարժ A կետը վեկտորական հաստատման ընդհանուր սկիզբն է՝

$$\vec{b} = \overline{AB}, \quad \vec{c} = \overline{AC};$$

Համաձայն (7, 2, 2)-ի

$$\dot{\vec{b}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A, \quad \dot{\vec{c}} = \vec{v}_C - \vec{v}_A;$$

Բայց ներկա դեպքում $\vec{v}_A = 0$, այդ պատճառով (7, 4, 6) և, (7, 4, 8) բերում են հետևյալ բանաձևերի՝

$$\dot{\vec{b}} = \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{b}, \quad \dot{\vec{c}} = \vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{c}, \quad (7, 5, 1)$$

իսկ (7, 4, 7)-ը վեր է ածվում

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}_B \times \vec{v}_C}{\vec{v}_B \cdot \overline{AC}} \quad (7, 5, 2)$$

առնչությամբ:

Բայցի այդ, կարծի մարմնում կան $\vec{\omega}$ -ին զուգահեռ հաստատմաներ՝ $\vec{q} \parallel \vec{\omega}$, այդպիսի հաստատմաներից մեկն էլ անցնում է A կետով

$$\vec{q} = \overline{AQ} \parallel \vec{\omega}$$

և (7, 4, 8)-ի հիման վրա, կարող ենք գրել

$$\dot{\vec{q}} = \vec{v}_Q = 0;$$

Այսպիսով բացի միշտ անշարժ A կետից, գիտվող մոմենտում՝ կա և երկրորդ անշարժ կետը՝ Q :

Հետևապես յուրաքանչյուր մոմենտ, բացի A կետից կա և մի այլ անշարժ կետ (Q) և անշարժ (AQ) ուղիղ:

Համաձայն սահմանումի (§ 3, 2, 1^o) երկու անշարժ կետերի դեպքում կարծի մարմնի շարժումը կոչվում է պատում՝ այդ անշարժ կետերով անցնող ուղղի շուրջը:

$[7-J]$ Մի անշարժ կետ ունեցող մարմնի շարժումը յուրաքանչյուր մոմենտ հանդիսանում է պատում այդ կետով անցնող առանցքի շուրջը:

Չ. Կանոց առնենք այս ձևակերպման վրա:

§ 5, 2-ում սահմանելով պատումը որպես շարժում, որի ընթացքում կարծր մարմնի երկու կետերը անշարժ են, նկատի ենք առնում, որ անշարժ են միշտ նույն կետերը, հետևապես պատման առանցքն էլ միշտ նույնն է:

Իսկ այժմ A կետը անշարժ է ամբողջ շարժման ընթացքում. բացի այդ շարժանչուր մոմենտ կա ևս մի անշարժ կետ. բայց ժամանակի ընթացքում այդ երկրորդ կետը անընդհատ փոփոխվում է. ուստի և պատման առանցքը որպես անշարժ կետերով անցնող մի ուղիղ, նույնպես անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը թե՛ մարմնի և թե՛ տարածության մեջ, որի պատճառով կոչվում է ակնթարթային առանցք:

Կարելի է պատկերացնել այսպես. AQ ուղիղը անշարժ է ոչ թե մի մոմենտ, այլ անսահման փոքր ժամանակամիջոցում, որի ընթացքում մարմինը պտտվում է AQ -ի շուրջը անսահման փոքր անկյանով: Այս առանցք է դառնում AQ' ուղիղը, որ անսահման քիչ է շեղված AQ -ից. AQ' -ի շուրջը մարմինը պտտվում է անսահման փոքր ժամանակամիջոցում, անսահման փոքր անկյանով, որից հետո առանցք է դառնում AQ' -ին անսահման մոտ AQ ուղիղը և այսպես անվերջ:

Համեմատելով (7, 5, 1) և (7, 5, 2) առնչությունները (5, 2, 9) և (5, 3, 3)-ի հետ տեսնում ենք, որ $\bar{\omega}$ -ն անկյունային արագություն է: Ինչպես գիտենք անկյունային արագությունը և պտտման առանցքը դանդիվ են մի ուղղի վրա և որովհետև այժմ պտտման առանցքը ակնթարթային է, անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը, այս անկյունային արագությունն էլ պետք է անընդհատ փոփոխվի որպես վեկտոր: Այդ պատճառով մշտապես անշարժ կետ ունեցող մարմնի անկյունային արագությունը (ինչպես նաև պտտման առանցքը) անվանում են ակնթարթային:

Ակնթարթային անկյունային արագության ուղղությունը և, ընդհանուր դեպքում, նրա չափը անընդհատ փոփոխվում են:

Ինտրին առանձին մասնավոր դեպքերում, երբ մի կետը մշտապես անշարժ է, կարող է պտտման առանցքն էլ անշարժ լինել, միաժամանակ անփոփոխ կլինի նաև անկյունային արագության ուղղությունը:

Սակայն այդ դեպքը արգեն քննարկված է V գլխում. այստեղ այլևս նրան չենք անդրադառնալու:

3^o Անկլունային արագացումը՝

$$\ddot{z} = \frac{d\ddot{\omega}}{dt}; \quad (7, 5, 3)$$

(7, 5, 3)-ը անկլունային արագացման սահմանումն է:

Եթե $\dot{h}$ -ը ակնթարթային առանցքին զուգահեռ միավոր-վեկտոր է, ապա կարող ենք գրել

$$\ddot{\omega} = \dot{h} \ddot{\omega},$$

(որտեղ $\ddot{\omega}$ -ն անկլունային արագություն թվային արժեքն է)

$$\frac{d\ddot{\omega}}{dt} = \ddot{z} = \ddot{\omega} \frac{d\dot{h}}{dt} + \dot{h} \frac{d\ddot{\omega}}{dt}; \quad (7, 5, 4)$$

Անշարժ առանցքի դեպքում, տե՛ս (5, 5, 2')

$$\dot{h} = \text{const}, \quad \frac{d\dot{h}}{dt} = 0 \quad \text{և} \quad \ddot{z} = \dot{h} \frac{d\ddot{\omega}}{dt};$$

Իսկ եթե պտտման առանցքը ակնթարթային է, միավոր $\dot{h}$ վեկտորը հաստատուն չէ, $\frac{d\dot{h}}{dt} \neq 0$ և անկլունային արագացումը որոշելու համար հարկավոր է գիտենալ

կամ $\ddot{\omega} = \ddot{\omega}(t)$, ախինքն $\ddot{\omega}$ -ն որպես ժամանակի ֆունկցիա, կամ

$$\dot{h} = \dot{h}(t) \quad \text{և} \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega}(t),$$

ախինքն $\dot{h}$ միավոր-վեկտորը որպես ժամանակի ֆունկցիա և անկլունային արագություն թվային արժեքը որպես ժամանակի ֆունկցիա:

Այսպիսով, եթե $\frac{d\dot{h}}{dt} \neq 0$, $\ddot{z}$ -ը զուգահեռ չէ $\ddot{\omega}$ -ին. մինչ-

դեռ անշարժ առանցքի դեպքում $\ddot{z} \parallel \ddot{\omega}$:

Իսկ այժմ, անկլունային արագությունը և անկլունային արագացումը ($\ddot{\omega}$, $\ddot{z}$) համարելով հայտնի, նրանց միջոցով արտահայտենք $\vec{r} = \overline{AB}$ շառավիղ-վեկտոր ունեցող B կետի զծային արա-

դացումը, երբ շարժվող կարծր մարմինը ունի մշտապես անշարժ (A) կետ (նկ. 7—10):

Համաձայն (5, 2, 9)-ի

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overline{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7, 5, 5)$$

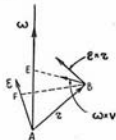
$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{\omega}_B = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

և որովհետև

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{z},$$

$$\vec{\omega}_B = \vec{z} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$



Նկ. 7—10.

քան

$$\vec{\omega}_B = \vec{z} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}); \quad (7, 5, 6)$$

$\vec{z} \times \vec{r}$ բաղադրիչը կոչվում է պտտողական արագացում, իսկ $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ կոչվում է կենտրոնածից կամ առանցքածից արագացում:

Պտտողական արագացման չափը հավասար է $\varepsilon\rho'$, որտեղ $\rho' = BF$, $\overline{BF} \perp \vec{z}$:

Կենտրոնածից արագացման չափը կլինի $\omega^2\rho$, որտեղ

$$\rho = BE, \quad \overline{BE} \perp \vec{\omega}:$$

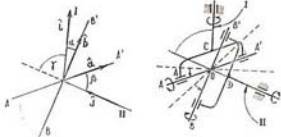
Ծնողի. Հուլի հոդը:

1. Հուլի հոդ կոչվում է 7—11ա, բ նկարում պատկերված մեխանիզմը, որի նպատակն է շարժումը մի (I) լիսեռից մյուսին (II), հաղորդել, երբ լիսեռների առանցքներն անշարժ են, դասափորված են մի հարթության վրա և կաղմում են որոշ հաստատուն (γ) անկյուն:

Սրանից հետևում է, որ արդ առանցքները հատվում են մի անշարժ (O) կետում:

Յուրաքանչյուր լիսեռի ծալրին ամրացված է եղանիկ (ACA', BDB'), որի առանցքակալներում կարող են պտտվել E խաչկապի (AA', BB') լիսեռիկները: Վերջինների առանցքները նույնպես

հատվում են O կետում: Այսպիսով խաչկապը որպես կարծր մարմին պատվում է O կետի շուրջը:



Նկ. 7-11ա, բ

AA' , BB' առանցքները միմյանց ուղղահայաց են, բայց ալի միմյանց ուղղահայաց են I լիսեռը և AA' -ը, II լիսեռը և BB' -ը:

Անվանելով $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$ համապատասխանաբար I , II , AA' , BB' առանցքների միավոր-վեկտորները, ունենք

$$\hat{i} \perp \hat{a}, \quad \hat{j} \perp \hat{b}, \quad \hat{a} \perp \hat{b}$$

կամ

$$\hat{i} \cdot \hat{a} = 0, \quad \hat{j} \cdot \hat{b} = 0, \quad \hat{a} \cdot \hat{b} = 0. \quad (7.5, 7)$$

իսկ

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \cos \gamma = \text{const} \quad (7.5, 8)$$

Այսպիսով Հուկի հոգը բաղկացած է երեք կարծր մարմիններից՝ I լիսեռը ACA' եզանիկի հետ միասին, խաչկապը և II լիսեռը BDB' եզանիկի հետ միասին: AA' առանցքը պատկանում է թե I լիսեռին և թե խաչկապին, BB' առանցքը նույնպես պատկանում է երկու մարմիններին՝ խաչկապին և II լիսեռին:

I լիսեռի պատումը շարժման մեջ է գնում E խաչկապը, իսկ E -ի շարժման հետևանքով պատվում է II լիսեռը: Այս երեք շարժումների պատճառով անընդհատ փոփոխվում է ACA' , $AA'BB'$, BDB' հարթությունների փոխադարձ դասավորությունը՝ 2° . Երկրաչափական առնչություններ.

Ընդունելով նշանակումներ

$$\text{անկյուն } (\hat{b}, \hat{i}) = \alpha, \quad \text{անկյուն } (\hat{a}, \hat{j}) = \beta, \quad \text{ունենք}$$

$$\hat{b} \cdot \hat{i} = \cos \alpha, \quad \hat{a} \cdot \hat{j} = \cos \beta; \quad (7, 5, 9)$$

Համաձայն (7, 5, 7)-ի

$$\left. \begin{array}{l} \hat{i} \perp \hat{a}, \quad \hat{b} \perp \hat{a}, \quad \text{ուստի} \quad \hat{b} \times \hat{i} = \hat{a} \sin \alpha \\ \hat{j} \perp \hat{b}, \quad \hat{a} \perp \hat{b}, \quad \text{ուստի} \quad \hat{a} \times \hat{j} = \hat{b} \sin \beta \end{array} \right\} (7, 5, 9')$$

(7, 5, 9') առկա է

$$(\hat{b} \times \hat{i})^2 = \sin^2 \alpha, \quad (\hat{a} \times \hat{j})^2 = \sin^2 \beta; \quad (7, 5, 10)$$

Կարևոր սահմանափակում է բերում $(\hat{b} \times \hat{i}) \times \hat{j}$. (Կամ $(\hat{a} \times \hat{j}) \times \hat{i}$) կրկնակի վեկտորական արտադրյալը: Իրոք (7, 5, 9')-ի հիման վրա

$$(\hat{b} \times \hat{i}) \times \hat{j} = (\hat{a} \times \hat{j}) \sin \alpha = \hat{b} \sin \alpha \sin \beta; \quad (7, 5, 11)$$

Մյուս կողմից

$$(\hat{b} \times \hat{i}) \times \hat{j} = \hat{j} \times (\hat{i} \times \hat{b}) = \hat{i}(\hat{j} \cdot \hat{b}) - \hat{b}(\hat{i} \cdot \hat{j})$$

կամ համաձայն (7, 5, 7) և (8, 5, 8)-ի

$$(\hat{b} \times \hat{i}) \times \hat{j} = -b \cos \gamma; \quad (7, 5, 12)$$

Համեմատելով (7, 5, 11) և (7, 5, 12) ստանում ենք

$$\sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma = \text{const} \quad (7, 5, 13)$$

(7, 5, 13)-ը ցույց է տալիս, որ, եթե երկու սինուսների բացարձակ արժեքներից մեկը մեծանա, մյուսը պետք է փոքրանա:

Դժգուր չէ համոզվել, որ α , β սնկյուններից յուրաքանչյուրը հասնում է $\frac{\pi}{2}$ կամ $\frac{3}{2}$ արժեքների: Իրոք 1 լիսերի պատման ընթացքում AA' ուղիղը զծում է մի (P_1) հարթություն, որը ըստ (7, 5, 7)-ի ուղղահայաց է $\hat{i}$ -ին: Նման պատճառով BB' ուղիղը զծում է P_2 հարթությունը, որը ըստ (7, 5, 7)-ի ուղղահայաց է $\hat{j}$ -ին: Այդ երկու հարթությունները անշարժ են, դուգահեռ չեն (որովհետև $\hat{i}$ և $\hat{j}$ -ն իրար դուգահեռ չեն) և պետք է հատվեն: Քանի որ

$$P_1 \perp \hat{i}, \quad P_2 \perp \hat{j}$$

նրանց հատման ուղիղը (LOL'), դուգահեռ է $\hat{i} \times \hat{j}$ արտադրյալին և պետք է անցնի AA' -ի և BB' -ի հատման O կետով:

Երբ, օրինակ, BB' առանցքը, պտտվելով P_2 հարթության վրա համընկնի LOL' -ի հետ, ալիսինքն

$$\hat{b} \parallel \hat{i} \times \hat{j}, \quad \alpha = \angle(\hat{b}, \hat{i}) = \angle(\hat{i} \times \hat{j}, \hat{i}) = \pm \frac{\pi}{2},$$

որովհետև

$$\hat{i} \times \hat{j} \perp \hat{i}:$$

Այսպիսով BB' առանցքի լրիվ պտույտի ընթացքում (և լիսևերի շարժը, P_2 հարթության վրա) α -ն երկու անգամ կդառնա ուղիղ անկյուն:

Նման եղանակով, երբ AA' համընկնի LOL' -ի հետ,

$$\beta = \angle(\hat{a}, \hat{j}) = \angle(\hat{i} \times \hat{j}, \hat{j}) = \pm \frac{\pi}{2},$$

որովհետև

$$\hat{i} \times \hat{j} \perp \hat{j}:$$

Հետևապես β նույնպես երկուական անգամ կդառնա ուղիղ անկյուն AA' -ի բարաքանչուր լրիվ պտույտի ընթացքում:

3°. Գրենք մատրիկական առնչություններ:

Նշանակենք $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}, \bar{\omega}_{11}$ և լիսևերի, խաչկապի և II լիսևերի անկյունային արագությունները.

$$\bar{\omega}_1 \parallel \hat{i}, \quad \bar{\omega}_{11} \parallel \hat{j}$$

հետևապես

$$\bar{\omega}_1 = \hat{i} \omega_1, \quad \bar{\omega}_{11} = \hat{j} \omega_{11} \quad (7, 5, 14)$$

Քանի որ $\hat{a}$ -ն AA' -ի միավոր-վեկտորն է, ընտրենք AA' առանցքի F կետը ալիսինքն, որ $\overline{OF} = \hat{a}$:

Նման ձևով BB' -ի վրա ընտրենք H կետը, ալիսինքն, որ $\overline{OH} = \hat{b}$: Նկատի առնելով, որ AA' -ը պտտվածում է I լիսևերին, կարող ենք գրել

$$\bar{v}_F = \bar{\omega}_1 \times \overline{OF} = \bar{\omega}_1 \times \hat{a}$$

իսկ, որովհետև AA' -ը միաժամանակ պտտվածում է E խաչկապին, ապա

$$v_F = \bar{\omega} \times \overline{OF} = \bar{\omega} \times \hat{a}.$$

ալիքներն

$$(\bar{\omega} - \omega_1) \times \hat{a} = 0;$$

Այստեղից հաշվացնում ենք, որ

$$\bar{\omega} - \omega_1 = \lambda_1 \hat{a}, \quad (7, 5, 15)$$

λ_1 -ը սկալար գործակից է:
Նման հղանակով

$$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}_{n1} \times \overline{OH} = \bar{\omega} \times \hat{b},$$

որտեղից

$$(\bar{\omega} - \bar{\omega}_{n1}) \times \hat{b} = 0,$$

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_{n1} = \lambda_{n1} \hat{b}, \quad (7, 5, 16)$$

λ_{n1} -ը սկալար գործակից է:

Սկալարորեն բազմապատկենք (7, 5, 15) և (7, 5, 16)-ը

$\hat{a} \times \hat{b}$ -ով

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\omega} - \omega_1) \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) &= \lambda_1 \hat{a} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) = 0 \\ (\bar{\omega} - \bar{\omega}_{n1}) \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) &= \lambda_{n1} \hat{b} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7, 5, 17)$$

որովհետև

$$\hat{a} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) = \hat{b} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) = 0:$$

(7, 5, 17) երկու բանաձևերից ստացվում է, որ

$$\bar{\omega}_1 \cdot (\hat{a} \times \hat{b}) = \bar{\omega}_{n1} \cdot (\hat{a} \times \hat{b})$$

կամ համաձայն (7, 5, 14)-ի

$$\omega_{n1} : \omega_1 = \frac{\hat{i} \cdot (\hat{a} \times \hat{b})}{\hat{j} \cdot (\hat{a} \times \hat{b})} = \frac{\hat{a} \cdot (\hat{b} \times \hat{i})}{(\hat{j} \times \hat{a}) \cdot \hat{b}},$$

և թե համարիչում կատարենք տասերի շրջանաձևն տեղափոխում,
իսկ հայտարարում փոխենք և $\times$ նշանների տեղերը Փոփոխելով
(7, 5, 9')-ից կարող ենք համաձայն (7, 5, 13)-ի գրել

$$\omega_{n1} : \omega_1 = - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{\cos \gamma}, \quad (7, 5, 18)$$

(7, 5, 18)-ի ձախ մասը կաշվում է փոխանցման թիվը Այն փոփոխական է, որովհետև β -ն և α -ն մասնակի ֆունկցիաներ են:

Վերևը ցույց էր արված, որ 2, β անկյունները պարբերաբար հասնում են $\frac{\pi}{2}$ արժեքին. ուստի (7, 5, 18)-ից բխում է, որ փոփոխանցման թիվը տատանվում է, հասնելով մաքսիմումի և մինիմումի. օրինակ, երբ $\cos \gamma > 0$, ապա

$$(\omega_{II} : \omega_I)_{\max} = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad (\omega_{II} : \omega_I)_{\min} = \cos \gamma \quad (7, 5, 19)$$

Պետք է նկատի առնել, որ երբ $\cos^2 \gamma$ մոտ է մեկի, ապա

$$\left(\frac{\omega_{II}}{\omega_I} \right)_{\max} : \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_I} \right)_{\min} = \frac{1}{\cos^2 \gamma}$$

նույնպես մոտ է մեկի: Այդ դեպքում, եթե I լիսեռի պատումը հախասարաչափ է, II լիսեռինը կլինի զրոյի հախասարաչափ:

Մի կարծուր դիտողություն: (7, 5, 13)-ից երևում է, որ $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\cos \gamma = 0$ դեպքում 2, β անկյուններից մեկը միշտ զրո է, այսինքն Հուլի հոդի միջոցով շարժման փոխանցումը I լիսեռից II լիսեռին անհնարին է.

4°. Խաչկապի $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը:

(7, 5, 15)-ը ցույց է տալիս, որ խաչկապի ակնթարթային անկյունային արագությունը (և ակնթարթային առանցքը) գտնվում են I լիսեռով և AA' առանցքով անցնող հարթություն մեջ ($\hat{i} \parallel$ I լիսեռին, $\hat{a} \parallel AA'$) այսինքն ACA' հարթության մեջ: (7, 5, 16)-ից եզրակացնում ենք, որ $\bar{\omega}$ -ն գտնվում է BDB' հարթության մեջ: Այսպիսով E -ի ակնթարթային առանցքը միշտ համընկնում է ACA' և BDB' հարթությունների հատման ուղղի հետ:

$\bar{\omega}$ -ի չափը որոշելու համար օգտվենք (7, 5, 15)-ից, (7, 5, 16)-ից և (7, 5, 8)-ից

$$(\bar{\omega} - \bar{\omega}_I) \cdot \hat{i} = 0 \quad \text{կամ} \quad (\bar{\omega} - \bar{\omega}_I) \cdot \bar{\omega}_I = 0;$$

Նման ձևով

$$(\bar{\omega} - \bar{\omega}_{II}) \cdot \hat{j} = 0 \quad \text{կամ} \quad (\bar{\omega} - \bar{\omega}_{II}) \cdot \bar{\omega}_{II} = 0;$$

Այստեղից

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_1} = \overline{a_1}^2, \quad \overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} = \overline{a_{11}}^2 \quad (7, 5, 20)$$

(7, 5, 15) և (7, 5, 16)-ի տեղից բաղձապատկումից, շնորհիվ (7, 5, 7)-ի ստանում ենք

$$(\overline{a_1} - \overline{a_1}) \cdot (\overline{a_1} - \overline{a_{11}}) = 0$$

կամ

$$\overline{a_1}^2 - \overline{a_1} \cdot \overline{a_1} - \overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} + \overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} = 0$$

Օգտվելով (7, 5, 20)-ից, ստանում ենք

$$\overline{a_1}^2 = \overline{a_1}^2 + \overline{a_{11}}^2 - \overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} \quad (7, 5, 21)$$

Այստեղ, համաձայն (7, 5, 14)-ի և (7, 5, 8)-ի

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} = \overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} \cos \gamma \quad (7, 5, 21)$$

Այսպիսով (7, 5, 21)-ը կրճատնի հետևյալ տեսքով

$$\overline{a_1}^2 = \overline{a_1}^2 + \overline{a_{11}}^2 - \overline{a_1} \cdot \overline{a_{11}} \cos \gamma,$$

որում $\overline{a_{11}}$ -ը կարելի է արտահայտել $\overline{a_1}$ -ով ըստ (7, 5, 18)-ի:

§ 7. 6. Էլիևի անկյունները

§ 5, 3, 2 առկա է, որ անշարժ տառնյքի շուրջը պտտվող կարծր մարմնի զիրքը որոշվում է պտտման առանցքով և φ անկյունով: Նույնը ներառում է նաև այն դեպքում, երբ մարմինը ունի անշարժ կետ և պտտվում է այդ կետով անցնող անկյունից անընդհատ փոխվելով ևն նաև առանցքի զիրքը որոշող մեծությունները:

Ներքևում մանրամասնորեն կըննարվենք այս հարցը: Օ-ն անշարժ կետն է:

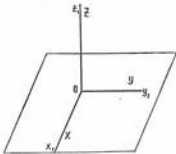
Կամայական OH առանցքի զիրքը որոշելու համար բազմապիսի է առաջ ելնել անկյուններ՝ ψ և ϕ (Նկ. 2—12ա, որտեղ առանցքը նշանակված է OB): Ենթադրենք, մարմինը պտտվել է OH առանցքի շուրջը φ անկյամբ: Ակներև է, որ այս երեք անկյուններով կորոշվի կարծր մարմնի և նրա հետ կապված կորդի-նատային $Oxyz$ սխեմայի զիրքը և հետևապես այդ կորդի-նատային սխեմայի առանցքներով և անշարժ $OXYZ$ կորդի-նատային սխեմայի առանցքներով կազմված անկյունների կոսինուսները:

Պարզենք, թե ինչպես են առաջանում ψ , θ , φ անկյունները և նրանց փոփոխությունները:

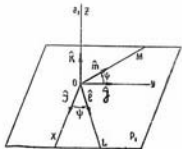
ա) Շարժական կոորդինատային $Ox_1y_1z_1$ սխեմայի սկզբնական դիրքը նշանակենք $Ox_1y_1z_1$ և ենթադրենք, որ այդ դիրքում այդ սխեմայի առանցքները համընկնում են անշարժ սխեմայի նույնանուն առանցքների հետ՝ Ox_1 -ը Ox -ի հետ, Oy_1 -ը Oy -ի հետ, և Oz_1 -ը Oz -ի հետ (նկ. 7—12ա):

Եթե պատենք $Ox_1y_1z_1$ սխեմայի ψ անկյունով OZ -ի շուրջը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, Ox_1 առանցքը կգրավի OL դիրքը, Oy_1 առանցքը՝ OM դիրքը, իսկ Oz_1 առանցքը կմնա համաստեղիված OZ -ի հետ:

$\angle XOL = \angle yOM = \psi$, LOM հարթությունը համընկնում է XOY հարթության հետ (նկ. 7—12բ):



Նկ. 7—12ա:



Նկ. 7—12բ:

բ) Պատենք $OLMz_1$ սխեմայի OL առանցքի շուրջը θ անկյամբ ժամացույցի սլաքին հակառակ (նկ. 7—12գ): Այժմ Oz_1 առանցքը կընդունի Oz դիրքը, OM առանցքը կգրավի ON դիրքը, OL առանցքը կմնա անշարժ, LOM հարթությունը կգրավի LOM դիրքը, որը կազմում է θ անկյուն XOY հարթության հետ:

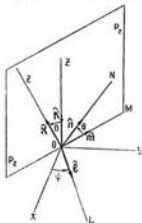
գ) Պատենք $OLNz$ սխեմայի Oz առանցքի շուրջը φ անկյամբ ժամացույցի սլաքին հակառակ (նկ. 7—12դ): Այս պատման հետևանքով OL և ON առանցքները կգրավեն համաստեղատեսակությամբ Ox , Oy դիրքերը, ընդ որում XOy հարթությունը համընկնում է LON հարթության հետ:

Շարժական կոորդինատային սխեմայի $Ox_1y_1z_1$ դիրքից $Oxyz$ դիրքը փոխանցման նկարագրումից երևում է, ψ , θ , φ անկյունների կամախոսակամությունը և հետևապես նրանց անկախությունը:

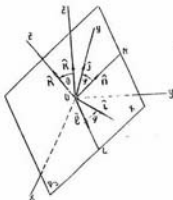
φ -ն կոչվում է պրեցեսիայի անկյուն, θ -ն նուստացիայի անկյուն, ψ -ն զուտ պտտման անկյուն (կամ սեփական պտտման անկյուն):

Այս՝ ψ , θ , φ անկյունները կոչվում են էլեմերի անկյուններ։
 OL -ը անվանենք հանգույցների առանցք (ստվորաբար OL -ը անվանվում է հանգույցների գիծ)։

Հարկավոր է նկատի առնել, որ անկյունների այս սահմանումը միակը չէ, Այսպես երբեմն անկյունները հաշվվում են ոչ թե ժամացույցի սլաքին հակառակ, այլ ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։
 Երբեմն φ -ի փոխարեն գրում են ψ և ընդհանրացնում։



Նկ. 7—12գ.



Նկ. 7—12գ.

Այստեղ նշված անկյունները ընտրությունը լայնորեն օգտագործվում է մի շարք առաստաղ հարցերի քննարկման ժամանակ։

φ և ψ անկյունները փոփոխվում են O -ից մինչև 2π ։ Ընդունում են, որ θ անկյունը փոփոխվում է O -ից մինչև π (պատճառը այն է, որ երբ θ -ն գերազանցում է π , օրինակ $\theta = ZOz = \pi + \theta_0$, մյուս ZOz անկյունը, որի չափը հավասար է $\pi - \theta_0$, ընդունվում է որպես θ և համարվում բացասական, քանի որ ուղղված է ըստ ժամացույցի սլաքի)։

Այսպիսով, երբ $\theta > \pi$ կան երկու անկյուններ՝ դրական $\theta_0 - \pi$ և բացասական $\theta_0 - \pi$, որի չափը հավասար է $\pi - \theta_0$ ։ Ինչպես հայտնի է

$$\sin(\theta_0 + \pi) = \sin(\theta_0 - \pi),$$

$$\cos(\theta_0 + \pi) = \cos(\theta_0 - \pi),$$

§ 7. 7. Իճը ուղղորդ կոսինուսնրի արտահայտությունները
 θ, ψ, φ անկյունների միջոցով

1°. Բացի հանդույցների OL առանցքից քննարկենք նաև
 ուժանդակ երկու առանցքների OM, ON : OM -ը գտնվում է XOY
 հարթությունից վրա և կազմում է $+\frac{\pi}{2}$ անկյուն OL -ի հետ, իսկ
 ON առանցքը XOY հարթության վրա է և նույնպես կազմում է
 $\frac{\pi}{2}$ անկյուն OL -ի հետ (LOM, LON ուղիղ անկյունները հաշվ-
 վում են ժամացույցի սլաքին հակառակ):

Անշարժ OX, XY, OZ առանցքների միավոր-վեկտորները
 նշանակենք համապատասխանաբար $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$, շարժական $Ox, Oy,$
 Oz առանցքների միավոր-վեկտորները՝ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, իսկ $OL, OM,$
 ON առանցքներինը՝ $\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}$:

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ ինը կոսինուսների արտահայ-
 տությունները որոշելու համար պետք է նշված բոլոր միավոր-վեկ-
 տորները բաշխել կոպլանար խմբերի և օգտվել այն հանդամանքից,
 որ փոխադարձաբար ուղղահայաց միավոր-վեկտորների եռյակները
 աշ ձևովի են:

Կոպլանար են $\hat{I}, \hat{J}, \hat{l}, \hat{m}$ (նկ. 7—12բ) միավոր-վեկտորները,
 նրանց համապատասխանող առանցքները (OX, OY, OL, OM)
 XOY հարթության վրա են, իսկ $\hat{K}, \hat{l}, \hat{m}$ միավոր-վեկտորները
 կազմում են աշ ձևովի եռյակի, այսինքն

$$\hat{K} \times \hat{l} = \hat{m}, \quad \hat{l} \times \hat{m} = \hat{K}, \quad \hat{m} \times \hat{K} = \hat{l} \quad (7, 7, 1)$$

Ըստ նկ. 7—12բ-ի

$$\hat{l} = \hat{I} \cos \varphi + \hat{J} \sin \varphi \quad (7, 7, 2)$$

(7, 7, 1) և (7, 7, 2) տալիս են

$$\hat{m} = \hat{K} \times \hat{l} = \hat{J} \cos \varphi - \hat{I} \sin \varphi \quad (7, 7, 3)$$

Ox, Oy, OL, ON առանցքները գտնվում են XOY հարթու-
 թյան վրա. Ուստի $\hat{i}, \hat{j}, \hat{l}, \hat{n}$ միավոր վեկտորները կոպլանար
 են: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ և $\hat{k}, \hat{l}, \hat{n}$ եռյակները աշ ձևովի են և արդ պատճառով

$$\dot{k} \times \dot{l} = \dot{n}, \quad \dot{n} \times \dot{k} = \dot{l}; \quad (7, 7, 4)$$

Այսպիսով կարող ենք գրել

$$\dot{l} = \dot{l} \cos \varphi + \dot{n} \sin \varphi \quad (7, 7, 5)$$

$$\dot{j} = \dot{k} \times \dot{l} = \dot{n} \cos \varphi - \dot{l} \sin \varphi \quad (7, 7, 6)$$

Վերջապես OZ , Oz , OM , ON առանցքները ուղղահայաց են OL -ին: (նկ. 7—12գ) ուստի $\dot{K}$, $\dot{k}$, $\dot{m}$, $\dot{n}$ միավոր-վեկտորները կոպլանար են, իսկ $\dot{k}$, $\dot{l}$, $\dot{n}$ և $\dot{K}$, $\dot{l}$, $\dot{m}$ եռվեկտորը աջ ձեռքի են: Այստեղից

$$\dot{n} = \dot{m} \cos \theta + \dot{K} \sin \theta, \quad (7, 7, 7)$$

$$\dot{k} = \dot{l} \times \dot{n} = \dot{l} \times \dot{m} \cos \theta + \dot{l} \times \dot{K} \sin \theta = \dot{K} \cos \theta - \dot{m} \sin \theta \quad (7, 7, 8)$$

3. Արտաքսելով օժանդակ $\dot{l}$, $\dot{m}$, $\dot{n}$ միավոր-վեկտորները 1-ում բերված առնչություններից, կհանգենք $\dot{l}$, $\dot{l}$, $\dot{k}$ -ի արտահայտություններին $\dot{j}$, $\dot{l}$, $\dot{K}$ -ի և ψ , θ , φ անկյունների հաանկումաչափական ֆունկցիաների միջոցով:

Օրինակ, տեղադրելով (7, 7, 5)-ի մեջ $\dot{l}$ -ի արտահայտությունը (7, 7, 2)-ից, իսկ $\dot{n}$ -ի արտահայտությունը (7, 7, 7)-ից և (7, 7, 3)-ից $\dot{l}$ -ի համար կստանանք

$$\dot{l} = (\dot{l} \cos \psi + \dot{j} \sin \psi) \cos \varphi + (\dot{m} \cos \theta + \dot{K} \sin \theta) \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \dot{l} \cos \psi \cos \varphi + \dot{j} \sin \psi \cos \varphi + \dot{j} \cos \psi \sin \varphi \cos \theta - \\ &- \dot{l} \sin \psi \sin \varphi \cos \theta + \dot{K} \sin \varphi \sin \theta \end{aligned}$$

կամ

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \dot{l} (\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi \cos \theta) + \\ &+ \dot{j} (\sin \psi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta) + \dot{K} \sin \varphi \sin \theta; \end{aligned} \quad (7, 7, 9)$$

(7, 7, 9)-ից դառնում ենք α_1 , β_1 , γ_1 կոսինուսների արտահայտությունները՝

$$\alpha_1 = \dot{i} \cdot \dot{j} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \quad (7, 7, 10_1)$$

$$\beta_1 = \dot{i} \cdot \dot{j} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \quad (7, 7, 10_2)$$

$$\gamma_1 = \dot{i} \cdot \dot{K} = \sin \varphi \sin \theta \quad (7, 7, 10_3)$$

Նման եղանակով [նորից օգտվելով (7, 7, 1)-(7, 7, 8)-ից], կատանալինք $\dot{j}$ -ի արտահայտությունը և $\alpha_2 = \dot{j} \cdot \dot{i}$, $\beta_2 = \dot{j} \cdot \dot{j}$, $\gamma_2 = \dot{j} \cdot \dot{K}$ կստանանք

3°. Բայց կա ավելի կարճ ճանապարհ: Իսկապես, միայն φ անկյունը փոփոխվում է համար հարկավոր է պատել շարժական սխեմներ անշարժ OZ առանցքի շուրջը, քնդ որում $\dot{k} = \text{const}$, իսկ $\dot{i}$, $\dot{j}$ միավոր-վեկտորները փոփոխվելով մնում են ուղղահայաց $\dot{k}$ -ին: Այսպիսի դեպքում, համաձայն (1, 5, 7)-ի կամ (7, 5, 11)-ի

$$\frac{\partial \dot{i}}{\partial \varphi} = \dot{j}$$

և որովհետև $OXYZ$ կոորդինատային սխեմներ անշարժ է,

$$\frac{\partial \dot{i}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \dot{j}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \dot{K}}{\partial \varphi} = 0$$

Ուստի, ամանցելով ըստ φ -ի (7, 7, 10₁) բանաձևը կստանանք

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial (\dot{i} \cdot \dot{j})}{\partial \varphi} = \dot{j} \cdot \dot{i} = \alpha_2$$

Այժմ ստի ամանցելը՝

$$\frac{\partial (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta)}{\partial \varphi} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta,$$

Այսպիսով ստացվում է, որ

$$\alpha_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} = \dot{j} \cdot \dot{i} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \quad (7, 7, 11_1)$$

Նման եղանակով (7, 7, 10₂) և (7, 7, 10₃) բանաձևերը տալիս են

$$\dot{J} \cdot \dot{J} = \beta_2 = \frac{\partial \beta_2}{\partial \varphi} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \quad (7, 7, 11_2)$$

$$\dot{J} \cdot \dot{K} = \gamma_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi} = \cos \varphi \sin \theta \quad (7, 7, 11_3)$$

Այժմ α_2 , β_2 , γ_2 կոսինուսները ստանալու համար պետք է (7, 7, 11₁)—(7, 7, 11₃) բանաձևերը ածանցել ըստ θ -ի: $\frac{\partial \dot{J}}{\partial \theta}$ մասնակի ածանցյալը հեշտ է որոշվում, եթե նկատի առնենք, որ միայն θ -ն փոփոխելու համար պետք է պտտել շարժական սխեմայի OL առանցքի շուրջը ընդ որում $\dot{L} = \text{const}$, իսկ $\dot{k}$ և $\dot{n}$ միավոր-վեկտորները, փոփոխվելով մնում են ուղղահայաց $\dot{L}$ -ին: Համաձայն (1, 5, 11)-ի (7, 7, 6)-ի ածանցյալը՝

$$\frac{\partial \dot{J}}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{n}}{\partial \theta} \cos \varphi = \dot{k} \cos \theta \quad (7, 7, 12)$$

Ուստի (7, 7, 11₁)—(7, 7, 11₃)-ի մասնակի ածանցյալները ըստ θ -ի կլինեն՝

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} = \frac{\partial (\dot{J} \cdot \dot{I})}{\partial \theta} = \dot{k} \cdot \dot{I} \cos \varphi = \alpha_2 \cos \varphi = \sin \psi \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} = \frac{\partial (\dot{J} \cdot \dot{J})}{\partial \theta} = \dot{k} \cdot \dot{J} \cos \varphi = \beta_2 \cos \varphi = -\cos \psi \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} = \frac{\partial (\dot{J} \cdot \dot{K})}{\partial \theta} = \dot{k} \cdot \dot{K} \cos \varphi = \gamma_2 \cos \varphi = \cos \varphi \cos \theta:$$

Այստեղից՝

$$\alpha_2 = \dot{k} \cdot \dot{I} = \sin \psi \sin \theta$$

$$\beta_2 = \dot{k} \cdot \dot{J} = \cos \psi \sin \theta$$

$$\gamma_2 = \dot{k} \cdot \dot{K} = \cos \theta$$

Վերջնականորեն ստացվում է 9 ուղղորդ կոսինուսների համար հետևյալ աղյուսակը.

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{j}$	$\alpha_1 = \cos(\hat{i}, \hat{j}) = \hat{i} \cdot \hat{j}$	$\alpha_2 = \cos(\hat{j}, \hat{j}) = \hat{j} \cdot \hat{j}$	$\alpha_3 = \cos(\hat{k}, \hat{j}) = \hat{k} \cdot \hat{j}$
$\hat{j}$	$\beta_1 = \cos(\hat{i}, \hat{j}) = \hat{i} \cdot \hat{j}$	$\beta_2 = \cos(\hat{j}, \hat{j}) = \hat{j} \cdot \hat{j}$	$\beta_3 = \cos(\hat{k}, \hat{j}) = \hat{k} \cdot \hat{j}$
$\hat{K}$	$\gamma_1 = \cos(\hat{i}, \hat{K}) = \hat{i} \cdot \hat{K}$	$\gamma_2 = \cos(\hat{j}, \hat{K}) = \hat{j} \cdot \hat{K}$	$\alpha_3 = \cos(\hat{k}, \hat{K}) = \hat{k} \cdot \hat{K}$

Համաձայն վերևում ստացածի՝

$$\alpha_1 = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta$$

$$\beta_1 = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta$$

$$\gamma_1 = \sin \varphi \sin \theta$$

$$\alpha_2 = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta$$

$$\beta_2 = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta$$

$$\gamma_2 = \cos \varphi \sin \theta$$

$$\alpha_3 = \sin \psi \sin \theta$$

$$\beta_3 = \cos \psi \sin \theta$$

$$\gamma_3 = \cos \theta$$

§ 7. 8. Կարծր մարմնի շարժումը ընդհանուր դեպքում

1° Արդեն քննարկված է կարծր մարմնի շարժումը, երբ մարմինն ունի

ա) երկու անշարժ կետ (պատում հաստատուն առանցքի շուրջը),

բ) մի անշարժ կետ (պատում ակնթարթյալին առանցքի շուրջը): Նաև քննարկված է մարմնի համընթաց շարժումը:

Այժմ ցույց տանք, որ երբ մարմինը անշարժ կետեր չունի ամենաընդհանուր շարժումը իրենից ներկայացնում է համընթաց և պտտողական շարժումների համախառնված:

2°. Դիցուք A կետը հանգիստանում է տարրեր վեկտորական հատվածների ընդհանուր սկիզբը և $\vec{b} = \overline{AB}$ (7, 2, 7)-ի հիման վրա

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overline{AB} = \vec{\omega} \times \vec{b} \quad (7, 8, 1)$$

կամ

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{b} + \vec{v}_A \quad (7, 8, 2)$$

Մյուս $\vec{c} = \overline{AC}$ վեկտորական հատվածի համար, նման (7, 8, 2)-ին կստանանք

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{c} + \vec{v}_A \quad (7, 8, 2')$$

ընդունելով, որ A, B, C կետերը պատկանում են կարծր մարմնին, համաձայն (7, 8, 2)-ի գալիս ենք հետևյալ եզրակացության.

Կարծր մարմնի լուրջաքանչյուր կետի արագությունը արտահայտվում է մի գումարով. գումարելիներից մեկը օրն արագությունն է, որը կունենար կետը, եթե մարմինը պտտվեր A կետով անցնող առանցքի շուրջը. երկրորդ գումարելին նույնն է բոլոր կետերի համար:

A կետը, որի արագությունը հանգիստանում է (7, 8, 2), (7, 8, 2')-ի աջ մասերի երկրորդ գումարելին, անվանում են բևեռ կետի առնելով, որ մարմնի բոլոր կետերն ունեն նույն արագությունը միայն համընթաց շարժման դեպքում, կարելի է $\vec{v}_A$ -ն դիտել որպես համընթաց շարժումից առաջացած արագություն:

Այսպիսով (7, 8, 2), (7, 8, 2') արտահայտություններին կարելի է վերադրել հետևյալ իմաստը.

[7—J] Անշարժ կետեր չունեցող կարծր մարմնի շարժումը ընդհանուր դեպքում կարելի է պատկերացնել բաղկացած պտտողական և համընթաց շարժումներից: Պտտողական շարժման անկյունային արագությունը և համընթաց շարժման արագությունը կարող են ժամանակի ընթացքում անընդհատ փոփոխվել:

Համընթաց շարժման արագությունը հալսասար է բևեռի արագությունը. պտտման առանցքը անցնում է բևեռով:

Հետևապես, եթե որպես բևեռ ընտրված լինեն ատարներ կետեր (A, A'), ապա այդ երկու բևեռներին կհամապատասխանեն ատարներ համընթաց շարժումներ (այսինքն ատարի արագությունը

ներ $\bar{\psi}_A, \bar{\psi}_{A'}$ պատման առանցքները կունենալին տարբեր դիրքեր (մեկը կանցներ A -ով, մյուսը՝ A' -ով) բայց արդ առանցքները կլինեին իրար զուգահեռ և պտտումները կկատարվեին նույն անկյունային արագությամբ:

3°. Այդ վերջինը ապացուցելու համար A և A' բևեռներին համապատասխանող անկյունային արագությունները անվանենք $\bar{\omega}$ ու $\bar{\omega}'$ և նրանց միջոցով արտահայտենք մարմնի կամալական B կետի արագությունը:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{AB} + \bar{v}_A \quad (7, 8, 3)$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}' \times \overline{A'B} + \bar{v}_{A'} \quad (7, 8, 3')$$

A' և A կետերի արագությունների տարբերությունը ըստ (7, 8, 1)-ի

$$\bar{v}_{A'} - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AA'} \quad (7, 8, 3'')$$

Հանելով (7, 8, 3)-ը (7, 8, 3')-ից, ունենք

$$\bar{v}_{A'} - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AB} - \bar{\omega}' \times \overline{A'B}:$$

Այս արտահայտությունը (7, 8, 3'')-ի հետ տալիս է

$$\bar{\omega} \times \overline{AB} - \bar{\omega} \times \overline{AA'} = \bar{\omega}' \times \overline{A'B}$$

կամ, որովհետև

$$\overline{AB} - \overline{AA'} = \overline{A'B},$$

ապա

$$(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \times \overline{A'B} = 0:$$

Այդ արտադրյալը զրո կլինի երկու դեպքում՝

$$(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \parallel \overline{A'B},$$

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}' = 0$$

և քանի որ A', B կետերը և $\overline{A'B}$ հատվածի ուղղությունը միանգամայն կամալական են, մնում է միայն երկրորդ հնարավորություն՝

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}',$$

այսինքն այն, ինչ ուզում էինք ապացուցել՝

[7—K] Անկյունային արագությունը անկախ է բևեռի ընտրությունից:

4°. Պատման ակնթարթային առանցքի ուղղությունը և անկյունային $\bar{\omega}$ արագությունը գիտվող մոմենտում որոշվում են երեք կամայական (B , C , E) կետերի արագությունների:

Իսկապես, գիցուք այդ կետերի $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$, $\bar{v}_E$ արագությունները հալոնի են. նշանակելով

$$\overline{BC} = \bar{c}, \quad \overline{BE} = \bar{e}$$

և օգտվելով (7, 8, 1)-ից կարող ենք գրել

$$\dot{\bar{c}} = \bar{v}_C - \bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{c}$$

$$\dot{\bar{e}} = \bar{v}_E - \bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{e}.$$

ալատելից

$$\dot{\bar{c}} \times \dot{\bar{e}} = \dot{\bar{c}} \times (\bar{\omega} \times \bar{e}) = \bar{\omega} (\dot{\bar{c}} \cdot \bar{e}) - \bar{e} (\bar{\omega} \cdot \dot{\bar{c}}).$$

Եթե խառն արտադրյալի հատկությունների հիման վրա

$$\bar{\omega} \cdot \dot{\bar{c}} = \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{c}) = 0,$$

Այսպիսով

$$\dot{\bar{c}} \times \dot{\bar{e}} = \bar{\omega} (\dot{\bar{c}} \cdot \bar{e})$$

կամ

$$\bar{\omega} = \frac{\dot{\bar{c}} \times \dot{\bar{e}}}{\dot{\bar{c}} \cdot \bar{e}} = \frac{(\bar{v}_B - \bar{v}_C) \times (\bar{v}_B - \bar{v}_E)}{(\bar{v}_B - \bar{v}_C) \cdot \overline{BE}}, \quad (7, 8, 4)$$

Քանի որ պատման առանցքը դուրսն է $\bar{\omega}$ -ին, ապա (7, 8, 4)-ով որոշվում է նաև պատման առանցքի ուղղությունը:

Առանցքի գիրքը որոշելու համար բացի (7, 8, 4)-ից պետք է գիտենալ բևեռի գիրքը:

Մասնավոր դեպքում B , C , E , կետերից մեկը կարող է լինել (A) բևեռը:

5°. Անվանելով բևեռը A , և դիտելով ափսոսաբար կարծր մարմնի կետերի շառավիղ-վեկտորների սկիզբը, համաձայն (7, 8, 2)-ի ունենք

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}, \quad (7, 8, 5)$$

որտեղ ինչպես արդեն ասված է, $\bar{v}_A$ -ն բևեռի արագությունն է, $\bar{v}_B - B$ կետի արագությունն է, $\bar{\omega}$ -ն անկյունային արագությունն

է, որով մարմինը պատուում է A -ով անցնող առանցքի շուրջը $\overline{v}_A$ -ն B կետի արագության շահմանագրաց բաղադրիչն է, $\overline{v} \times \overline{b} - B$ կետի արագության պատուական բաղադրիչն է:

Անանցելով (7, 8, 5)-ը ըստ ժամանակի, ստանում ենք կարծր մարմնի B կետի արագացման արտահայտությունը՝

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + (\overline{z} \times \overline{b} + \overline{v} \times \overline{v}_B) = \overline{w}_A + [\overline{z} \times \overline{b} + \overline{v} \times (\overline{v} \times \overline{b})],$$

(7, 8, 6)

որում $\overline{w}_A$ — համընթաց շարժման արագացումն է (արագացման շահմանագրաց բաղադրիչը). իսկ փակագծերի մեջ եղած գումարի մասին մանրամասնորեն ասված էր § 7, 5-ում:

$\overline{v} \times \overline{b}$ պատուական արագացումն է, իսկ $\overline{v} \times \overline{v}_B = \overline{v} \times (\overline{v} \times \overline{b})$ կենտրոնաձիգ (առանցքաձիգ) արագացումն է:

Նկատենք, որ ակնթարթային առանցքի լուրջանչյուր P կետի շառավիղ-վեկտորը

$$\overline{p} = \overline{AP}, \quad \overline{p} \parallel \overline{v}, \quad \overline{v} \times \overline{p} = 0.$$

այդ պատճառով, ըստ (7, 8, 5) և (7, 8, 6)-ի

$$\overline{v}_P = \overline{v}_A, \quad \overline{w}_P = \overline{w}_A + \overline{z} \times \overline{p}. \quad (7, 8, 7)$$

$\overline{z} \times \overline{p}$ արտադրյալը ուղղահայաց է A -ով տարած ալն հորթթությանը, որը պարունակում է ակնթարթային AP առանցքը և անկյունային արագացումը:

(7, 8, 5), (7, 8, 6), (7, 8, 7)-ի հիման վրա կգրակացնում ենք՝

[7—L] Կարծր մարմնի շարժման ընդհանուր դեպքում

ա) ակերարթային առանցքի բոլոր կետերի արագությունները հավասար են բեռի արագությունը,

բ) ակերարթային առանցքի բոլոր կետերի արագացումները հավասար են «համընթաց» արագացման և պատուական արագացման գումարին,

գ) ակերարթային առանցքին չպատկանող որևէ կետի արագությունը հավասար է «համընթաց» և պատուական արագությունների գումարին, իսկ արագացումը՝ համընթաց, պատուական և կենտրոնաձիգ արագացումների գումարին:

§ 7. 9. Կարծր մարմնի շարժման վերածույթը
անհրաքարպին պատման

1. (7, 8, 2), (7, 8, 2') և [7—1]-ում քեռի $\bar{\psi}_A$ (այսինքն համընթաց) արագություն թե՛ չափը և թե՛ ուղղությունը միանգամայն կամայական են: Փննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ քեռի արագությունը ուղղահայաց է անթարթային առանցքին (կամ անկյունային արագությանը):

[7—M] երև համընթաց շարժման արագությունը ուղղահայաց է պատողական շարժման անկյունային արագությանը, ապա այդ երկու շարժումները համարվել են մի պատման, որը կատարվում է նույն անկյունային արագությամբ մի այլ՝ (նախկինին զուգահեռ) առանցքի շուրջը:

Դիցուք արված է համընթաց և պատողական շարժումների համախումբը, որում A քեռի արագությունը համասար է $\bar{\psi}_A$, պատման առանցքն AI -ն է, իսկ անկյունային արագությունը՝ ω ենթադրենք, որ շարժումների այս համախումբին համարվելք պատողական շարժման առանցքն է CD : [7—M] թեորեմը ապացուցելու համար կարելի է դատել այսպես. եթե թեորեմը ճիշտ է, ապա մարմնի յուրաքանչյուր ($A, B, \dots$) կեռի արագությունը արտահայտությունը կլինի

$$\bar{\psi}_A = \bar{\omega} \times \overline{CA}, \quad \bar{\psi}_B = \bar{\omega} \times \overline{CB}, \quad (7, 9, 1)$$

(7, 9, 1)-ից հետևում է, որ

$$\bar{\psi}_A \perp \bar{\omega}:$$

Բացի արդ, համընթաց և պատողական շարժումների դեպքում, բայց (7, 8, 3)-ի

$$\bar{\psi}_B = \bar{\psi}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}:$$

Տեղադրելով $\bar{\psi}_A$ -ի (7, 9, 1) արտահայտությունը, ստանում ենք

$$\bar{\psi}_B = \bar{\omega} \times \overline{CA} + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \bar{\omega} \times \overline{CB},$$

այսինքն, եթե $\bar{\omega}_A$ -ի համար ճիշտ է (7, 9, 1), ապա $\bar{\psi}_A$ -ի պես կարտահայտվեն մարմնի բոլոր կեռերի արագությունները, ինչպես և պետք է լինի պատման դեպքում:

CD առանցքի դիրքը հեշտ որոշվում է: Ինչպես արդեն դիտենք V զվիթց, շառավիղ-վեկտորների սկիզբը պատման առանցքի

վրա կամայական է. հետևապես CD առանցքի վրա C կետը կարելի է աշխատել ընտրել, որ $\overline{CA}$ -ն լինի ուղղահայաց $\overline{m}$ -ին: Այդ դեպքում (7, 9, 1) տալիս է

$$\overline{m} \times \overline{v}_A = \overline{m} \times (\overline{m} \times \overline{CA}) = -\overline{CA} \, m^2 = \overline{AC} \, m^2,$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{m} \times \overline{v}_A}{m^2}. \quad (7, 9, 2)$$

որտեղ $\overline{AC}$ -ն CD առանցքի հետախորտվածն է AH առանցքից: Արագիտով թևերումը ապացուցված է: Նպատակահարմար է հիշել, որ $\overline{m}$, $\overline{v}_A$, $\overline{AC}$ կազմում են վեկտորների աջ ձևերի եռյակ:

Պարզ է, որ $[7-M]$ թևերումը համարվել է հետևյալ թևերումին $[7-M']$ Պատումը մի առանցքի շուրջը կարելի է փոխարինել նույն անկյունային արագությամբ կատարվող պտտումով, ավյալ առանցքին զուգահեռ այլ առանցքի շուրջը և մի համընթաց շարժումով. որի արագությունը ուղղահայաց է պտտման առանցքին և հավասար է $\overline{m} \times \overline{l}$, որտեղ $\overline{l}$ -ը նոր առանցքի հետախորտվածն է նախկին առանցքից:

Արագիտով նոր առանցքի դիրքի (այսինքն թևերի) ընտրությունից կախված է համընթաց շարժման արագությունը:

§ 7. 10. Կարծր մարմնի պտտական շարժումը (զինամա)

1. Այժմ քննարկենք պտտողական և համընթաց շարժումների համախումբը ընդհանուր դեպքում, երբ A թևերի (այսինքն համընթաց շարժման) արագության ուղղությունը կամայական է (այլ ոչ թե ուղղահայաց է պտտման առանցքին):

Քանի որ A թևերի արագությունը ($\overline{v}_A$) հավասար է համընթաց շարժման արագությանը, կարող ենք նշանակել $\overline{v}_A$ -ն $\overline{v}_h$ -ով:

Վերլուծենք $\overline{v}_h$ -ը փոխադարձաբար ուղղահայաց երկու բաղադրիչների $\overline{v}'$ և $\overline{v}''$ (նկ. 7-13ա):

$$\overline{v}_h = \overline{v}' + \overline{v}'', \quad \overline{v}' \parallel \overline{m}, \quad \overline{v}'' \perp \overline{m} \quad (7, 10, 1)$$

այսինքն ըստ (1, 11, 1)-ի

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}' &= \vec{\omega} (\vec{v}_H \cdot \vec{\omega}) = \frac{\vec{\omega} (\vec{v}_H \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} \\ \vec{v}' &= \vec{\omega} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_H \times \vec{\omega})}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (7, 10, 2)$$

Անվանենք պատման ակնթարթային առանցքը AH : Համապատասխան համար «պատում» $\vec{\omega}$ անկյունային արագությամբ AH առանցքի շուրջը՝ նշանակենք $(\vec{\omega}, AH)$:

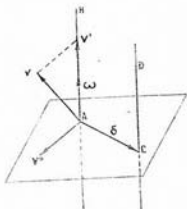
Համաձայն $[7-M]$ -ի $(\vec{\omega}, AH)$ պատումը և համընթաց շարժումը $\vec{v}''$ արագությամբ կարելի է փոխարինել մի պատումով $(\vec{\omega}, CD)$ (նկ. 7—13բ), որտեղ $CD \parallel AH$ և CD -ի $\vec{\omega}$ հեռավորությունը AH -ից արտահայտվում է

$$\vec{\delta} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}''}{\omega^2} \quad (7, 10, 3)$$

բանաձևով:



նկ. 7—13ա:



նկ. 7—13բ:

Այսպիսով $(\vec{\omega}, AH)$ պտտման և $\vec{v}''$ արագություն ունեցող համընթաց շարժման համախումբը համարժեք է $(\vec{\omega}, CD)$ պտտման և $\vec{v}'$ արագություն ունեցող համընթաց շարժման համախումբին, ընդ որում $\vec{v}' \equiv \vec{\omega}$ և արտահայտվում է $(7, 10, 2)$ բանաձևով, իսկ CD -ի հեռավորությունը AH -ից հավասար է $\vec{\delta}$: Այս երկրորդ համախումբը կոչվում է ակնթարթային պտուտակային շարժում (կամ դինամա): Այդ անվանումը կապված է մանեղում պտուտակի ներպտտման շարժման հետ կամ խցանահանի ափսոսանքի հետ, որով խցանը հանվում է շփոց: Երկու դեպքերում էլ պտուտակը պտտվում է իր երկրաչափական առանցքի շուրջը և միաժամանակ շարժվում է զուգահեռ ալիք առանցքին:

Ստացված արգրումները հետևյալ թևերումն է:

[7—N] Համընթաց և պտտողական շարժումների յուրաքանչյուր համախումբը համարվել է ակնբարդային պտուտակային շարժման:

§ 7, 8-ում ցույց է տրված, որ ամենաընդհանուր զեպքում կարծր մարմնի շարժումը կարելի է պատկերացնել բաղկացած համընթաց և պտտողական շարժումներից: Հետևապես [7—N] թևերում կարելի է ձևակերպել այսպես.

[7—N'] Կարծր մարմնի յուրաքանչյուր շարժումը կարող է բերվել պտուտակային շարժման:

Մասնավոր զեպքերում պտուտակային շարժումը վերածվում է ակնթարթային պտտողական շարժման (կբբ $\psi' = 0$) կամ ակնթարթային համընթաց շարժման (կբբ $\bar{\omega} = 0$):

2°. Բնութագրենք ավելի մանրամասնորեն մարմնի դիտարկվող շարժմանը համարենք պտուտակային շարժումը՝ (ω , CD) պտտման և ψ' արագություն ունեցող համընթաց շարժման համախումբը:

Պտուտակային CD առանցքը կոչվում է նաև սահքի ու պտտման առանցք, կենտրոնական առանցք: Այդ առանցքի $\bar{\delta}$ հեռավորությունը արված AI առանցքից արտահայտվում է (7, 10, 3)-ով. սակայն պետք է նկատի առնել, որ համաձայն (7, 10, 1)-ի

$$\bar{\psi}'' = \bar{\psi}_h - \bar{\psi}'$$

և որ

$$\bar{\psi}' \parallel \bar{\omega},$$

ուստի

$$\bar{\omega} \times \bar{\psi}'' = \bar{\omega} \times (\bar{\psi}_h - \bar{\psi}') = \bar{\omega} \times \bar{\psi}_h$$

արդյունով

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{\psi}_h}{\bar{\omega}^2}, \quad (7, 10, 3')$$

(7, 10, 3') կատարյալ նաև, եթե (7, 10, 3)-ում $\bar{\psi}'$ -ի փոխարեն տեղադրել նրա (7, 10, 2) արտահայտությունը:

(7, 10, 3)-ում փոխադարձաբար ուղղահայաց ω , $\bar{\psi}''$, $\bar{\delta}$ -ն կազմում են աջ ձևովի եռյակ (նկ. 7—13բ):

Կենտրոնական առանցքի հավասարումը կազմելու համար վերցնենք AI առանցքի A կետը որպես շառավիղ-վեկտորների սկիզբ, $\bar{r}$ -ով նշանակենք կենտրոնական առանցքի ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորը: Քանի որ $CD \parallel \bar{\omega}$, իսկ CD -ի հեռավորությունը AI -ից հավասար է $\bar{\delta}$, ուստի

$$\vec{r} = \vec{\delta} + \lambda \vec{\omega}, \quad (7, 10, 4)$$

որտեղ λ փոփոխական սկալար գործակցին կարելի է վերադրել բոլոր արժեքները — ∞ մինչև ∞ : (7, 10, 4)-ը կենտրոնական առանցքի վեկտորական հավասարումն է:

4°. Արագությունների բաշխումը պտտական շարժման ղեկավար: Դիցուք B -ն մարմնի կամարական կետն է, իսկ CD -ն կենտրոնական առանցքը: Պարզ է, որ B -ի արագությունը

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overline{CB} + \vec{v}':$$

Քանի որ $CD \parallel \vec{\omega}$, կենտրոնական առանցքի բոլոր կետերի համար

$$\vec{v} = \vec{v}': \quad (7, 10, 5)$$

Մարմնի ալն բոլոր B կետերի համար, որոնք չեն համընկնում կենտրոնական առանցքի հետ,

$$\vec{\omega} \times \overline{CB} \neq 0, \quad \vec{\omega} \times \overline{CB} \perp \vec{\omega} \parallel \vec{v}':$$

Հետևապես կենտրոնական առանցքին շարժականող բոլոր կետերի արագություններն ունեն երկուական բաղադրիչներ՝

$$\vec{v}' \quad \text{և} \quad (\vec{\omega} \times \overline{CB}) \perp \vec{v}'.$$

այսինքն

$$\vec{v}_B = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \overline{CB} \quad (7, 10, 7)$$

և

$$v_B^2 = v'^2 + (\vec{\omega} \times \overline{CB})^2: \quad (7, 10, 7')$$

(7, 10, 7')-ից եզրակացնում ենք, որ ամենափոքր չափի (v') ունեն կենտրոնական առանցքի կետերի արագությունները: Մարմնի մյուս կետերի արագությունների չափերը ավելի մեծ են. $\vec{\omega} \times \overline{CB}$ բաղադրիչի չափը ուղիղ համեմատական է դիտվող (B) կետի հեռավորությանը կենտրոնական առանցքից:

Արագության հավասար չափ ունեցող կետերի երկրաչափական տեղը ալն գլանի կողմնալիքն մակերևույթն է, որի երկրաչափական առանցքը համընկնում է կենտրոնական առանցքի հետ:

Պտտական շարժումը բաղկացած է պտտումից և պտտման (կենտրոնական) առանցքին զուգահեռ $\vec{v}'$ արագություն ունեցող համընթաց շարժումից: Այստեղից պարզ է, որ անսահման փոքր $d\vec{\varphi}$ անկյամբ պտտմանը համապատասխանում է առանցքին զուգահեռ անսահման փոքր $d\vec{h}$ տեղափոխում, $d\vec{h} \parallel \vec{\omega}$:

$$p = \frac{dh}{d\omega} \quad (7, 10, 8)$$

հարաբերությունը կոչվում է պատասխանին շարժման քաղ-
Ակներե է, որ

$$dh = v' dt, \quad d\varphi = \omega dt$$

և

$$\frac{dh}{d\omega} = \frac{v'}{\omega}.$$

միաս կողմից ըստ (7, 10, 3)-ի

$$v' = \frac{\omega \cdot \overline{v}_h}{\omega} = \overline{\omega} \cdot \overline{v}_h.$$

հետևապես

$$p = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{v}_h}{\omega^2}, \quad (7, 10, 8')$$

Ընդհանուր առմամբ $\overline{\omega}$, $\overline{v}_h$ և հետևապես p -ն ժամանակի ֆունկ-
ցիաներ են: Այն մասնավոր դեպքում, երբ

$$\overline{\omega} = \text{const}, \quad \overline{v}_h = \text{const},$$

ունենք

$$v' = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{v}_h}{\omega} = \text{const}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

որտեղ T կենտրոնական առանցքի շուրջը լրիվ պտույտի ժա-
մանակն է:

Այժմ

$$p = \frac{v'}{\omega} = \frac{v' T}{2\pi}.$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ $\overline{v}_h$ և $\overline{\omega}$ փոփոխական են, անընդհա-
տ փոփոխվում են կենտրոնական առանցքի ուղղությու-
նն ու դիրքը
և p քաղ:

§ 7. 11. Պատմությունը գումարումը

1°. Համաձայն $[7 - N']$ -ի ամենաընդհանուր դեպքում կարծի
մարմնի շարժումը զեր է ածվում պտուտակային շարժման, մաս-
նավոր դեպքերում պտուտակային շարժման փոխարեն ստացվում

է կամ պատում անխաթարօրէն առանցքի շուրջը, կամ համընթաց շարժում:

Հաճախ դիտարկում են ալն դեպքերը, երբ կարծր մարմինը միաժամանակ մասնակցում է մի քանի շարժումների, օրինակ երկու պտտումների:

«Պտտվել միաժամանակ երկու առանցքների շուրջը» արտահայտութիւնը նշանակում է, որ մարմինը պտտվում է առանցքներից մեկի շուրջը, իսկ վերջինս իր հերթին, մարմնի հետ միասին, պտտվում է մյուս առանցքի շուրջը: Այս պարագրաֆում դիտարկվելու է երկու պտտումների վերածուժը պտտատակալին շարժման կամ նրա մասնավոր տեսքերի: Ընդհանուր առմամբ մի քանի շարժումների համախմբի փոխարինումը շարժումների ավելի պարզ համախմբով անվանում են շարժումների գումարում: Հետևապէս, այն ինչ որ կատարվելու է ալն պարագրաֆում կարելի է անվանել պտտումների գումարում:

2°. Սկսենք ամենապարզ դեպքից, երբ երկու առանցքները, որոնց շուրջը մարմինը պտտվում է, հատվում են (նկ. 7—14ա):

Դիցուք կարծր մարմինը dt ժամանակամիջոցում պտտվել է $d\varphi_1$ անասան փոքր անկյունով AH_1 առանցքի շուրջը և ալք առանցքի հետ միասին $d\varphi_2$ անկյունով AH_2 առանցքի շուրջը:

Գտնի որ անասան փոքր անկյունները գումարվում են որպէս վեկտորներ, ալք նշանակում է, որ մարմինը dt ժամանակամիջոցում պտտվել է

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2 \quad (7, 11, 1)$$

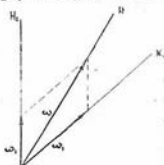
անկյունով. ալստեղծ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}$$

կամ

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (7, 11, 2)$$

Մենք արդեն գիտենք, որ անշարժ (A) կետ ունեցող մարմնի շարժումը միշտ հանդիսանում է պտտում անշարժ կետով անցնող առանցքի շուրջը, ա՛նս $[7—1]$:



Նկ. 7—14ա:

(7, 11, 2)-ով որոշվում է ալք պատման $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը, իսկ A կետով և $\bar{\omega}$ -ով որոշվում է պատման AH առանցքը, որովհետև $AH \parallel \bar{\omega}$:

3°. $\bar{\omega}$ և AH առանցքը գտնվում են AH_1 -ով և AH_2 -ով անցնող հարթության վրա: Բայց ալք հարթությունը AH_1 -ի հետ պատվում է AH_2 -ի շուրջը, հետևապես AH -ը ակնթարթային առանցք է: Շարժվելով, AH -ը դժուար է նրկու կոնական մակերևույթներ՝ մեկը անշարժ տարածության մեջ, մյուսը շարժվող մարմնի մեջ: Ալք կոնական մակերևույթները անվանվում են համապատասխանաբար անշարժ և շարժական աքսոիդներ:

Այս նրկու աքսոիդները ունեն ընդհանուր A գագաթ, յուրաքանչյուր մոմենտ շարժական աքսոիդի ծնիչներից մեկը համընկնում է անշարժ աքսոիդի ծնիչներից մեկի հետ. ալք ընդհանուր ծնիչը հանդիսանում է ակնթարթային առանցք:

§ 8, 7, 4°-ում ցույց է տրված, որ շարժական աքսոիդը դնրվում է առանց սահելու անշարժ աքսոիդի վրայով: Համանման անշարժ և շարժական ցննարոիդների, անշարժ և շարժական աքսոիդների ձևերով որոշվում են անշարժ կետ ունեցող մարմնի քուր կետերի հետագծերը:

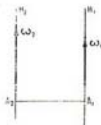
4°. Այժմ քննարկենք ալն զևպքերը, երբ շարժական A_1H_1 առանցքը, որի շուրջը պտտվում է մարմինը և A_2H_2 անշարժ առանցքը չեն հաափում (նկ. 7—14բ, նկ. 7—14գ): Չհաափող առանցքները կարող են լինել կամ գուգահեռ, կամ խաչվող, նրկու զևպքում էլ A_1 , A_2 կետերը առանցքների վրա կարելի է ընտրել ալնպես, որ A_1A_2 վեկտորը լինի ուղղահայաց թև՝ A_1H_1 և թև՝ A_2H_2 -ին՝

$$\overline{A_1A_2} \perp A_1H_1 \parallel \omega_1, \quad \overline{A_1A_2} \perp A_2H_2 \parallel \omega_2:$$

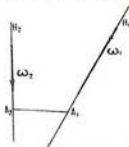
Այստեղ A_1A_2 -ը A_1 կետի հետափորությունն է, A_2H_2 առանցքից, $\bar{\omega}_1$ — անկյունային արագությունն է, որով մարմինը պտտվում է A_1H_1 առանցքի շուրջը, իսկ $\bar{\omega}_2$ անկյունային արագությունով պտտվում է A_1H_1 առանցքը A_2H_2 -ի շուրջը:

Կամենալով օգտագործել 2°-ում ստացված արդյունքները, տեղափոխենք A_1H_1 առանցքը իրեն գուգահեռ ալնպես, որ ալն գրափի A_2E դիրքը (նկ. 7—15ա և 7—15բ): A_2E -ն կհամընկնի A_2H_2 -ի հետ, եթե $A_1H_1 \parallel A_2H_2$ կամ կկազմի A_1H_2 -ի հետ որոշ անկյուն, եթե A_1H_1 և A_2H_2 -ը իրար գուգահեռ չեն:

Համաձայն $[7-M']$ -ի $(\bar{\omega}_1, A_1H_1)$ պատուհը համարվեք է $(\bar{\omega}_1, A_2E)$ պատման և $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 \times A_1A_2$ արագութիւն ունեցող



Նկ. 7-14a:



Նկ. 7-14b:

Համընթաց շարժման համախմբին: Ըստ (7, 11, 2)-ի $(\bar{\omega}_1, A_2E)$ և $(\bar{\omega}_2, A_2H_2)$ պատումները միասին համարվեք ևն $(\bar{\omega}, A_2D)$ պը-տրումանը, որտեղ,

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

իսկ

$$A_2D \parallel \bar{\omega}:$$

Այսպիսով երկու պատումները՝ $(\bar{\omega}_1, A_1H_1)$ և $(\bar{\omega}_2, A_2H_2)$ վեր ևն անվել մի պտման

$$(\bar{\omega}, A_2D)$$

և մի համընթաց շարժման, որի արագութիւնն է

$$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{A}_1\bar{A}_2: \quad (7, 11, 3)$$

Այս վերջին համախմբը բերվում է պտուտակալին շարժ-ման, ան'ս $[7-N]$: Անվանենք պտուտակալին շարժման առանցքը AH (Նկ. 7-15a և 7-15b), $AH \parallel \bar{\omega}$: Քանի որ $\bar{\omega}_1 \perp A_1A_2$, $\bar{\omega}_2 \perp A_1A_2$, ապա նաև $\bar{\omega} \parallel AH \parallel A_2D \perp A_1A_2$: Թող $\bar{\omega}$ լինի AH -ի հեռավորութիւնը A_2D -ից. (7, 10, 3)-ի հիման վրա ունենք

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{\omega}_h}{\omega^2}$$

կամ, ըստ (7, 11, 3)-ի

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\omega} \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{A}_1\bar{A}_2)}{\omega^2} = -\frac{\bar{A}_1\bar{A}_2 (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1)}{\omega^2} = \frac{\bar{A}_2\bar{A}_1 (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1)}{\omega^2}, \quad (7, 11, 4)$$

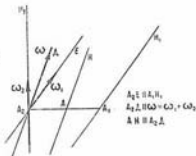
որովհետև $\bar{\omega} \perp A_1A_2$:

(7, 11, 4)-ից եզրակացնում ենք, որ $\tilde{\delta} \parallel \overline{A_2 A_1}$, բացի այդ $\tilde{\delta}$ և $\overline{A_2 A_1}$ -ը ունեն ընդհանուր A_2 կետը: Հետևապես $\tilde{\delta}$ և $\overline{A_2 A_1}$ -ը զա-
սավորված են մի ուղղի վրա, ուրեմն պատասխանին AH առանցքը
հասում է $A_2 A_3$ հատվածը, կամ նրա շարունակութունը (նկ. 7—
16ա, բ, գ, նկ. 7—17ա, բ, գ):



Նկ. 7—15ա:

$A_2 \in A_2 A_1$ եզրակացնում
են $A_1 A_2$ եզր



Նկ. 7—15բ:

Պատասխանին շարժման սահման $\tilde{\psi}'$ արագութիւնը

$$\tilde{\psi}' = \omega (\tilde{\psi}_H \cdot \omega) = \omega [(\omega_1 \times \overline{A_1 A_2}) \cdot \omega]$$

կամ, որովհետեւ փակագծերում կարելի է փոխել $\times$ և $\cdot$ -ի տեղերը.

$$\tilde{\psi}' = \frac{\omega [(\omega \times \omega_1) \cdot \overline{A_1 A_2}]}{\omega^2} \quad (7, 11, 5)$$

5. Քննարկենք (7, 11, 4), (7, 11, 5) բանաձևերը, երբ $A_1 H_1$
և $A_2 H_2$ առանցքները զուգահեռ չեն $\angle(\omega_1, \omega_2)$ անվանենք α_{12} :

ա) $\alpha_{12} < \frac{\pi}{2}$, հետևապես $\angle(\omega_1, \omega)$ նույնպես սուր է և
 $\omega \cdot \omega_1 > 0$ բացի այդ $\omega > \omega_1$, $\omega^2 > \omega \cdot \omega_1$, այսինքն

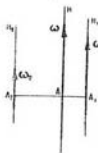
$$0 < \frac{\omega \cdot \omega_1}{\omega^2} < 1.$$

հետևապես

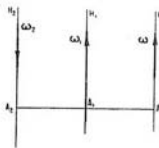
$$\tilde{\delta} \parallel \overline{A_2 A_1}$$

A կետը, որում AH առանցքը հասում է $A_1 A_2$ ուղիղը զասավոր-
ված է A_1 և A_2 -ի միջև:

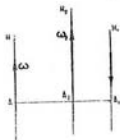
$$\frac{\tilde{\delta}}{A_1 A_2} = \frac{\omega \cdot \omega_1}{\omega^2} \quad (7, 11, 6)$$



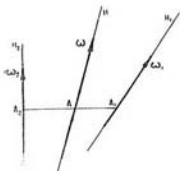
З.б. 7—19 мс



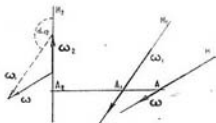
З.б. 7—18 рс



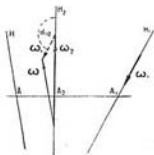
З.б. 7—16 рс



З.б. 7—17 мс



З.б. 7—17 рс



З.б. 7—17 рс

բ) $\omega_1 > \omega_2$, այն դեպքում $\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1 > 0$ միշտ և այդ պատճառով

$$\frac{\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1}{\omega^2} > 0, \quad \bar{\omega} \uparrow \overline{A_2 A_1};$$

Սակայն, եթե $\alpha_{12} > \frac{\pi}{2}$, ապա α_{12} որոշ արժեքից ավելի մեծ

արժեքների համար $\frac{\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1}{\omega^2}$, հետևապես նաև $\bar{\omega} > \overline{A_2 A_1}$:

դ) $\omega_2 > \omega_1$, այժմ, եթե $\alpha_{12} > \frac{\pi}{2}$, ապա α_{12} որոշ արժեքներից

սկսած $\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1 < 0$, ուստի $\bar{\omega} \nmid \overline{A_2 A_1}$, $\bar{\omega} \uparrow \overline{A_1 A_2}$:

Այս արդյունքները կարելի է ձևակերպել այսպես.

[7—O] երե մարմինը միաժամանակ պտտվում է երկու թաշվող առանցքների շուրջը, ապա պտուտակային առանցքը հատում է առանցքներից ուղղահայաց $A_1 A_2$ ուղիղը մի A կետում, որը

ա) դեպքում դասավորված է A_1 և A_2 -ի միջև, իսկ

բ) դեպքում կամ դասավորված է A_1 և A_2 -ի միջև, կամ եթե α_{12} անկյունը բութ է, ապա այդ անկյան որոշ արժեքից սկսած գտնվում է $A_2 A_1$ -ի շարունակության վրա և ավելի հեռու է A_2 կետից, քան A_1 -ից

գ) դեպքում A կետը գտնվում է $A_1 A_2$ -ի շարունակության վրա և ավելի հեռու է A_1 -ից քան A_2 -ից:

Շ^o. Այժմ անցնենք այն դեպքին, երբ $A_1 H_1$, $A_2 H_2$ տառնցքներն իրար դուգահեռ են:

Նշանակելով $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ զեկտորների թվական արժեքները համապատասխանաբար ω_1 , ω_2 , ω , ունենք

$$\frac{\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1}{\omega^2} = \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1} = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1 + \omega_2};$$

Հետևապես (7, 11, 4)-ը կդրվի այսպես՝

$$\bar{\omega} = \overline{A_2 A_1} \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = \overline{A_2 A_1} \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1 + \omega_2} \quad (7, 11, 4')$$

(7, 11, 4')-ից կդրակացնում ենք.

ա) եթե $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ անկյունային արագությունները իրար համադրական են,

$$0 < \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2} < 1,$$

$$\delta \uparrow \uparrow \overline{A_2 A_1}, \quad \delta < A_2 A_1.$$

բ) եթե $\overline{\omega}_1 \uparrow \downarrow \overline{\omega}_2, \quad \omega_1 > \omega_2,$

$$\delta \uparrow \uparrow \overline{A_2 A_1}, \quad \delta > A_2 A_1.$$

գ) եթե $\overline{\omega}_1 \uparrow \downarrow \overline{\omega}_2, \quad \omega_2 > \omega_1$

$$\delta \uparrow \uparrow \overline{A_2 A_1}.$$

դարձ է, որ q դեպքը վերածվում է r -ի, եթե փոխենք 1, 2 ինդեքսների տեղերը:

Արդյուպ

[7—1] նրբ մարմինը միաժամանակ պտտվում է երկու զուգահեռ առանցքների շուրջը, պտուտակային շարժումը վերածվում է ակնարարային պտտման տվյալ առանցքների զուգահեռ առանցքի շուրջը:

Այդ տեղեկությունն առանցքը հատում է առանցքներին ուղղահայաց A_1, A_2 ուղիղը մի A կետում, որը

ա) դասավորված է A_1 և A_2 կետերի միջև, եթե $\overline{\omega}_1$ և $\overline{\omega}_2$ անկյունային արագությունները իրար համադրական են.

բ) գտնվում է $A_2 A_1$ -ի շարունակության վրա, ավելի հեռու A_2 -ից քան A_1 -ից, եթե անկյունային արագությունները հակադրական են և $\overline{\omega}_1$ -ի չափը մեծ է $\overline{\omega}_2$ -ի չափից:

գ) գտնվում է $A_1 A_2$ -ի շարունակության վրա և ավելի հեռու A_1 -ից, քան A_2 -ից, եթե անկյունային արագությունները հակադրական են և $\overline{\omega}_2$ -ի չափը մեծ է $\overline{\omega}_1$ -ի չափից:

7°. Այն դեպքը, որում պտտման երկու առանցքները ($A_1 H_1, A_2 H_2$) իրար դուգահեռ են արժանի է հատուկ քննարկման, երբ $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ անկյունային արագություններն իրար հակադրական և ըստ չափի հավասար են, այսինքն, երբ $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 0$ (նկ. 7—18): Բայց $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 0$, այսպիսով $\overline{\omega} = 0$:

Դուրս առված է, որ երկու պտտումները ($\overline{\omega}_1, A_1 H_1$) և ($\overline{\omega}_2, A_2 H_2$) համարժեք են ($\overline{\omega}, A_2 D$) պտտմանը և $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{A_1 A_2}$

արագութիւն ունեցող համընթաց շարժմանը: Պարզ է, որ երբ $\vec{\omega} = 0$, ($\vec{\omega}$, $A_2 D$) պատումը ալիւս չիւ, և տրված երկու պատումները վեր են ածվում մի համընթաց շարժմանը, որի արագութիւնը

$$\vec{v}_h = \vec{\omega}_1 \times \overline{A_1 A_2}:$$

Նկատի առնելով, որ ալիւ գեպքում

$$\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1,$$

կարող ենք գրել

$$\vec{v}_h = \vec{\omega}_1 \times \overline{A_1 A_2} = \vec{\omega}_2 \times \overline{A_2 A_1}. \quad (7, 11, 7)$$

ալիւսիտով (նկ. 7—18).

[7—Q] Մարմնի միաժամանակ պտտվելը երկու գուգահեռ առանցքների շուրջը վեր է ածվում համերկաց շարժման, երբ թնկյունային արագութիւնները հակադուգահեռ են և ըստ չափի հավասար:

Համընթաց շարժումը կատարվում է ալիւսի արագութիւնը, որը կունենար առանցքներից մեկը՝ միւսի նկատմամբ պտտվելիս:

Համընթաց շարժման արագութիւն ուղղութիւնը և ուղղվածութիւնը հեշտ է որոշել, որովհետեւ (7, 11, 7)-ում $\vec{\omega}_1$, $\overline{A_1 A_2}$ և $\vec{v}_h$ փոխադարձաբար ուղղահայաց վեկտորները (կամ $\vec{\omega}_2$, $\overline{A_2 A_1}$ և $\vec{v}_h$) կազմում են աշ ձևովի եռյակ: $\vec{v}_h$ -ի չափը (քանի որ $\vec{\omega}_1 \perp \overline{A_1 A_2}$ -ին)

$$v_h = \omega_1 A_1 A_2,$$

8, (7, 11, 5)-ից բխում է, որ $\vec{v}' = 0$ ալիւ բոլոր գեպքերում, երբ

$$(\vec{\omega} \times \vec{\omega}_1) \cdot \overline{A_1 A_2} = 0.$$

կամ (քանի որ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$)

$$(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) \cdot \overline{A_1 A_2} = 0. \quad (7, 11, 8)$$

(7, 11, 8) տեղի ունի, երբ պտտման առանցքները ($A_1 H_1$ և $A_2 H_2$) գտնվում են միեւնույն հարթութիւն մեջ, ալիւսինքն, երբ առանցքները կամ դուգահեռ են, կամ հասկում են:

Բայց $\bar{\psi}'$ -ի դրս լինելու դեպքում պտտատակային շարժումը փերածվում է ակնթարթային պտտողական շարժման:

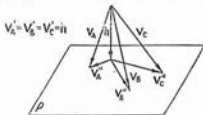
Հետևաբար (7, 11, 8)-ը բերում է այն արդյունքներին, որոնք ստացվել էին § 7, 11, 2^o և § 7, 11, 6^o-ում:

§ 7. 12. Խնդիրներ

Խնդիր 1: Տրված են կարծր մարմնի A, B, C կետերը և նրանց արագությունները $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C$ (նկ. 7-19): Գտնել պտտատակային առանցքը առանց հաշվումների:

Լուծում: Ենթադրվում է, որ այդ արագություններն իրար համաաար չեն, հետևապես շարժումը համընթաց չէ, և կարող է համարվել, լինել կամ պտտատակային, կամ պտտողական շարժման: Ի՞նչ սկզբնականից տանենք $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C$ արագությունները. նրանց ծայրերը կգտնվեն մի P հարթու-

թյան վրա: Վերլուծելով լուծա-
րանչուր արագությունը երկու
բաղադրիչների՝ զուգահեռ P -ին
($\bar{v}''$) և ուղղահայաց P -ին ($\bar{v}'$),
տեսնում ենք, որ P -ին ուղղա-
հայաց բաղադրիչները նույնն են
($\bar{v}_A' = \bar{v}_B' = \bar{v}_C'$). Խախ P -ին զու-



Նկ. 7-19.

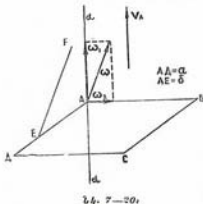
գահեռ բաղադրիչները մեկը մյուսից տարբերվում են ($\bar{v}_A'' \neq \bar{v}_B'' \neq \bar{v}_C''$): Այս մեկ իրավունք է տալիս կզրակացնել, որ $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C$ արագությունները առաջանում են երկու շարժումներից՝ համ-
ընթաց շարժում $\bar{v}' = \bar{v}_A' = \bar{v}_B' = \bar{v}_C'$ արագությունով և պտտում
 $\bar{v}'$ -ին զուգահեռ առանցքի շուրջը. այս երկու շարժումների համա-
խումբը կազմում է գինամա: Դինամայի առանցքը ուղղահայաց է
 P -ին: Առանցքի դիրքը հնչտ է որոշել, գիտենալով A, B, C կե-
տերի դիրքերը:

Իսկապես, եթե $\bar{v}_A$ առաջացել է պտտումից, $\bar{v}_A$ -ին ուղղա-
հայաց և A -ով անցնող Q_A հարթությունը պետք է անցնի նաև
առանցքով. ճիշտ նույնը կտրելի է տակ $\bar{v}_B$ -ին ուղղահայաց
 Q_B և $\bar{v}_C$ -ին ուղղահայաց Q_C հարթությունների նկատմամբ: Հե-

տեսակետ Q_A , Q_B , Q_C հարթությունները պետք է հասնեն միևնույն ուղղով, որը և պատման առանցքն է:

Խնդիր 2: S կարծր մարմնին պատկանող $\overline{AB}$ հատվածի մասին հայտնի է, որ A -ի հետադիմը $\alpha A\alpha$ ուղիղն է, իսկ AB -ն միշտ մնում է ուղղահայաց $\alpha A\alpha$ -ին (Նկ. 7—20):

Թվադիմել S -ի՝ այդ տվյալներին բավարարող շարժումները և բերել վերջինները պարզագույն համարժեք ձևերի:



Լուծում: Այդ տվյալներին համապատասխանող շարժումներն են՝

ա) Համընթաց շարժում, որում բոլոր կետերի հետադիմերը զուգահեռ են $\alpha A\alpha$ ուղիղին:

բ) Նույն համընթաց շարժումը և պտտումը $\alpha A\alpha$ առանցքի շուրջը: Այս շարժումների համախումբը ներկայացնում է գինամա, որի կենտրոնական առանցքն է $\alpha A\alpha$:

գ) Նույն համընթաց շարժումը և պտտումը AB առանցքի շուրջը, ընդ որում համընթաց շարժման արագությունը ուղղահայաց է պտտման առանցքին: Հետևապես, ըստ [7—M]-ի այս շարժումների համախումբը կարելի է բերել պտտման AB -ին զուգահեռ DC ակնթարթային առանցքի շուրջը:

դ) Պտտումներ $\alpha A\alpha$ և AB առանցքների շուրջը և համընթաց շարժումը $\alpha A\alpha$ ուղղությունով:

Այս դեպքում համընթաց շարժման արագությունը ալլես ուղղահայաց չէ համարժեք պտտման առանցքին: Այս երեք շարժումների համախումբը նույնպես կարելի է բերել գինամալի:

զ) զեպրի պտտման ակնթարթային DC առանցքի և ղ զեպրի գինամալի առանցքի գիրքերը որոշելու համար ենթադրենք, որ համընթաց արագությունը հավասար է $\overline{VA}$, իսկ $\overline{\omega_1}$ և $\overline{\omega_2}$ անկումային արագություններն են $\alpha A\alpha$ և AB -ի շուրջը:

Ըստ [7—M]-ի $DC \parallel AB$, անվանենք $\vec{a}$ DC -ի հեռավորությունը AB -ից: Համաձայն (7, 10, 3)-ի

$$\vec{a} = \frac{\vec{w}_2 \times \vec{\psi}_A}{w_2^2}$$

դ զեպքում պատման $\alpha A\alpha$ և AB առանցքները հաստատվում են, ուստի երկու պոտանուսները համարվել են պատմանը A -ով անցնող անվթարթմալին առանցքի շուրջը $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ անկյունային արագութլյամբ: Նկատի առնելով նաև համընթաց շարժումը $\vec{\psi}_A$ արագութլյամբ, պայկելով (7, 10, 3')-ից, կարող ենք որոշել դի-նամալի EF առանցքի $\vec{\psi}$ հետադորութլուներ A -ից

$$\vec{\psi} = \vec{AE} = \frac{\vec{w} \times \vec{\psi}_A}{w^2} = \frac{(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \times \vec{\psi}_A}{(w_1 + w_2)^2} = \frac{\vec{w}_2 \times \vec{\psi}_A}{(w_1 + w_2)^2},$$

քանի, որ $\vec{w}_1 \parallel \vec{\psi}_A$:

Համեմատելով $\vec{a}$ -ի և $\vec{\psi}$ -ի արտահայտութլուները, տեսնում ենք, որ DC և EF առանցքները հաստատվում են միևնույն AED ուղիղը. սակայն DC առանցքը ավելի հեռու է A -ից, քան EF -ը:

AED ուղիղը ուղղահայաց է $\alpha A\alpha$ -ին և AB -ին, այսպիսով AED ուղղի զիրքը կտրում չունի $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{\psi}_A$ -ի չափերից:

Ննդիր 3: (Նկ. 7—21). t մոմենտում $ABCD A'B'C'$ խորանարդի

A զազաթի արագութլուներ $\vec{\psi}_A = \alpha \vec{AB}$, $\alpha > 0$,



Նկ. 7—21.

C' զազաթի արագութլուն $\vec{\psi}_{C'} \parallel CC'$, իսկ D' զազաթի արագութլունը $\vec{\psi}_{D'}$ կամ զազահեռ է $A'D'CB$ հարթութլանը կամ դրո է:

Ելնելով այս ավելաներից, որոշել խորանարդի շարժումը t մոմենտում:

Լուծում: Ննդիրը կարելի է լուծել տարրեր եղանակներով, բայց բոլոր զեպքերում անհրաժեշտ է կիրառել $[7-F]$ թեորեմը: Այդ թեորեմը թույլ է տալիս որոշել $\vec{\psi}_{C'}$ -ի և $\vec{\psi}_{D'}$ -ի չափերը: Իրոք համաձայն $[7-F]$ -ի

$$\vec{\psi}_A \cdot \vec{AC'} = \vec{\psi}_{C'} \cdot \vec{AC'}:$$

Անվանելով խորանարդի կողերի չափեր a , իսկ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ և $\vec{AA'}$ կողերի միավոր-վեկտորները $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, ունենք

$$\bar{v}_A = \alpha \dot{a} \dot{i}, \quad \overline{AC'} = a (\dot{i} + \dot{j} + \dot{k}),$$

իսկ $\bar{v}_{C'}$ -ի $\overline{CC'}$ -ին զուգահեռ լինելու հետևանքով $\bar{v}_{C'} = \beta \dot{k}$, քանի որում β -ի ոչ նշանը, ոչ էլ չափը հայտնի չեն:

Այժմ կարող ենք ստացված հավասարությունը արտադրել արտաքին.

$$\alpha \dot{a} \dot{i} \cdot a (\dot{i} + \dot{j} + \dot{k}) = \beta \dot{a} \dot{k} \cdot a (\dot{i} + \dot{j} + \dot{k}),$$

այսինքն $\alpha = \beta$:

Անցնելով D կետի արագությունը, նկատի առնենք, որ

$$\overline{AD'} = a (\dot{j} + \dot{k}), \quad D'C' = \dot{a} \dot{i}$$

և $[7-F]$ -ի հիման վրա

$$\bar{v}_A \cdot \overline{AD'} = \bar{v}_{D'} \cdot \overline{AD'},$$

կամ

$$\bar{v}_A \cdot a (\dot{j} + \dot{k}) = \bar{v}_{D'} \cdot a (\dot{i} + \dot{j} + \dot{k}) = 0,$$

քանի որ

$$v_A \parallel \overline{AB} \parallel \dot{i},$$

նույնպես և

$$\bar{v}_{D'} \cdot \dot{a} \dot{i} = v_{C'} \cdot \dot{a} \dot{i} = 0, \text{ որովհետև } \bar{v}_{C'} \perp \dot{i}.$$

Այսպիսով

$$\bar{v}_{D'} \perp \dot{i}, \quad \bar{v}_{D'} \perp (\dot{j} + \dot{k})$$

այսինքն

$$\bar{v}_{D'} \parallel \dot{i} \times (\dot{j} + \dot{k}) = (\dot{k} - \dot{j}), \quad \bar{v}_{D'} \parallel (\dot{k} - \dot{j}) \parallel \overline{A'D}$$

$\overline{A'D}$ վեկտորը զուգահեռ չէ $\overline{A'BC'D'}$ հարթությանը, ուստի քան խնդրի պայմանի $\bar{v}_{D'} = 0$:

Չբա արագություն ունեցող կետի առկայությունը նշանակում է, որ է մոմենտում խորանարդի շարժումը պատում է այդ կետով անցնող առանցքի շուրջը: Առանցքի ուղղությունը համընկնում է $\bar{m}$ -ի ուղղության հետ:

Օղղակելով (7, 5, 2)-ից, ունենք

$$\bar{m} = \frac{\bar{v}_A \times \bar{v}_{C'}}{\bar{v}_A \cdot \bar{v}_{C'}}.$$

Այս մասում բոլոր արտադրիչները հայտնի են (շտապիրդ-վեկտոր-ներին սկիզբը համարելով անշարժ D' կետը, ունենք $\vec{r}_{C'} = \vec{a}\hat{i}$),
աւտի

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{a}\hat{i} \times \vec{a}\hat{k}}{\vec{a}\hat{i} \cdot \vec{a}\hat{i}} = -\vec{a}\hat{j},$$

Արտադրիչի պատման առանցք հանդիսանում է այն ուղիղը, որի հետ համընկնում է խորանարդի $D'A'$ կողը: Փ-ի չափը անկախ է խորանարդի կողի չափից և հալածար է համեմատականությունը $\propto$ գործակիցին:

Կարելի է արդյոք չդիտենալով պատման առանցքի դիրքը և անկյունային արագությունը, ցույց տալ, որ $\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_C$:

Գիտենալով այդ, կարելի է արդյոք որոշել պատման առանցքի դիրքը:

Խնդիր 4: D սկավառակի O կենտրոնը ամրացված է P հարթությունից h հեռավորության վրա: D -ն ազատ հաղցված է իր հարթությունը ուղղահայաց OA առանցքի վրա: D -ն առանց առհելու գլորվում է P հարթության վրայով: Որոշել տեղի ունեցող առերևույթ պատմանները և առնչություններն անկյունային արագություններին միջև:

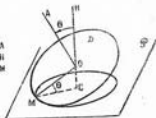
Լ ու ծ ու մ: «Ազատ հաղցված առանցքի վրա» դարձվածքը նշանակում է, որ սկավառակը կարող է պտտվել այդ առանցքի շուրջը:

Վերհիշենք 221-րդ էջի խնդիրը (նկ. 7—22ա): Նշանակելով D սկավառակի շտապիրդը R , կունենանք

$$\sin \psi = \frac{h}{R} = \text{const.}$$

որտեղ ψ -ն D -ով և P -ով կազմված անկյունն է. այդ հույն անկյունը կազմում են D -ի և P -ի OA , OH նորմալները՝

$$\psi = \angle HOA = \arcsin \frac{h}{R} = \text{const.}$$



Նկ. 7—22:

$\bar{b} = \text{const}$ պայմանին բավարարում են երկու տարրեր շարժումներ.

1. D -ի պտտումը ($\bar{\omega}_1$ անկյունային արագությունը) անշարժ OA առանցքի շուրջը: Այս դեպքում սկավառակի եզրագծի բոլոր կետերը հաջորդաբար և ակնթարթորեն հայվում են P -ի հետ, ունենալով P -ին դուգաձև և $\overline{CM}$ -ին ուղղահայաց արագություն

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 \times \overline{OM}$$

(M -ը սկավառակի այն կետն է, որը զիջվող մոմենտում գտնվում է P հարթության վրա):

2. D -ի և OA -ի որպես մի կարծր մարմնի պտտումը ($\bar{\omega}_2$ անկյունային արագությունը) OH անշարժ առանցքի շուրջը: Այս դեպքում D -ի M կետի հետագիծը P -ի վրա դասավորված և CM շառավիղ ունեցող շրջանագիծն է. այդ կետի արագությունը $\bar{v}_2 = \bar{\omega}_2 \times \overline{CM}$ և նույնպես դուգաձև է P -ին և ուղղահայաց CM -ին: Այսպիսով $\bar{v}_1 \parallel \bar{v}_2$:

Սակայն այս երկու պտտումներից ոչ մեկը առանձին վերցրած չի բավարարում այն պայմանին, որ սկավառակը զրոյվում է P -ի վրայով առանց սահելու: Իսկապես այդ պայմանը նշանակում է, որ D -ի և P -ի համընկնող կետերի արագությունները պետք է իրար հավասար լինեն, այսինքն, ավելի զեպքում, լինեն զրո (քանի որ P -ն անշարժ է):

Եթե 1) և 2) պտտումները կատարվեն միաժամանակ, միշտ կարելի է $\bar{\omega}_1$ և $\bar{\omega}_2$ անկյունային արագությունների չափերը և ուղղվածություններն այնպես ընտրել, որ M կետի արագությունը լինի զրո:

Քանի որ սկավառակի O կետը միշտ անշարժ է, իսկ M կետը ակնթարթորեն անշարժ է, համաձայն [7—I]-ի խնդրի պայմանը բավարարող շարժումը կլինի պտտում OM ակնթարթային առանցքի շուրջը և այդ պտտման $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը ըստ (7, 11, 2)-ի հավասար է $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$. Ընդ որում $\bar{\omega}_1 \parallel \overline{OA}$, $\bar{\omega}_2 \parallel \overline{OH}$, իսկ $\bar{\omega} \parallel \overline{OM}$: Ունենալով $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}$ -ի ուղղությունները կարելի է կառուցել անկյունային արագությունների հոսանկուն և որոշել $\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\omega}{\omega_1}$ հարաբերություններ՝

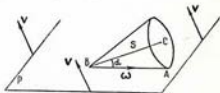
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \cos \theta, \quad \frac{\omega}{\omega_1} = \operatorname{tg} \theta$$

Քննարկելով P հարթությունը (նկ. 7—23) կատարում է համընթաց շարժում Ψ արագությամբ, P -ի վրա գլորվում է առանց սահելու ուղիղ շրջանային S կոնը, որի հիմքի կենտրոնն է C , իսկ բարձրությունը և բացման անկյունը հավասար են b և 2α :

C կետի՝ գլորումից առաջացած արագության u շաղկեր հաստատուն է:

Որոշել համարժեք պտուտակային շարժումը:

Լուծում: Փանի որ կոնը գլորվում է առանց սահելու, նրա B դադաթը P -ի վրա անշարժ է, հե-



Նկ. 7—23:

տեղակա B -ի արագությունը հավասար է $\bar{\Psi}$, իսկ C -ի հետագիծը P -ի նկատմամբ շրջանագիծ է, որի հարթությունը զուգահեռ է P -ի, իսկ շառավիղը հավասար է $b \sin \alpha$:

Պարզ է, որ P -ի նկատմամբ կատարվող պտտողական շարժման ակնթարթային առանցքը հանդիսանում է կոնի ափս BA ծնիշը, որը ներկա մոմենտում գտնվում է P -ի վրա: Դիցուք անկյունային արագությունը BA -ի շուրջը հավասար է $\bar{\omega}$:

Համաձայն (7, 10, 3')-ի պտուտակային առանցքը պետք է զուգահեռ լինի BA -ին և գտնվի նրանից

$$\bar{s} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{\Psi}}{\omega^2} \quad (a)$$

հետադարձության վրա:

$\bar{\omega}$ -ն կարելի է արտահայտել b , α և u -ի միջոցով: Անվանելով $\bar{h}$ C -ի բարձրությունը P -ից, տեսնում ենք, որ C -ի արագությունը

$$\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{h}, \quad \text{որտեղ } h = b \sin \alpha \quad (b)$$

Արտահայտ

$$\omega = \frac{u}{b \sin \alpha} = \text{const} \quad (c)$$

Ընարենք $\hat{\tau}$ միավոր-վեկտորը ափսակա, որ $\bar{\Psi} = \hat{\tau} u$. Բացի այդ ունենք $\bar{\omega} = \hat{\omega} \omega$, $\bar{h} = \hat{h} h$, (b) և (c)-ից հետևում է

$$\hat{\tau} = \hat{\omega} \times \hat{h}$$

Այսինքն ω , $\overset{\circ}{h}$, $\overset{\circ}{\tau}$ կազմում են ω -ը ձևաքի հարակ. հետևապես

$$\omega = \overset{\circ}{h} \times \overset{\circ}{\tau}:$$

Այսպիսով

$$\overset{\circ}{\delta} = \frac{\overline{\omega} \times \overline{\psi}}{\omega^2} = \frac{\overline{\omega} \times \overline{\psi}}{\omega} = \frac{(\overset{\circ}{h} \times \overset{\circ}{\tau}) \times \overline{\psi}}{\omega} = \frac{\overline{\psi} \times (\overset{\circ}{\tau} \times \overset{\circ}{h})}{\omega} \quad (e)$$

ընդ որում

$$\overline{\psi} \times (\overset{\circ}{\tau} \times \overset{\circ}{h}) = \overset{\circ}{\tau} (\overline{\psi} \cdot \overset{\circ}{h}) - \overset{\circ}{h} (\overline{\psi} \cdot \overset{\circ}{\tau}), \quad (e')$$

որտեղ $\overline{\psi} \cdot \overset{\circ}{h}$ և $\overline{\psi} \cdot \overset{\circ}{\tau}$ $\overline{\psi}$ -ի պրոեկցիաներն են $\overset{\circ}{h}$ և $\overset{\circ}{\tau}$ ուղղությունների վրա, իսկ ըստ (c)-ի $\omega = \frac{h}{b \sin \alpha}$:

(7, 10, 8')-ի հիման վրա որոշվում է պտուտակի քայլը

$$p = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{\psi}}{\omega^2} = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{\psi}}{\omega} = \frac{(\overset{\circ}{h} \times \overset{\circ}{\tau}) \cdot \overline{\psi}}{\omega}.$$

$\overline{\omega}$, $\overset{\circ}{\delta}$ և p -ն լիովին բնութագրում են պտուտակային շարժումը:

Այժմ անցնենք մասնավոր դեպքերի.

Ենթադրենք $\overline{\psi} \uparrow \overset{\circ}{h}$ (օրինակ, կոնը զլորվում է արկղի հորիզոնական հատակի վրա, իսկ հատակը շարժվում է ուղղաձիգ դեպի ներքև $\overline{\psi}$ արագությունը): Այդ դեպքում

$$(\overset{\circ}{h} \times \overset{\circ}{\tau}) \cdot \overline{\psi} = (\overline{\psi} \times \overset{\circ}{h}) \cdot \overset{\circ}{\tau} = 0$$

և համաձայն (7, 10, 8')-ի պտուտակի քայլը զրո է (այսինքն պտուտակային շարժումը վերածվում է պտտողականի):

Քանի որ այժմ p -ն, և $\overset{\circ}{\tau}$ -ն հորիզոնական են, իսկ $\overline{\psi}$ -ն ուղղաձիգ, ապա ըստ (e')-ի

$$\overline{\psi} \cdot \overset{\circ}{h} = -\psi, \quad \overline{\psi} \cdot \overset{\circ}{\tau} = 0$$

և

$$\overset{\circ}{\delta} = -\frac{\overset{\circ}{\tau} \psi}{\omega} = -\frac{\overset{\circ}{\tau} \psi b \sin \alpha}{h}:$$

Հետևապես զիտվող մասնավոր դեպքում հարթություն և կոնի շարժումների համախումբը համարվեք է ակնթարթային պտտմանը

BA-ին զուգահեռ և BA-ից $\left(-\frac{v b \sin \alpha}{u}\right)$ հեռավորության վրա գտնվող առանցքի շուրջը:

Քննարկենք նաև այն դեպքը, երբ $\vec{\psi} \parallel P$, այսինքն $\vec{\psi} \perp \hat{h}$: Այս դեպքում $\vec{\psi} \cdot \hat{h} = 0$ և սրավահան կոնի գլոբման հետեանքով $\vec{\tau} \cdot \hat{z}$ ընդունում է P հարթության վրա բոլոր հնարավոր ուղղությունները, տպա կոնի մի պատույթի ընթացքում $\vec{\tau} \cdot \vec{\psi}$ արտադրյալը ընդունում է բոլոր արժեքները $+v$ և $(-v)$ -ի միջև:

$$\vec{\tau} \uparrow \uparrow \hat{h}, \quad \text{երբ} \quad \vec{\tau} \cdot \vec{\psi} = -v,$$

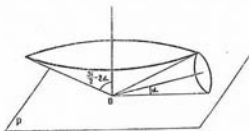
$$\vec{\tau} \uparrow \downarrow \hat{h}, \quad \text{երբ} \quad \vec{\tau} \cdot \vec{\psi} = v:$$

Այսպիսով, այժմ կենտրոնական առանցքը, միշտ լինելով զուգահեռ P -ն շոշափող ծնիչին, հեռանում է կամ մոտենում արդ ծնիչին, մնալով

$$\vec{z} = -\frac{v b \sin \alpha}{u}$$

առանձնեքում:

Այն մոմենտներում, երբ $\vec{\tau} \cdot \vec{\psi} = 0$ (այսինքն երբու անցում կոնի չուրաքանչյուր պատույթի ընթացքում), $\vec{\tau}$ համաստիքում է



Նկ. 7-24:

դրույթ, կենտրոնական առանցքը համընկնում է կոնի BA ծնիչի հետ:

Խնդիր 6: Երբու կոներն ունեն ընդհանուր O գագաթ. նրանց բացման անկյուններն են 2α և $\pi - 4\alpha$ (Նկ. 7-24): Առաջին կոնը առանց սահելու գլորվում է P հարթության վրայով, իսկ երկրորդը առանց սահելու գլորվում է առաջինի վրայով:

Գիտենալով, որ առաջին կոնի հիմքի կենտրոնը հալմասարա-
շափ շարժվելով կատարում է լրիվ պտույտ T վարկյանում, որո-
շել երկրորդ կոնի անկյունային արագությունը:

Խնդիր 7: Ծրշանային (1) սկալառակը պտտվում է (անշարժ)
 OH առանցքի շուրջը: Գիտենալով, որ OH -ը կազմում է D -ի OA
նորմալի հետ θ անկյուն, իսկ D -ի ամենացածր կետի արագու-
թյունը հալմասար է $\bar{v}$, գտնել D -ի կամալական կետի արագու-
թյան արտահայտությունը:

Խնդիր 8: A կետի հեռավորությունը պտտման առանցքից
հալմասար է $\bar{\rho}$: Գիտենալով $\bar{v}_A$ -ն գտնել նույն կարծր մարմնին
պատկանող B կետի արագությունը:

ՀԱՐԱՐԵՐԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ՏԵՍՈՒՓՅՈՒՆ

§ 8. 1. Հաւաքեալան շարժման տեսութեան էությունը

§ 2, 5, 7-ում ցույց է տրոջած, որ մեկը մյուսի նկատմամբ անշարժ դիտողների համար միեւնոյն կետի շարժումը թվում է նույնը: Բայց եթէ դիտողները անշարժ չեն մեկը մյուսի նկատմամբ, ապա միեւնոյն կետի շարժումը նրանց համար չի լինի նույնը:

Այսպիսով առաջ է դալիս հետեւյալ խնդիրը:

Տրոյած են հաշվարկային երկու սխառեմներ՝ Σ սխառեմը, որ համարվում է անշարժ, և շարժական Σ' սխառեմը: Σ' -ի շարժումը Σ -ի նկատմամբ հայտնի է. հայտնի է նաեւ B կետի շարժումը Σ' -ի նկատմամբ: Հարկավոր է որոշել B -ի շարժումը Σ սխառեմի նկատմամբ:

Այս խնդիրը կլինեմատիկայում ունի պրակտիկ նշանակութիւն:

Ընդդրի սկզբունքային արժեքը միշտ շատ մեծ է, որովհետեւ, ինչպես կտեսնենք հետագայում, դինամիկայի հիմնական օրենքները տեմիշտպես կիրառելի են միայն, երբ շարժումը դիտարկվում է հատուկ տեսակի հաշվարկային սխառեմներում (այսպես կոչված իներցիալ սխառեմներում):

§ 8. 2. Բացառակ, հաւաքեալան և փոխադրական շարժումներ

Ե. Անցնելով տերմինոլոգիային հարկավոր է նկատի առնել, որ որպէս հաշվարկային սխառեմ ընդունվում է որեւէ բացառակ կարծր մարմին, որին հաճախ մտքով տմբացվում է մի որեւէ կորդինատային սխառեմ:

Անշարժ համարվող Σ հաշվարքային սխառմում գիտվող շարժումը անմիջապես է բացարձակ Ախպիրյանի անշարժ Σ սխառմում գիտվող B կետի շարժումը բացարձակ շարժում է. արդ շարժման բոլոր էլեմենտները (հետադիմը, տեղափոխումը, արագությունը, արագացումը) նույնպես կոչվում են բացարձակ:

B կետի՝ շարժական Σ' սխառմում գիտվող շարժումը և արդ շարժման բոլոր էլեմենտները կոչվում են հարաբերական:

Հարկավոր է նկատի առնել, որ շարժական Σ' սխառմին ամբողջովին գիտողը չի նկատում Σ' -ի շարժումը. Ախպես, եթե որպես Σ' ընդունված է պտտվող անիվը, որի ուղիղ ճաղով շարժվում է B կետը, ապա անիվի հետ կապված գիտողին B -ի շարժումը (հարաբերական շարժումը) կթվա ուղղադիր:

Σ' սխառմի կետերից մեկը բարաքանչյուր մոմենտ համընկնում է B -ի հետ. օրինակ էլ մոմենտում B -ի հետ համընկնում է Σ' -ի B_1' կետը, իսկ էլ մոմենտում Σ' -ի B_2' կետը: Σ' -ը գիտվում է որպես կարծր մարմին և նրա B_1', B_2' կետերի բացարձակ շարժումները (շարժումները Σ -ի նկատմամբ) ոչ մի կապ չունեն B -ի շարժման հետ:

Շարժական Σ' սխառմի B -ի հետ համընկնող կետի բացարձակ շարժումը անմիջապես է փոխադրական շարժում:

Այդ սահմանումի խոստով կարելի է արտահայտել այլ կերպ.

B կետի փոխադրական շարժում կոչվում է այն շարժումը, որը կհասարկեր B կետը, եթե փոխադրվող մոմենտում նրա հարաբերական շարժումը կապեցիր:

2°. Հաշվարքի շարժական Σ' սխառմը անվանում են նաև հարաբերական սխառմ: Որպես Σ' հաճախ ընդունվելու է որեւէ բացարձակ կարծր մարմին՝ ակալատակը, նյութական ուղիղը (անվաճողը), նյութական շրջանադիրը և այլն:

« B կետը շարժվում է Σ' մարմնի մակերևույթի վրա, Σ' մարմնի մեջ» արտահայտությունները նշանակում են, որ B կետը շարժվում է Σ' մարմնի նկատմամբ:

« B կետը շարժվում է Σ' մարմնի հետ միասին» արտահայտությունը նշանակում է B -ի փոխադրական շարժումը:

Ինչպես վերը ասված է, շարժվելիս Σ' -ի նկատմամբ, B կետը ժամանակի ընթացքում Σ' -ի մակերևույթի վրա կամ նրա մեջ գրավում է տարբեր դիրքեր. արդ դիրքերի երկրաչափական տեղը հարաբերական հետադիրն է:

Հարաբերական հետադիրը, լինելով կազմված կարծր մարմնի կետերից հանդիսանում է Σ' -ի հետ շարժվող անփոփոխելի կոր:

Պատկերացնենք, որ Σ' մարմնի շարժումը կասեցվեց. այդ հանգամանքը բոլորովին էլ չի փոխի B կետի հարաբերական շարժումը:

Համաձայն § 8, 1 սկզբում առածին, Σ' -ի շարժման կասեցման մոմենտից սկսած B -ի շարժումը Σ -ի և Σ' -ի հետ կապված դիտողների համար կլինի միևնույնը: Հետևապես

[$S-A$] երե Σ' սխառմի բացարձակ շարժումը համարենք զաղարած, կետի հարաբերական շարժումը կհամընկնի նրա բացարձակ շարժման հետ:

Հարաբերական շարժման էվեմենտները որոշելու համար միշտ պատվում են այս դրույթին:

§ 8. 3. Օրինակներ

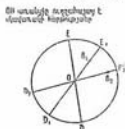
1. Կետը հալոստարաչափ շարժվում է սկավառակի DE արամագծով, սկավառակը պտտվում է հաստատուն ω անկյունային արագությամբ OH առանցքի շուրջը, որ անցնում է սկավառակի O կենտրոնով և ուղղահայաց է նրա հարթությանը (նկ. 8-1ա):

Այստեղ կարելի է անշարժ OH առանցքը համարել բացարձակ (անշարժ) $OXYZ$ կոորդինատային սխառմի առանցքներից մեկը: Իրրե շարժական (հարաբերական) սխառմ ընդունենք սկավառակը. այստեղ հարաբերական շարժումը B -ի շարժումն է սկավառակի արամագծով և հետևապես ուղղադիմ է: Վերջինը անմիջապես պարզվում է [$S-A$]-ի օգնությամբ: Իրոք, եթե կասեցնենք սկավառակի պտտումը, B -ն կշարժվի DE ուղիղով:

Ըստ սահմանումի B կետի փոխադրական շարժման արագությունը հավասար է սկավառակի այն կետի արագությանը, որը ներկա անկմարվում համընկնում է B -ի հետ, այսպիսով փոխադրական $\vec{v}_c$ արագությունը՝

$$\vec{v}_c = \omega \times \overrightarrow{OB}:$$

Երբ B -ն անցնում է սկավառակի կենտրոնով, $\vec{v}_c = 0$: Դիցուք D_1E_1 և D_2E_2 -ը DE արամագծի զիրքերն են t_1 և t_2 մոմենտներում. այդ նշանակում է, որ B -ի հարաբերական հետադիմը գրա-



Նկ. 8-1ա:

վում է t_1 մոմենտում D_1E_1 գիրքը, իսկ t_2 մոմենտում D_2E_2 գիրքը:

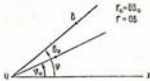
Քանի որ հարաբերական $\bar{\psi}_r$ արագությունը պետք է դադարեն լինի հետագծին զիտարկվող կետում, ապա պարզ է, որ t_1 մոմենտում $\bar{\psi}_{1r} \parallel D_1E_1$, իսկ t_2 մոմենտում արդ արագությունը $\bar{\psi}_{2r} \parallel D_2E_2$ այսինքն լուրջաքանչյուր մոմենտում հարաբերական արագությունը

$$\bar{\psi}_r \parallel OB:$$

t_1 և t_2 մոմենտներում միջնագրական արագությունները կլինեն

$$\bar{\psi}_{1e} = \bar{\omega} \times \overline{OB}_1, \quad \bar{\psi}_{2e} = \bar{\omega} \times \overline{OB}_2:$$

Դժվար չէ ցույց տալ, որ B -ի բացարձակ հետագիծը արքիմեդի պարույր է: Իրոք O կետով անցնող OX ուղիղը և ընդունենք այն որպես բևեռային առանցք (նկ. $S-1P$) $\angle XO B$ նշանակենք φ



$$\angle XO B = \varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

որտեղ φ_0 -ն φ -ի արժեքն է $t = 0$ մոմենտում.

նկ. $S-1P$:

$$r = OB = r_0 + v_r t.$$

Այստեղ r_0 -ն OB -ի չափն է $t = 0$ մոմենտում:

Արտաքսկոյվ t -ն, ունենք

$$\frac{r - r_0}{v_r} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega}$$

կամ

$$\frac{r}{v_r} - \frac{\varphi}{\omega} = \frac{r_0}{v_r} - \frac{\varphi_0}{\omega} = \text{const}$$

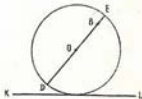
կամ $r = b + c\varphi$ ընդ որում $b = r_0 - \frac{v_r}{\omega} \varphi_0$, $c = \frac{v_r}{\omega}$ հաստատուններ են: Սույնը հարաբերական հետագծի OE մասին համապատասխանող բացարձակ հետագծի հավասարումն է, և ներկայացնում է արքիմեդի պարույր:

Ակներև է, որ նման հավասարում կառուցվի նաև հարաբերական հետագծի DO մասին համապատասխանող բացարձակ հետագծի համար: Այսպիսով, բացարձակ հետագիծը բաղկացած է արքիմեդի երկու պարույրներից:

2. B կետը հավասարաչափ շարժվում է սկավառակի DE արամագիծով, սկավառակը օլնպկա է գլորվում (առանց սահնելու) KL ուղղի վրայով, որ սկավառակի O կենտրոնի արագութլունը հաստատուն է (նկ. 8—2):

Ինչպեա և նախորդ օրինակում հաշվարքի հարարերական սխառնմը սկավառակն է, հարարերական հետագիծը՝ սկավառակի DE արամագիծը, հարարերական արագութլունը հաստատուն է ըստ չափի և յուրաքանչյուր ակնթարթ տնի OB -ի ուղղութլունը:

Որպեա հաշվարքի անշարժ սխառնմ կարելի է ընդունել հարթ կոորդի- նատային սխառնմ, որի հարթութլունը համընկնում է սկավառակի հարթութլան հետ, իսկ առանցքներից մեկը համընկ- նում է KL ուղղի հետ:



Նկ. 8—2:

Փանի որ սկավառակի O կենտրոնի արագութլունը հաստա- տուն է, սկավառակի պտտման անկյունային (ω) արագութլունը նախպեա հաստատուն է: Որոշել, ինչպիսի պայմանների զեպքում B կետի հարարերական արագութլունը սկավառակի O կենտրոնում կլինի զուգահեռ փոխադրական արագութլունը:

§ 8. 4. Փանլարյունը հարարերական փոխադրական և բացարձակ արագութլունների միջև

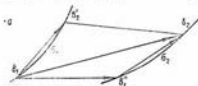
1°. Այս և հաշորդ պարագրաֆներում արտածվում են ընդհա- նուր զեպքում արտահայտութլուններ բացարձակ արագութլան և բացարձակ արագացման համար:

Դիցուք O կետը պտտկանում է անշարժ Σ հաշվարքային սխառնմին, իսկ B_1 և B_2 -ը Σ -ի օլն կետերն են, որոնց հետ համ- ընկնում է շարժվող B կետը t_1 և t_2 ժամկետներում (նկ. 8—3):

B_1B_2 -ը հանդիսանում է B -ի բացարձակ տեղափոխումը $t_2 - t_1 = \Delta t$ ժամանակամիջոցում, ուստի բացարձակ արագութլունը t_1 ժամկետում

$$\vec{v}_{\text{տ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1B_2}}{\Delta t} :$$

Ինչպես արդեն ասված էր § 8, 2, 2-ում, հարաբերական հետադիմը անփոփոխելի օ կորն է, որ պատկանում է շարժական Σ' հաշվարքային սխեմին (և հետևապես շարժվում է Σ' -ի հետ). Դիցուք օ գիծը t_1 , t_2 մոմենտներում գրավում է z_1 և z_2 դիրքերը:



Նկ. 8—3:

Պարզ է, որ B_1 կետը դասավորված է z_1 -ի վրա, իսկ B_2 -ը z_2 -ի վրա: Ենթադրենք, թե t_1 մոմենտում հարաբերական Σ' սխեմին շարժումը կատարված է: Համաձայն $[S-A]$ -ի z_1 դիմը նույնպես կդառնա անշարժ

և այդ պայմաններում t_2 մոմենտում B -ն կդրավեր B_2' դիրքը (այլ ոչ թե B_2 դիրքը), B_1B_2' կլինի հարաբերական տեղափոխումը $\Delta t = t_2 - t_1$ ժամանակամիջոցում, իսկ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1B_2'}}{\Delta t} = \overline{v}_1, \quad (8, 4, 2)$$

հարաբերական արագությունը t_1 մոմենտում:

Եթե վերցնենք հսկառակը՝ t_1 մոմենտում կատարվի ոչ թե Σ' -ի շարժումը, այլ B -ի շարժումը շարժվող z_1 դիմի վրա, ապա B_1 -ի դիրքը կմնա անփոփոխ z_1 -ի վրա, իսկ շարժվող օ գիծը t_2 մոմենտում կդրավի z_2 դիրքը, այսպիսով B -ի դիրքը t_2 մոմենտում կլինի B_2' : $\overline{B_1B_2'}$ վեկտորը Σ' -ի ալն կետի տեղափոխումն է, որի հետ համընկնում է B -ն t_1 մոմենտում:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1B_2'}}{\Delta t} = \overline{v}_{1c} \quad (8, 4, 3)$$

կլինի փոխադրական արագությունը t_1 մոմենտում:

Նկ. 8—3-ից պարզ է, որ

$$\left. \begin{aligned} \overline{B_1B_2} &= \overline{B_1B_2'} + \overline{B_2'B_2} = \overline{B_1B_1'} + \overline{B_1'B_2} \\ \text{կամ} \\ \frac{\overline{B_1B_2}}{\Delta t} &= \frac{\overline{B_2'B_2}}{\Delta t} + \frac{\overline{B_2'B_2}}{\Delta t} = \frac{\overline{B_1B_1'}}{\Delta t} + \frac{\overline{B_1'B_2}}{\Delta t}, \end{aligned} \right\} \quad (8, 4, 4)$$

ներքևում ցույց է տրված, որ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_2 B_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B_1}}{\Delta t} : \quad (8, 4, 5)$$

Այսպիսով, անցնելով սահմանին, $(8, 4, 1) - (8, 4, 3)$ -ի հիման վրա

$$\text{կստանանք } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B_2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_2 B_1}}{\Delta t} \text{ և ալյալիսով,}$$

բաց թողնելով 1 ինդեքսը, գալիս ենք

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_c} \quad (8, 4, 6)$$

առնչությունը, այսինքն՝

$[8 - B]$ Կետի բացարձակ արագությունը հավասար է նրա հարարերական և փոխադրական արագությունների գումարին:

2°. Այժմ ապացուցենք $(8, 4, 5)$ -ը՝ նշանակենք

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_2 B_2}}{\Delta t} = \overline{v_c}$$

և ցույց տանք, որ $\overline{v_c} - \overline{v_c}$ տարբերությունը անսահման փոքր է: $\overline{v_r}$ ու $\overline{v_c}$ -ն անփոփոխելի c_1 գծի B_1 և B_2 կետերի արագությունն են t_1 մոմենտում: Համաձայն $(7, 6, 1)$ c_1 -ի ամենաընդհանուր շարժման դեպքում

$$\overline{v_c} - \overline{v_c} = \overline{w_1} \times \overline{B_1 B_2},$$

որտեղ $\overline{w_1}$ -ը c_1 -ի անկյունային արագությունն է t_1 մոմենտում:

Քանի որ $\overline{B_1 B_2}$ -ը կետի հարարերական տեղափոխումն է Δt ժամանակամիջոցում, $\overline{w_1} \times \overline{B_1 B_2}$ արտադրվելը կձգտի զրոյի Δt -ի հետ միասին: Այսպիսով ապացուցված է $(8, 4, 5)$ -ը, այսինքն

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B_1}}{\Delta t} :$$

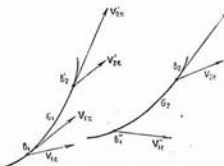
Նկատի առնենք, որ եթե c_1 -ի բացարձակ շարժումը համընթաց է, ապա

$$\overline{B_1 B_1} = \overline{B_2 B_2} \text{ և } \overline{v_c} - \overline{v_c} = 0:$$

§ 8, 5. Կարիուսի քեռեմբ

1°. Անցնում ենք բացարձակ արագացման ընդհանուր արտահայտության արտածմանը:

Նկ. 8—4-ում σ_1 -ը հարաբերական հետադի գիրքն է t_1 մոմենտում, իսկ B_1 -ը շարժվող կետի գիրքն է նույն մոմենտում: σ_2



Նկ. 8—4:

և B_2 -ը հարաբերական հետադի և շարժվող կետի գիրքերն են t_2 մոմենտում: $\overline{\psi}_{1r}$, $\overline{\psi}_{2r}$ —հարաբերական արագություններն են t_1 , t_2 մոմենտներում, իսկ $\overline{\psi}_{1c}$ և $\overline{\psi}_{2c}$ — փոխադրական արագությունները՝ նույն (t_1, t_2) մոմենտներում:

Համաձայն (8, 4, 6)-ի և բացարձակ արագացման սահմանումի

$$\overline{\psi}_{1a} = \overline{\psi}_{1r} + \overline{\psi}_{1c}, \quad \overline{\psi}_{2a} = \overline{\psi}_{2r} + \overline{\psi}_{2c}. \quad (8, 5, 1)$$

$$\overline{\omega}_a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\psi}_{2a} - \overline{\psi}_{1a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\psi}_{2r} - \overline{\psi}_{1r}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\psi}_{2c} - \overline{\psi}_{1c}}{\Delta t}; \quad (8, 5, 2)$$

Սակայն $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\psi}_{2r} - \overline{\psi}_{1r}}{\Delta t}$ կետի հարաբերական արագացումը չէ և $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\psi}_{2c} - \overline{\psi}_{1c}}{\Delta t}$ չի հանդիսանում կետի փոխադրական արագացումը:

Իսկապես, ըստ [8—A]-ի

$$\begin{aligned} & \text{հարաբերական արագացումը} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{հարաբերական արագության փոփոխություն}}{\Delta t} \end{aligned}$$

միայն այն դեպքում, եթե t_1 մոմենտից սկսված Σ' սխեմի և σ_1 զծի բացարձակ շարժումները կասեցված են: Բայց այդ դեպքում B կետը շարունակելով իր շարժումը σ_1 կռիի վրայով, t_2 մոմենտում կդառնա B_2' գիրքում և t_2 մոմենտում նրա հարաբերական արագությունը՝ $\overline{\psi}_{2r}'$ -ը կշոշափեր σ_1 զծը B_2' կետում:

Լճնդհանուր առմամբ $\bar{\psi}_{2r}$ գույանն է $\bar{\psi}_{2r}$ սակայն, քանի որ Σ' -ի բացարձակ շարժումը չի ազդում հարարերական շարժման վրա.

$$\bar{\psi}_{2r} = \bar{\psi}_{2r}'$$

Ասածից երևում է, որ

$$a) \quad \bar{\omega}_{1r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{1r}}{\Delta t} \quad (8, 5, 3)$$

բ) Ընդհանուր առմամբ $\bar{\psi}_{2r}' \neq \bar{\psi}_{2r}$ և այդ պատճառով

$$\bar{\psi}_{2r}' - \bar{\psi}_{1r} \neq \bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{1r}, \quad \bar{\omega}_{1r} \neq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2r}' - \bar{\psi}_{1r}}{\Delta t}$$

Ակներև է, որ

$$\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{1r} = (\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{2r}') + (\bar{\psi}_{2r}' - \bar{\psi}_{1r})$$

$$և \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{1r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{2r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2r}' - \bar{\psi}_{1r}}{\Delta t} \quad (8, 5, 4)$$

(8, 5, 4)-ի աջ մասի երկրորդ գումարելին (8, 5, 3)-ն է. իսկ առաջին գումարելին հեշտ է որոշել, եթե պատկերացնել $\bar{\psi}_{2r}'$ -ը որպես վեկտորական անխփոփանի հատված, որը ամբողջով է σ_1 -ին և շարժվում է նրա հետ: Դիցուք σ_1 -ի անկյունային արագությունը t_1 մոմենտում հավասար է $\bar{\omega}_1$: dt ժամանակամիջոցում σ_1 -ը և $\bar{\psi}_{2r}'$ -ը կպտտվեն $d\varphi = \bar{\omega}_1 dt$ անկյամբ և ըստ (7, 6, 1)-ի

$$\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{2r}' = d\varphi \times \bar{\psi}_{2r}' = (\bar{\omega}_1 \times \bar{\psi}_{2r}') dt:$$

(8, 5, 3)-ի հիման վրա $\bar{\psi}_{2r} = \bar{\omega}_{1r} dt + \bar{\psi}_{1r}$.

Աստի, արհամարհելով առաջին կարգից ավելի բարձր անսահման փոքր մեծությունները, կարող ենք գրել

$$\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{2r}' = (\bar{\omega}_1 \times \bar{\psi}_{1r}) dt$$

$$և \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2r} - \bar{\psi}_{2r}'}{\Delta t} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\psi}_{1r}. \quad (8, 5, 5)$$

օգտվելով (8, 5, 3)-ից և (8, 5, 5)-ից կարատարենք (8, 5, 4) աջակողմ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_{2c} - \bar{v}_{1c}}{\Delta t} = \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{1c} + \bar{\omega}_{1c} \quad (8.5.6)$$

2. Եւման եղանակով կարելի է արտահայտել (8.5.2)-ում

$$\frac{\bar{v}_{2c} - \bar{v}_{1c}}{\Delta t}$$
անդամը երկու գումարելիների միջոցով:

Ըստ սահմանումի փոխադրական արագացումը

$$\bar{\omega}_{1c} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{փոխադրական արագացման փոփոխությունը}}{\Delta t}$$

այն ենթադրութեամբ, որ t_1 մոմենտից սկսած հարաբերական շարժումը դադարեցված է:

Բայց այդ դեպքում t_1 մոմենտից սկսած B -ն կշարժվի միայն σ_1 գծի հետ և B_1 զիրքից (t_1 մոմենտում) կանցնի B_1' զիրքը (t_2 մոմենտում): Այսպիսով, նշանակելով B_1' -ի բացարձակ արագությունը t_2 մոմենտում $\bar{v}_{1c}'$, ունենք

$$\bar{\omega}_{1c} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_{1c}' - \bar{v}_{1c}}{\Delta t} \quad (8.5.7)$$

(8.5.4)-ին նման կարելի է $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_{2c} - \bar{v}_{1c}}{\Delta t}$ արտացրել առաջին

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_{2c} - \bar{v}_{1c}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_{2c} - \bar{v}_{1c}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_{1c}' - \bar{v}_{1c}}{\Delta t}, \quad (8.5.8)$$

ընդ որում ուղ մասի առաջին գումարելին հեշտ է որոշել:

Իսկապես (8.5.7)-ից հետևում է, որ

$$\bar{v}_{1c}' - \bar{v}_{1c} = \bar{\omega}_{1c} \Delta t \text{ կամ } \bar{v}_{1c}' = \bar{\omega}_{1c} \Delta t + \bar{v}_{1c} \quad (8.5.9)$$

Դիտարկելով B_1 և B_1' -ի փոխարեն B_2 և B_2' կետերը, կատանանք (8.5.9)-ի փոխարեն

$$\bar{v}_{2c}' = \bar{\omega}_{2c} \Delta t + \bar{v}_{2c} \quad (8.5.10)$$

(8.5.9) և (8.5.10) ապիս են

$$(\bar{v}_{2c}' - \bar{v}_{1c}') = (\bar{v}_{2c}' - \bar{v}_{1c}) + (\bar{\omega}_{2c} - \bar{\omega}_{1c}) \Delta t$$

Այս հավասարության փակագծերի մեջ դանդաղ Δt տարրերություններն էլ անսահման փոքր են, հետևապես ուղ մասի երկրորդ գու-

մարելին կարելի է արհամարհել համասարտության մյուս երկու անդամների նկատմամբ, և ալյալիսով

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2c} - \bar{\psi}_{1c}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2c} - \bar{\psi}_{1c}}{\Delta t} \quad (8, 5, 11)$$

Այժմ մասի համարիչը ներկայացնում է α_1 -ի B'_2 և B_1 կետերի արագությունների տարբերությունը, որը (7, 6, 1)-ի հիման վրա համարաբ է

$$\bar{\omega}_1 \times B_1 B'_2.$$

հետևաբար

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2c} - \bar{\psi}_{1c}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\omega}_1 \times \overline{B_1 B'_2}}{\Delta t} \\ &= \bar{\omega}_1 \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B'_2}}{\Delta t} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\psi}_{1c}, \end{aligned} \quad (8, 5, 12)$$

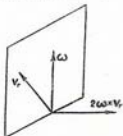
Այժմ (8, 5, 7), (8, 5, 8) և (8, 5, 12) առաջին են

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\psi}_{2c} - \bar{\psi}_{1c}}{\Delta t} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\psi}_{1c} + \bar{\omega}_{1c}, \quad (8, 5, 13)$$

իսկ համաձայն (8, 5, 2)-ի և (8, 5, 6)-ի և (8, 5, 13)-ի ունենք (դեռ պցելով 1 ինգեքսը)

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_c + \bar{\omega}_{1c} + 2\bar{\omega} \times \bar{\psi}_c, \quad (8, 5, 14)$$

$2\bar{\omega} \times \bar{\psi}_c$ բաղադրիչը, որում $\bar{\omega}$ փոխադրական շարժման անկյունային արագությունն է, իսկ $\bar{\psi}_c$ հարաբերական շարժման արագությունը, կոչվում է Կորիոլիսի արագացում, կամ լրացուցիչ արագացում: Կորիոլիսի արագացման ուղղությունը և ուղղվածությունը պատկերված են նկ. 8-5-ում: Հաճախ Կորիոլիսի արագացումը նշանակում են $\bar{\omega}_c$, ալյալիսով $\bar{\omega}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{\psi}_c$:



Նկ. 8-5:

[8—C] Կետի բացարձակ արագացումը հավասար է հարաբերական, փոխադրական և լրացուցիչ արագացումների գումարին:

Առանձին մասնավոր դեպքերում այդ երեք արագացումներից յուրաքանչյուրը կարող է վերածվել զրոյի:

նույն արդյունքն է ստացվում նաև (8, 5, 14)-ից:
Իրոք, համաձայն (8, 5, 15)

$$\overline{\overline{\omega}}_c = \frac{\hbar}{\rho} \overline{\overline{\omega}}_c^2 = -\overline{\rho} \omega^2.$$

ըստ (8, 5, 16)-ի $\overline{\overline{\omega}}_c = -\overline{\rho} k^2 \omega^2$
և

$$\overline{\overline{\omega}}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{\overline{v}}_c = 2\overline{\omega} \times k \overline{\overline{v}}_c = 2k\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho}) = -2k\overline{\rho} \omega^2,$$

որովհետև

$$\overline{\omega} \cdot \overline{\rho} = 0,$$

Այսպիսով, կիրառելով (8, 5, 14)-ը, ստանում ենք՝

$$\overline{\overline{\omega}}_a = -\overline{\rho} \omega^2 (1 + k^2 + 2k) = -\overline{\rho} \omega^2 (1 + k)^2,$$

արևից (8, 5, 18): Երբ $\overline{\overline{v}}_c + \overline{\overline{v}}_r = 0$, $\overline{\overline{v}}_a = 0$, կետը չի շարժ-
վում:

Այդ դեպքում $k = -1$, և $\overline{\overline{\omega}}_a = 0$:

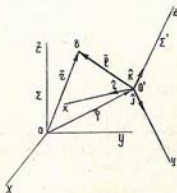
§ 8. Կարիսիսի քերեմի մի այլ ապացույց

1°. § 8, 5-ում շարադրված արտածումն ունի մի էական
առավելություն՝ ցույց է տալիս թե որտեղից և ինչպես է դուր-
սում լրացուցիչ արագացումը: Այս պարագրաֆում (8, 4, 6), (8,
5, 14) առնչությունները արտածված են ավելի հասարակ և պարզ
կղանակով:

Անվանենք Σ' կոորդինա-
տային սիստեմի սկզբնականը O'
(Նկ. 8-6):

O' գտնվում է $\overline{OO'} = \overline{\rho}$ հե-
ռավորության վրա Σ կոորդինա-
տային սիստեմի O սկզբնակե-
տից: Նշանակելով շարժվող B
կետի հեռավորությունները O և
 O' -ից համապատասխանաբար $\overline{r}$
և $\overline{l}$ ($\overline{r} = \overline{OB}$, $\overline{l} = \overline{O'B}$), ունենք

$$\overline{r} = \overline{\rho} + \overline{l}, \quad (8, 6, 1)$$



Նկ. 6-8:

ևս $\bar{\omega}$ արդյունքն է ստացվում նաև (8, 5, 14)-ից:
Իրոք, համաձայն (8, 5, 15)

$$\bar{\omega}_r = \frac{n}{\rho} \bar{v}_r^2 = -\bar{\rho} \omega^2.$$

քառ (8, 5, 16)-ի $\bar{\omega}_r = -\bar{\rho} k^2 \omega^2$
և

$$\bar{\omega}_r = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega} \times k \bar{v}_r = 2k\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = -2k\bar{\rho} \omega^2,$$

արդյունք

$$\bar{\omega} \cdot \bar{\rho} = 0;$$

Այսպիսով, կիրառելով (8, 5, 14)-ը, ստանում ենք՝

$$\bar{\omega}_a = -\bar{\rho} \omega^2 (1 + k^2 + 2k) = -\bar{\rho} \omega^2 (1 + k)^2,$$

արևից (8, 5, 18): Երբ $\bar{v}_r + \bar{v}_r = 0$, $\bar{v}_a = 0$, կեսը չի շարժ-
վում:

Այդ դեպքում $k = -1$, և $\bar{\omega}_a = 0$:

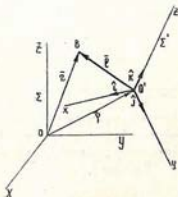
§ 8. 6. Կարիսիսի քերեմի մի այլ ապացույց

1°. § 8, 5-ում շարադրված արտածումն ունի մի էական
առավելություն՝ ցույց է տալիս թե որտեղից և ինչպես է դուր-
սում լրացուցիչ արագացումը: Այս պարագրաֆում (8, 4, 6), (8,
5, 14) առնչությունները արտածված են ավելի հասարակ և պարզ
և դանակով:

Անվանենք Σ' կոորդինա-
տային սխեմի սկզբնականը O'
(նկ. 8-6):

O' դրսևում է $\overline{OO'} = \bar{\rho}$ հե-
ռավորության վրա Σ կոորդինա-
տային սխեմի O սկզբնակե-
սից: Նշանակելով շարժվող B
կետի հեռավորությունները O և
 O' -ից համապատասխանաբար $\bar{r}$
և $\bar{l}$ ($\bar{r} = \overline{OB}$, $\bar{l} = \overline{O'B}$), ունենք

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{l}, \quad (8, 6, 1)$$



Նկ. 8-6:

ընդ որում, եթե $\dot{i}$, $\dot{j}$, $\dot{k}$ —կոորդինատային Σ' սխեմայի $O'x$, $O'y$, $O'z$ առանցքների միավոր-վեկտորներն են, իսկ x , y , z — B -ի կոորդինատները Σ' սխեմայում: Այսպիսով

$$\bar{l} = O'B = \dot{i}x + \dot{j}y + \dot{k}z \quad (8, 6, 2)$$

և

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \dot{i}x + \dot{j}y + \dot{k}z; \quad (8, 6, 1')$$

Այստեղ միայն $\bar{l}$ -ն է արտահայտված (8, 6, 2) տեսքով, իսկ $\bar{r}$ և $\bar{\rho}$ չեն վերլուծված ըստ կոորդինատային առանցքների աին պատճառով, որ x , y , z կոորդինատների ու $\dot{i}$, $\dot{j}$, $\dot{k}$ միավոր-վեկտորների հաստատուն մնալը կամ փոփոխվելը, ինչպես կռահենք, հանդիսանում է հարաբերական և փոխադրական շարժումների կարևոր հայտանիշ:

Ինչպես հետևում է $[8-\Lambda]$ -ից հարաբերական շարժումը համընկնում է բացարձակ շարժման հետ, եթե Σ' սխեմայում անշարժ համարենք, այսինքն անշարժ համարենք O' կետը և անփոփոխ՝ $O'x$, $O'y$, $O'z$ առանցքների ուղղութիւնները՝

$$\bar{\rho} = \text{const}, \quad \dot{i} = \text{const}, \quad \dot{j} = \text{const}, \quad \dot{k} = \text{const}; \quad (8, 6, 3)$$

Ըստ (8 6, 3) պարմանի $\bar{r}$ -ի և $\bar{l}$ -ի առաջին և երկրորդ ածանցյալները կլինեն

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{l}}{dt} = \dot{i} \dot{x} + \dot{j} \dot{y} + \dot{k} \dot{z} \quad (8, 6, 4)$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{l}}{dt^2} = \ddot{i} \ddot{x} + \ddot{j} \ddot{y} + \ddot{k} \ddot{z}; \quad (8, 6, 5)$$

Բայց $\frac{d\bar{l}}{dt}$ -ն հարաբերական արագութիւնն է, իսկ $\frac{d^2\bar{l}}{dt^2}$ -ն հարաբերական արագացումը. նույն արդյունքը հետևում է նաև այն հանգամանքից, որ Σ' -ի անշարժ լինելու դեպքում B կետի հարաբերական և բացարձակ շարժումները համընկնում են:

Այսպիսով

$$\bar{v}_r = \dot{i} \dot{x} + \dot{j} \dot{y} + \dot{k} \dot{z}, \quad (8, 6, 4')$$

$$\bar{\omega}_r = \ddot{i} \ddot{x} + \ddot{j} \ddot{y} + \ddot{k} \ddot{z}; \quad (8, 6, 5')$$

և՛ ընդհանրապես, եթե ընդունենք, որ գոյություն չունի համարակրթական շարժումը, այսինքն x, y, z կոորդինատները հաստատուն են, այս քայլարձակ շարժման հետ կհամընկնի փոխադրական շարժումը:

Բայց, երբ $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, (8, 6, 1')-ի առաջին և երկրորդ անդամները կլինեն

$$\bar{v}_e = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\phi}}{dt} + x \frac{d\dot{i}}{dt} + y \frac{d\dot{j}}{dt} + z \frac{d\dot{k}}{dt}, \quad (8, 6, 6)$$

$$\bar{w}_e = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{\phi}}{dt^2} + x \frac{d^2\dot{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\dot{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\dot{k}}{dt^2}, \quad (8, 6, 7)$$

Այժմ անդնենք (8, 6, 1)-ը ընդունելով, որ մասնակցող բոլոր մեծությունները փոփոխվում են

$$\begin{aligned} \bar{v}_a = \frac{d\bar{r}}{dt} = & \left(\frac{d\bar{\phi}}{dt} + x \frac{d\dot{i}}{dt} + y \frac{d\dot{j}}{dt} + z \frac{d\dot{k}}{dt} \right) + \left(\dot{i} \frac{dx}{dt} + \right. \\ & \left. + \dot{j} \frac{dy}{dt} + \dot{k} \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8, 6, 8)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_a = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = & \left(\frac{d^2\bar{\phi}}{dt^2} + x \frac{d^2\dot{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\dot{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\dot{k}}{dt^2} \right) + \left(\dot{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \right. \\ & \left. + \dot{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \dot{k} \frac{d^2z}{dt^2} \right) + 2 \left(\frac{d\dot{i}}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{d\dot{j}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{d\dot{k}}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8, 6, 9)$$

(8, 6, 4'), (8, 6, 6) և (8, 6, 8)-ից բխում է

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \quad (8, 6, 10)$$

այսինքն $[S-B]$:

(8, 6, 5'), (8, 6, 7) և (8, 6, 9)-ը բերում են հետևյալ արդյունքի²

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e + 2 \left(\frac{d\dot{i}}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{d\dot{j}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{d\dot{k}}{dt} \frac{dz}{dt} \right), \quad (8, 6, 11)$$

(8, 6, 11)-ի աջ մասի երրորդ գումարելին կարելի է նկատի ունենալ, որ Σ' -ի համընթաց շարժման ղեկավարում $\dot{i}, \dot{j}, \dot{k}$ անփոփոխ են.

$\frac{di}{dt} = \frac{dj}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$, իսկ Σ' -ի ամենաընդհանուր շարժման դեպքում, համաձայն (7, 4, 6)-ի

$$\frac{di}{dt} = \bar{\omega} \times i, \quad \frac{dj}{dt} = \bar{\omega} \times j, \quad \frac{dk}{dt} = \bar{\omega} \times k, \quad (8, 6, 12)$$

Այդ պատճառով

$$2 \left(\frac{di}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{dj}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dk}{dt} \frac{dz}{dt} \right) = 2\bar{\omega} \times (i \dot{x} + j \dot{y} + k \dot{z})$$

կամ, բառ (8, 6, 4')-ի՝

$$2 \left(\frac{di}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{dj}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dk}{dt} \frac{dz}{dt} \right) = 2\bar{\omega} \times \bar{v},$$

Այսպիսով, (8, 6, 11)-ի վերջնական տեսքը կլինի՝

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_c + 2\bar{\omega} \times \bar{v},$$

§ 8. 7. Տեսության մի բանի կիրառումներ

1. Պատկերացնենք, որ Σ' և Σ հաշվարքային սխեմաներում դիտարկվում են երկու տարրեր (B , C) կետերի շարժումները: Այդ կետերը կարող են պատկանել մի որևէ կարծր մարմնի կամ լինել բոլորովին անկախ մեկը մյուսից:

Նշանակելով B , C ինդեքսներով B , C կետերին վերաբերող մեծությունները, կարող ենք գրել

$$\bar{v}_{aB} = \bar{v}_{rB} + \bar{v}_{cB}, \quad \bar{v}_{aC} = \bar{v}_{rC} + \bar{v}_{cC}$$

կամ

$$\bar{v}_{aB} - \bar{v}_{aC} = \bar{v}_{rB} - \bar{v}_{rC} + \bar{v}_{cB} - \bar{v}_{cC} \quad (8, 7, 1)$$

Հիշենք, որ Σ' սխեմայում կարծր մարմին է (ինչպես բոլոր հաշվարքային սխեմաները մեխանիկայում). նաև նկատի առնենք, որ փոխադրական արագություններ $\bar{v}_{cB}$, $\bar{v}_{cC}$ Σ' -ի ալն (B' , C') կետերի արագություններն են, որոնք տվյալ մոմենտում համընկնում են B և C կետերի հետ:

Այսինքն

$$\bar{v}_{cB} = \bar{v}_{B'}, \quad \bar{v}_{cC} = \bar{v}_{C'},$$

իսկ Σ' կարծր մարմնի կամայական շարժման դեպքում, բայց (7, 6, 1)

$$\bar{v}_B - \bar{v}_C = \bar{\omega}_c \times \overline{CB'}, \quad (8, 7, 2)$$

որտեղ $\bar{\omega}_c$ -ն Σ' -ի բացարձակ անկյունային արագությունն է (ալ-սինքն փոխադրական անկյունային արագությունը), իսկ $\overline{CB'} = \overline{CB}$ Այսպիսով

$$\bar{v}_{aB} - \bar{v}_{aC} = \bar{v}_{rB} - \bar{v}_{rC} + \bar{\omega}_c \times \overline{CB}; \quad (8, 7, 3)$$

Միշտ կարելի է համարել, որ C և B կետերը կամայական $\bar{l}$ վեկտորի սկիզբն ու վերջն են, $\bar{l} = \overline{CB}$

Այդ դեպքում համաձայն (7, 2, 2)

$$a) \quad \bar{v}_{aB} - \bar{v}_{aC} = \left(\frac{d\bar{l}}{dt} \right)_a. \quad (8, 7, 4)$$

Ա ինդեքսը ցույց է տալիս, որ սծանցյալը վերցված է բացարձակ սխառմի նկատմամբ.

$$բ) \quad \bar{v}_{rB} - \bar{v}_{rC} = \left(\frac{d\bar{l}}{dt} \right)_r. \quad (8, 7, 5)$$

բ ինդեքսը ցույց է տալիս, որ սծանցյալը վերցված է հարաբե-րական սխառմի նկատմամբ:

Հետևապես (8, 7, 3)-ի վերջնական ձևն է

$$\left(\frac{d\bar{l}}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\bar{l}}{dt} \right)_r + \bar{\omega}_c \times \bar{l}. \quad (8, 7, 6)$$

որտեղ $\bar{l}$ -ը կամայական վեկտոր է:

(8, 7, 1) և (8, 7, 6) առնչությունները, և հատկապես (8, 7, 6)-ը, հաճախ են կիրառվում: Եթե փոխադրական շարժումը համընթաց չէ (այլ պատում է, կամ պոտտակային շարժում է) $\bar{\omega}_c \neq 0$ և $\bar{\omega}_c \times \bar{l}$ արտադրյալը գաճում է զրո կամ, երբ $\bar{l} \parallel \bar{\omega}_c$, կամ ալն մոմենտներում, երբ $\bar{l} = 0$: Մասնավոր դեպքում, երբ $\bar{l} \parallel \bar{\omega}_c$, (8, 7, 6)-ը տալիս է

$$\left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt} \right)_r, \quad (8, 7, 6)$$

2°. Նախքան կիրառումներին անցնելը, հարկավոր է նշել մի ակնհայտ հանգամանք՝

[8—D] Միևնույն վեկտորը միևնույն մոմենտում քվում է նույնը հաշվարքային բոլոր սխառմներում:

Այդ գիտությունները ներառում են $\mathcal{L}$ լինելի վեկտորի ֆիզիկական բնույթը:

Մյուս կարևոր գիտությունները հետևյալն է.

[8—D'] երևի երկու կետեր հանդիպում են, ապա հանդիպման մոմենտին այդ կետերի փոխադրական արագությունները նույնն են, նույնն են նաև փոխադրական արագացումները:

ա) Դիցուք կամայականորեն շարժվող B և C կետերը որտեղ է մոմենտում համընկնում են:

Համաձայն վերին առաջին $\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CC}$ այդ մոմենտում հարաբերական արագությունները՝ $\vec{v}_{CB}$ և $\vec{v}_{CC}$ իրարից միանգամայն տնկախ են:

Այժմ ըստ (8, 7, 1)

$$\vec{v}_{CB} - \vec{v}_{CC} = \vec{v}_{CB} - \vec{v}_{CC}$$

նկատելի առնելով, որ Σ , Σ' սխառմները միանգամայն կամայական են, դալիս ենք հետևյալ եզրակացությունը.

[8—E] Կամայականորեն շարժվող երկու կետերի հանդիպման մոմենտում նրանց արագությունների տարբերությունը նույնն է հաշվարքային բոլոր սխառմներում:

բ) Այժմ քննարկենք կամայականորեն շարժվող երկու (B , C) կետեր, որոնք զտնվում են մեկը մյուսից կամայական հեռավորության վրա $\vec{CB} = \vec{I}$:

Բազմապատկենք (8, 7, 6)-ը սկալարորեն $\vec{I}$ -ով: Քանի որ

$$\vec{I} \cdot (\vec{w} \times \vec{I}) = 0,$$

ապա (8, 7, 4)-ի և (8, 7, 5)-ի հիման վրա ունենք

$$(\vec{v}_{CB} - \vec{v}_{CC}) \cdot \vec{I} = (\vec{v}_{CB} - \vec{v}_{CC}) \cdot \vec{I},$$

որտեղ չափաքանչյուր մասը հանդիսանում է արագությունների տարբերության պրոեկցիան $\vec{I}$ -ի ուղղության վրա. այսինքն՝

[8—F] երկու տարբեր կետերի արագությունների տարբերության պրոեկցիան այդ կետերը միացնող ուղղի վրա նույնն է բոլոր հաշվարքային սխառմներում:

գ) Վերջապես, պատկերացնենք, որ B , C կետերը պատկանում են միևնույն կործր մարմնին, որի հարաբերական շարժումը

համընթաց չէ (ալիքներն կամ պտտողական է, կամ պտտատական)։
Հարաբերական շարժման անկյունային արագությունը անփոփոխ է՝

Դիցուք Σ' սխառմի բացարձակ շարժումն էլ համընթաց չէ անփոփոխ ալի շարժման անկյունային արագությունը $\bar{\omega}_c$, իսկ բացարձակ շարժման անկյունային արագությունը $\bar{\omega}_a$ ։
Ըստ (7, 6, 1)-ի

$$\bar{\psi}_{aB} - \bar{\psi}_{aC} = \bar{\omega}_a \times \bar{l}, \quad \bar{\psi}_{rB} - \bar{\psi}_{rC} = \bar{\omega}_r \times \bar{l},$$

$$\bar{\psi}_{cB} - \bar{\psi}_{cC} = \bar{\omega}_c \times \bar{l}, \quad \bar{l} = \overline{CB}.$$

ուստի (8, 7, 1)-ը կգրվի այսպես

$$\bar{\omega}_a \times \bar{l} = \bar{\omega}_r \times \bar{l} + \bar{\omega}_c \times \bar{l} = (\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_c) \times \bar{l}.$$

Հետևի՛մ ա՛յն հանգամանքի, որ $\bar{l}$ վեկտորը կամայական 'է (և կարող է ունենալ ցանկացած ուղղությունը), այստեղից հետևում է, որ

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_c.$$

[8—G] Բացարձակ շարժման անկյունային արագությունը հավասար է հարաբերական և փոխադրական շարժումների անկյունային արագությունների գումարին։

Այդ թեորեմը § 7, 9, 4-ում սպացուցված է բոլորովին ալլ եղանակով և ճիշտ է հարաբերական, փոխադրական և բացարձակ պտտման կամ պտտատական տառնջքների բոլոր հնարավոր դասավորությունների դեպքում։ Մասնավոր դեպքում, երբ $\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_c = 0$ բացարձակ շարժումը պետք է համընթաց լինի։

դ) Անցնենք Σ' և Σ սխառններում շարժվող երկու (B, C) կետերի արագացումների տարբերությունը (8, 5, 14)-ի հիման վրա ունենք

$$\bar{\omega}_{aB} = \bar{\omega}_{rB} + \bar{\omega}_{cB} + 2\bar{\omega} \times \bar{\psi}_{rB}$$

$$\bar{\omega}_{aC} = \bar{\omega}_{rC} + \bar{\omega}_{cC} + 2\bar{\omega} \times \bar{\psi}_{cC}$$

Դրա

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{aB} - \bar{\omega}_{aC} &= (\bar{\omega}_{rB} - \bar{\omega}_{rC}) + (\bar{\omega}_{cB} - \bar{\omega}_{cC}) + \\ &+ 2\bar{\omega} \times (\bar{\psi}_{rB} - \bar{\psi}_{rC}) \end{aligned} \quad (8, 7, 7)$$

Պատկերացնենք, որ C , B կետերը համընկնում են ալն մասինսում, երբ նրանց հարաբերական արագությունները հավասար են.

այսինքն ալզ մասինսում

$$1. \quad \overline{v}_{rB} = \overline{v}_{rC}$$

$$2. \quad \overline{\omega}_{rB} = \overline{\omega}_{rC}$$

և (S, τ, τ) -ը վեր է սծվում

$$\overline{\omega}_{rB} - \overline{\omega}_{rC} = \overline{\omega}_{rB} - \overline{\omega}_{rC} \quad (S, \tau, S)$$

բանաձևիւ Այսպիսով՝

[$S-H$] երե երկու կետեր համընկնում են այն մոմենտին, երբ նրանց հարաբերական արագությունները նույնն են, այդ կետերի արագացումների տարրերությունը անկախ է հաշվարքի սխառնից:

Նկատել տանենք, որ համընկնումն դիւրքում փոխադրական արագությունները իրար հավասար են. այսպիսով ($S-H$)-ի պալմաններում երկու կետերի թե՛ հարաբերական, թե՛ փոխադրական և բացարձակ արագությունները իրար հավասար են:

3՝ Վերադառնանք $P|Q$ շարժմանը: Ընդպես առված է § 6, 4, 2-ում, ակնթարթյալին C կենտրոնը շարժվում է թե՛ P և թե՛ Q հարթությունների վրա: Քանի որ P պատկերը շարժվում է Q հարթության վրա, կարող ենք P -ն դիտարկել որպես հարաբերական հաշվարքային սխառն (Σ') և համարել՝

C -ի շարժումը P -ի վրա որպես հարաբերական, իսկ շարժական ցենտրոնիզը՝ որպես C -ի հարաբերական հետադիծ. C -ի շարժումը Q -ի վրա և անշարժ ցենտրոնիզը՝ որպես բացարձակ շարժում և բացարձակ հետադիծ.

P -ի ալն կետի շարժումը, որը համընկնում է C -ի հետ փոխադրական շարժում է, բնդ որում ալզ կետի փոխադրական արագությունը $\overline{v}_{Cr} = 0$:

($S, 4, 6$)-ի հիման վրա՝

$$\overline{v}_{C\alpha} = \overline{v}_{C\alpha} + \overline{v}_{Cr}$$

կամ ալլալ դեպքում

$$\overline{v}_{C\alpha} = \overline{v}_{Cr}$$

ալս է [$G-F$] թեորեմը:

4- § 7, 9, 3'-ում ասված է, որ շարժական աքսորիզը գլխավորում է առանց սահքի անշարժ աքսորիզի վրայով: Այդ ապացուցել նշանակում է ցույց տալ, որ երկու աքսորիզների ընդհանուր ծնիչի լուրջանչուր կետ շարժվում է միևնույն արագությանը ալդ երկու աքսորիզների վրա:

Դիտարկենք շարժվող կարծր մարմինը որպես հաշվարքի հարթերական սխեմ (Σ'), իսկ անշարժ տարածությունը՝ հաշվարքի բացարձակ սխեմ (Σ):

Վերցնենք աքսորիզների ընդհանուր ծնիչի կամայական մի B կետ: Σ'-ի այն կետի շարժումը, որը համընկնում է B-ի հետ կլինի փոխադրական շարժումը և համաձայն տեսությանը փոխադրական արագությունը՝ $\vec{v}_{Bc} = 0$: Նկատի առնելով ալդ և կիրառելով B կետի համար (8, 4, 6) առնչությունը, կատանանք

$$\vec{v}_{Ba} = \vec{v}_{Br}$$

այսինքն այն, ինչ որ պետք է ապացուցվեր:

§ 8. Տ. Ռեզալի քեռեմը

§ 8, 5-ում ցույց է տրված, որ ընդհանուր դեպքում բացարձակ արագացումը հավասար չէ հարարերական և փոխադրական արագացումների գումարին:

Նույնը տեղի ունի նաև բացարձակ անկյունային արագացման վերաբերմամբ: Ցույց տանք, որ

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_c \times \vec{\omega}_r \quad (8, 8, 1)$$

Այստեղ $\vec{\omega}_a = \left(\frac{d\vec{\omega}_a}{dt} \right)_a$ Ն Σ սխեմում բացարձակ անկյունային արագության ածանցյալն է ըստ ժամանակի և հանդիսանում է բացարձակ անկյունային արագացումը, $\vec{\omega}_r = \left(\frac{d\vec{\omega}_r}{dt} \right)_r$ — հարարերական անկյունային արագացումն է, իսկ $\vec{\omega}_c = \left(\frac{d\vec{\omega}_c}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\vec{\omega}_c}{dt} \right)_r$ — փոխադրական անկյունային արագացումը, տե՛ս (8, 7, 6')-ը:

Որպեսզի ապացուցենք (8, 8, 1) առնչությունը, հիշենք, որ (8, 7, 6)-ում 1-ը կամայական վեկտոր է. մի անգամ ընդունենք $\vec{l} = \vec{\omega}_r$ իսկ մյուս անգամ՝ $\vec{l} = \vec{\omega}_c$:

Այսպիսով $(S, 7, 6)$ -ից ստանում ենք

$$\left(\frac{d\bar{\omega}_r}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\bar{\omega}_r}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_r \times \bar{\omega}_r,$$

իսկ, ըստ $\bar{z}_r$ -ի սահմանումի,

$$\left(\frac{d\bar{\omega}_r}{dt}\right)_a = \bar{z}_r + \bar{\omega}_r \times \bar{\omega}_r, \quad (8, 8, 2)$$

իսկ, ընդունելով $\bar{I} = \bar{\omega}_c$, ըստ $(S, 7, 6')$ -ի ունենք

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt}\right)_a &= \left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt}\right)_r, \\ \left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt}\right)_a &= \left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt}\right)_r = \bar{z}_c, \end{aligned} \quad (8, 8, 3)$$

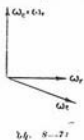
Փոխարենը $(S, 8, 2)$ -ը և $(S, 8, 3)$ -ը, նկատի առնելով, որ

$$\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_c = \bar{\omega}_a, \text{ ուստի } \left(\frac{d\bar{\omega}_r}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\bar{\omega}_c}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\bar{\omega}_a}{dt}\right)_a = \bar{z}_a$$

այսպիսով ստանում ենք

$$\bar{z}_a = \bar{z}_r + \bar{z}_c + \bar{\omega}_c \times \bar{\omega}_r, \quad (8, 8, 4)$$

տե՛ս նկ. 8—7:



$(S, 8, 4)$ առնչությունը նման է $(S, 5, 14)$ -ին և կոչվում է Ռեդլիի թեորեմ:

$(S, 8, 4)$ -ը նիշա է հարաբերական և փոխադրական բոլոր տեսակի շարժումների դեպքում:

[8—I] Յուրաքանչյուր ոչ համընթաց հարաբերական և փոխադրական շարժումների դեպքում բացարձակ շարժման անկյունային արագացումը հավասար է հարաբերական անկյունային արագացման, փոխադրական անկյունային

արագացման և $\bar{\omega}_c \times \bar{\omega}_r$ արտադրյալի գումարին:

§ 8. 9. Խնդիրներ

Խնդիր 1: S_1 S_2 փոկանիվները և նրանց վրայով անցնող անձեղևի փոկը գտնվում են Q հարթության վրա: S_1 ի և S_2 -ի C_1 ,

C_2 կենտրոնները միացված են անփոփոխելի ձողով, ընդ որում C_1 անշարժ է (նկ. 8--8):

Որոշել C_1C_2 ձողի, S_1 և S_2 անիվների բացարձակ անկյունային արագությունների միջև ստեղծված ընդհանուր դեպքում:

Լուծում: Ընտրենք հարաբերական և փոխադրական շարժումները: Պարզ է, որ սահմանելով S_1 և S_2 -ը C_1C_2 ձողին, մենք կստանանք S կարծր մարմին, որը կարող է միայն պտտվել C_1 -ով անցնող և Q -ին ուղղահայաց H_1C_1 առանցքի շուրջը:

Կարծր S մարմնի պատումը H_1C_1 առանցքի շուրջը կլինի փոխադրական շարժումը. նրա անկյունային արագությունը ($\bar{\omega}_c$) հավասար է C_1C_2 ձողի պտտման անկյունային արագությանը. այսինքն $\bar{\omega}_c = \bar{\omega}$:

Քանի որ S_1 և S_2 -ը սահմանված չեն C_1C_2 -ին, լուրջանջուր անելով կունենա իր հարաբերական շարժումը S -ի (կամ C_1C_2 -ի) նկատմամբ: Այդ շարժումներն են S_1 -ի պտտումը H_1C_1 -ի շուրջը ω_1 , հարաբերական անկյունային արագությամբ և S_2 -ի պտտումը Q -ին ուղղահայաց H_2C_2 առանցքի շուրջը՝ հարաբերական $\bar{\omega}_2$, անկյունային արագությամբ:

Օգտվենք $[S-A]$ -ից, C_1C_2 ձողը համարենք անշարժ. այդ դեպքում $\overline{D_1D_2}$ հեռավորությունը կլինի անփոփոխ, ուստի

$$\frac{d\overline{D_1D_2}}{dt} = 0:$$

Բայց

$$\frac{d\overline{D_1D_2}}{dt} = \bar{v}_{2r} - \bar{v}_{1r},$$

որտեղ

$$\bar{v}_{1r} = \bar{\omega}_1 \times \overline{C_1D_1}, \quad \bar{v}_{2r} = \bar{\omega}_2 \times \overline{C_2D_2}$$

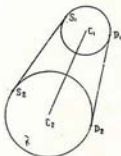
Այսպիսով

$$\bar{\omega}_2 \times \overline{C_2D_2} - \bar{\omega}_1 \times \overline{C_1D_1} = 0$$

Յլում, նկատի առնելով, որ

$$\overline{C_1D_1} \parallel \overline{C_2D_2}, \quad \bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}, \quad \bar{\omega}_{2r} = \bar{\omega}_{20} - \bar{\omega},$$

ստանում ենք



Նկ. 8--8:

Լուծում: Σ' -ի պատման հետ միասին շարժվում են σ_1 և σ_2 -ի C_1 , C_2 կենտրոնները, իսկ անիվները, համաձայն խնդրի պայմանի պետք է գլորվեն մեկը մյուսի վրայով: Այսպիսով, Σ' -ի պատումը O -ի շուրջը շարժման մեջ է դնում բոլոր անիվները: Նրանք շարժվում են Σ' -ի հետ և Σ' -ի նկատմամբ:

Պարզ է, որ փոխադրական է Σ' -ի շարժումը, հարաբերական են անիվների շարժումները Σ' -ի նկատմամբ:

Զորս անիվներն ունեն երեք ընդհանուր կետեր՝ M , N , K : M , N կետերի փոխադրական արագությունները համապատասխանաբար համասար են

$$\vec{v}_{cM} = \vec{\omega}_c \times \vec{OM}, \quad \vec{v}_{cN} = \vec{\omega}_c \times \vec{ON},$$

որտեղ $\vec{\omega}_c = \vec{\lambda}$ Σ' -ի պատման անկյունային արագությունն է: Անվանելով $\vec{\omega}_{2a}$, $\vec{\omega}_{1a}$ S_2 -ի և S_1 -ի պատման բացարձակ անկյունային արագությունները, կարող ենք M , N կետերի հարաբերական արագությունները արտահայտել այսպես՝

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_{rM} &= \vec{\omega}_{2r} \times \vec{OM} = (\vec{\omega}_{2a} - \vec{\omega}_c) \times \vec{OM} = (\vec{\omega}_{2a} - \vec{\lambda}) \times \vec{OM} \\ \text{և նման եղանակով} \quad \vec{v}_{rN} &= (\vec{\omega}_{1a} - \vec{\lambda}) \times \vec{ON} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Հարկավոր է նկատի առնել, որ անշարժ Σ' -ի ղեկավար σ_1 ու σ_2 անիվների անկյունային արագությունները հակադրադաս են, հետևապես հակադրադաս են S_1 , S_2 -ի $\vec{\omega}_{1a}$, $\vec{\omega}_{2a}$ անկյունային արագությունները՝

$$\vec{\omega}_{1a} \uparrow \vec{\omega}_{2a} \quad (b)$$

Ընդունելով Σ' -ը անշարժ, $|S-A|$ -ին համաձայն բոլոր հարաբերական արագությունները վեր ենք ածում բացարձակ արագությունների և տեսնում ենք, որ σ_1 , σ_2 անիվների ընդհանուր K կետի արագությունները իրար համասար են՝

$$\vec{v}_{r2k} = \vec{v}_{r1k} = \vec{v}_{rk}$$

Այդ պատճառով σ_1 և σ_2 անիվների ընդհանրացման բոլոր կետերի արագությունների չափը նույնն է և համասար է $\vec{v}_{rk}$, իսկ սահում չլինելու հետևանքով σ_2 և S_2 -ի ընդհանուր M կետում և σ_1 ու S_1 -ի ընդհանուր N կետում հարաբերական արագությունների չափերը նույնն են՝

$$\vec{v}_{rM} = \vec{v}_{rN} = \vec{v}_{rk} \quad (c)$$

էթէ (a)-ում վեկտորական արտադրյալները փոխարինենք իրենց չափերով, ապա, նկատի ունենալով (b) և (c) և նշանակելով $OM = R_2$, $ON = R_1$, կստանանք

$$R_2(\omega_{20} - \lambda) = -R_1(\omega_{10} - \lambda) \quad (d)$$

(d)-ն այն առնչութիւնն է, որ մենք կամենում էինք արտածել: Այստեղ ω_{20} , ω_{10} , λ անկյունային արագութիւնների չափերն են:

Մասնավոր դեպքեր.

ա) $\lambda = 0$. (d)-ն դեր է ածում $R_2\omega_{20} + R_1\omega_{10} = 0$ առնչութիւնը:

բ) $R_1 = R_2$. արժմ (d)-ն տալիս է

$$\lambda = -\frac{\omega_{20} + \omega_{10}}{2} \quad (e)$$

գ) $\omega_{10} = \text{const}$ և միաժամանակ $R_1 = R_2$ (իսկ ω_{20} փոփոխական է). ածանցելով (e)-ն, անկյունային արագացումների չափերի համար կստանանք

$$2\dot{\lambda} = -\dot{\omega}_{20}$$

Խնդիր 3: AD կտրծը ձողի A կետը հալածաարագի շարժում է շրջանագծով φ անկյունային արագութիւնը (նկ. 8—10):

Ձողը անցկացված է B օղակով, որը նույն շրջանագծով պտտւում է $\dot{\psi}$ անկյունային արագութիւնը:

Որոշել ձողի անկյունային արագութիւնը, անշարժ և շարժական ցենտրիդները:

Լուծում: Անշարժ շրջանի Q հարթութիւն ուղղահայաց միաժամկետորէն, ունենք

$$\dot{\varphi} = \dot{h} \dot{\varphi}, \quad \dot{\psi} = \dot{h} \dot{\psi}$$

Հետագայում զիտարկելու են միայն անկյունային արագութիւնների թիւական արժեքները՝ $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$:

Դիցուք OA, OB շառավիղներով կազմված կենտրոնական անկյունները հաշվւում են անշարժ OI, ուղղից.

$$\angle LOA = \varphi, \quad \angle LOR = \psi; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}.$$

AOB եռանկյունը համաստրություն է. հետևապես OK բարձրությունը միավանդանակ AOB անկյան կիսողն է.

$$\angle LOK = \eta = \frac{\dot{\psi} - \dot{\varphi}}{2} + \varphi = \frac{\dot{\psi} + \dot{\varphi}}{2}.$$

OK -ի անկյունային արագությունը

$$\frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta} = \frac{\dot{\psi} + \dot{\varphi}}{2}.$$

Գտնի որ $OK \perp AD$, AD -ն ունի նույն $\dot{\eta}$ բացարձակ անկյունային արագությունը. AD -ն միշտ մնում է շրջանագծի հարթության վրա, ուստի AD -ի շարժումը կարելի է պատկերացնել որպես պտտում անկմարթային առանցքի շուրջը: Առանցքի դիրքը որոշելու համար նպատակահարմար է օգտվել հարաբերական շարժման տեսությունից:

Տանձնք AE շոշափողը և դիտենք OAE -ն որպես հաշվարքի հարաբերական (Σ') սխեմա: Σ' -ի պտտումը O -ի շուրջը, $\omega_r = \dot{\varphi}$ անկյունային արագությամբ, կլինի փոխադրական շարժումը, իսկ AD -ի պտտումը A -ի շուրջը՝ հարաբերական շարժումը:

$$\angle DAE = \angle KOA = \frac{\dot{\psi} - \dot{\varphi}}{2} = \alpha.$$

այդ պատճառով հարաբերական անկյունային արագությունը՝

$$\omega_r = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{\psi} - \dot{\varphi}}{2},$$

իսկ բացարձակ շարժման անկյունային արագությունը

$$\omega_a = \omega_r + \omega_r = \frac{\dot{\psi} + \dot{\varphi}}{2} = \dot{\eta}.$$

Նույնը վերևում ստացված է այլ ձևով:

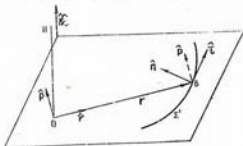
Անկմարթային կենտրոնը պետք է դնելիք այն ուղղի վրա, որ միացնում է հարաբերական և փոխադրական պտտումների առանցքների հատման կետերը շրջանագծի հարթության հետ, այսինքն՝ OA ուղղի վրա:

Բանի որ հարաբերական պտտման առանցքը հատում է Q հարթությունը A կետում, իսկ փոխադրականը՝ O կետում, համաձայն $[7-P]$ -ի ակնթարթային C կենտրոնը պետք է դանդի OA աղղի վրա: Ըստ (7, 11, 4')-ի

$$OC : OA = \frac{\dot{\psi} - \dot{\varphi}}{2} : \dot{\varphi} :$$

Այստեղ $\dot{\psi}$ -ն և $\dot{\varphi}$ -ն հաստատուն են, ուստի OC -ն նույնպես հաստատուն է, այսինքն անշարժ ցենտրոիդը շրջանագիծ է, որի կենտրոնն ու շառավիղն են O և OC : Պարզ է, որ հաստատուն է նաև AC -ն, այսինքն՝ ձողի բոլոր դիրքերում ակնթարթային C կենտրոնի հեռավորությունը ձողի A կետից նույնն է, հետևաբար շարժական ցենտրոիդը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը A -ն է, իսկ շառավիղը՝ AC :

Խնդիր 4: Հարթ, անփոփոխելի Σ' կորը պտտվում է իր հարթությունը ուղղահայաց OH առանցքի շուրջը $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$ անկյունային արագությամբ, կորի վրա շարժվում է B կետը $\bar{v}_r = \bar{v}_r(t)$ հարաբերական արագությամբ (նկ. 8—11):



Նկ. 8—11:

Որոշել բացարձակ արագացման Σ' -ի զլխավոր նորմալին և շոշափողին զուգահեռ բաղադրիչները:

Այստեղ փոխադրական շարժումը Σ' -ի պտտումն է OH -ի շուրջը, իսկ հարաբերականը՝ B -ի շարժումը Σ' -ի վրա:

Ընդունելով Σ' -ի զլխավոր նորմալի և շոշափողի միավոր վեկտորները $(\overset{\Delta}{n}, \overset{\Delta}{\tau})$, հարաբերական արագության և արագացման համար ունենք

$$\bar{v}_r = \overset{\Delta}{\tau} v_r$$

$$\bar{\omega}_r = \dot{\tau} \frac{dv_r}{dt} + n \frac{v_r^2}{\rho} = \dot{\tau} v_r \frac{dv_r}{ds} + n \frac{v_r^2}{\rho},$$

որտեղ ρ -ն Σ' -ի կորաթիւն շառավիղն է B կետում:

Անվանելով OH սաանցքին զուգահեռ միավոր-վեկտորը $\hat{k}$, կարող ենք գրել

$$\bar{\omega} = \hat{k} \bar{\omega}, \quad \bar{z} = \hat{k} \bar{z}; \quad (a)$$

Այստեղ $\bar{\omega}$ -ն և $\bar{z}$ -ը $\bar{\omega}$ -ի ու $\bar{z}$ -ի թվական արժեքներն են: Համաձայն $(5, 2, 9)$ և $(5, 6, 5)$ -ի վեկտորական արագությունը և արագացումը կլինեն

$$\bar{v}_e = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad \bar{r} = \overline{OB}$$

$$\bar{\omega}_e = \bar{z} \times \bar{r} - \bar{r} \omega^2;$$

Կորիոլիսի արագացումը

$$\bar{\omega}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_e = 2\bar{\omega} v_r (\hat{k} \times \dot{\tau});$$

Այսպիսով բացարձակ արագացումը

$$\bar{\omega}_a = \dot{\tau} v_r \frac{dv_r}{ds} + n \frac{v_r^2}{\rho} + \bar{z} \times \bar{r} - \bar{r} \omega^2 + 2\bar{\omega} v_r (\hat{k} \times \dot{\tau}) \quad (b)$$

Դանի որ բացարձակ շարժումը կատարվում է Σ' -ի հարթութւն վրա $\bar{\omega}_a$ -ն չունի Σ' -ին ուղղահայաց բաղադրիչ:

Մեր նպատակն է որոշել $\bar{\omega}_a$ -ի $\hat{\tau}$ -ին և $\hat{n}$ -ին զուգահեռ բաղադրիչները:

$$\bar{\omega}_{a\tau} = \dot{\tau} (\bar{\omega}_a \cdot \hat{\tau}), \quad \bar{\omega}_{an} = n (\bar{\omega}_a \cdot \hat{n})$$

(b) -ից ստանում ենք $(\text{որովհետև } \hat{\tau} \cdot \hat{n} = 0, \hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = \hat{n} \cdot \hat{n} = 1,$

$$\hat{\tau} \cdot (\hat{k} \times \hat{\tau}) = 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_a \cdot \hat{\tau} &= v_r \frac{dv_r}{ds} + (\bar{z} \times \bar{r}) \cdot \hat{\tau} - \bar{r} \cdot \hat{\tau} \omega^2 \\ \bar{\omega}_a \cdot \hat{n} &= \frac{v_r^2}{\rho} + (\bar{z} \times \bar{r}) \cdot \hat{n} - (\bar{r} \cdot \hat{n}) \omega^2 + (\hat{k} \times \hat{\tau}) \cdot \hat{n} 2\bar{\omega} v_r \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Այս արտահայտությունները ստորագրաբար ձևափոխում են պեղեա, որ բացահայտվի $\vec{\omega} \cdot \hat{\tau}$ և $\vec{\omega} \cdot \hat{n}$ -ի կախումը Σ' կրթի ձևից:

Օգտվենք այն հանդամանքից, որ հարթ շարժման դեպքում էլիմենտար տեղափոխումը՝

$$d\vec{r} = \hat{\tau} ds = \hat{r} dr + \hat{p} r d\theta, \quad (d)$$

$$\begin{aligned} &\text{նկատի առնելով, որ } \hat{p} \perp \hat{r}, \hat{p} \cdot \hat{r} = 0; \hat{\tau} \perp \hat{n}, \hat{\tau} \cdot \hat{n} = 0, \hat{p} \cdot \hat{p} = \\ &= \hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = \hat{n} \cdot \hat{n} = \hat{r} \cdot \hat{r} = 1, \end{aligned}$$

(d)-ից ստանում ենք

$$\hat{p} \cdot \hat{\tau} ds = r d\theta \quad (e)$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\tau} ds = dr \quad (i)$$

$$(\hat{r} \times \hat{\tau}) ds = (\hat{r} \times \hat{p}) r d\theta = \hat{k} r d\theta, \quad (g)$$

որովհետև $\hat{r}$, $\hat{p}$, $\hat{k}$ կազմում են վեկտորների աջ ձևաքի հսկակ: Բացի այդ, ըստ (a)-ի

$$(\vec{z} \times \vec{r}) \cdot \hat{\tau} = \vec{z} \cdot \vec{r} (\hat{k} \times \hat{r}) \cdot \hat{\tau} = \vec{z} \cdot \hat{r} \hat{k} \cdot (\hat{r} \times \hat{\tau}) \quad (h)$$

(c), (h) և (f)-ից եզրակացնում ենք, որ

$$\vec{\omega} \cdot \hat{\tau} = \vec{\omega} \cdot \hat{\tau} = v_r \frac{dv_r}{ds} + v_r^2 \frac{d\theta}{ds} - \frac{r ds}{ds} \omega^2, \quad (i)$$

Անցնելով $\vec{\omega} \cdot \hat{n}$ -ին, պետք է ասելի առաջ ուշենալ երկու հնարավոր դեպքեր. ա) $\hat{\tau}$, $\hat{n}$, $\hat{k}$ միավոր-վեկտորները կազմում են աջ հսկակ, բ) աջ հսկակ են կազմում $\hat{\tau}$, $(-\hat{n})$, $\hat{k}$:

Բննարկենք առաջին դեպքը.

$$(\hat{\tau} \times \hat{n}) \cdot \hat{k} = (\hat{k} \times \hat{\tau}) \cdot \hat{n} = 1$$

Բացի այդ

$$(\vec{z} \times \vec{r}) \cdot \hat{n} = v_r \hat{k} \cdot (\hat{r} \times \hat{n})$$

և քանի որ (նկ. 8—11)

$$\angle(\hat{r}, \hat{n}) = \pi - \angle(\hat{\tau}, \hat{p}),$$

$$\hat{r} \times \hat{n} = \hat{\tau} \times \hat{p},$$

իսկ (d)-ից հետևում է, որ $(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{p}}) ds = (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{p}}) dr = \dot{k} dr$
Այսպիսով

$$\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{n}} = \dot{k} \frac{dr}{ds},$$

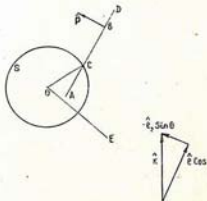
$$(\vec{z} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{n}} = \vec{z} r (\dot{k} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \dot{\vec{n}} = \vec{z} r \dot{k} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{n}}) = \vec{z} r \frac{dr}{ds}$$

և բոլոր (c)-ի

$$\vec{\omega}_{an} = \vec{\omega}_a \cdot \dot{\vec{n}} = \frac{\vec{v}_r^2}{\rho} + \vec{z} r \frac{dr}{ds} + r^2 \omega^2 \frac{d\theta}{ds} + 2\omega \vec{v}_r,$$

Նկար 5: Անստիտիտի AD աղղի C կետը հախտաբաշտափ-
շարժվում է S շրջանագծով, որի շառավիղն է ρ, իսկ AD-ն
սլուծվում է օ՝ անկյունային արագության շրջանագծի հար-
թաթյանը ուղղահայաց CH առանցքի շուրջը (Նկ. 8—12): Որո-

CB=r



Նկ. 8—12

չել AD-ի վրա կամայականորեն շարժվող B կետի արագությունը
և արագացումը, նկատի առնելով, որ օ՝ անկյունային արագու-
թյունը փոփոխական է:

Այստեղ հարաբերական է B-ի շարժումը AD-ով. հարաբե-
րական արագությունը

$$\vec{v}_{CB} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}},$$

որտեղ

$$\dot{\vec{r}} \uparrow \overline{CB}, \quad r = CB, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}.$$

Համաձայն վերևում ասածի $\dot{r} = \dot{r}(t)$:

Փոխադրական շարժումը AD ուղղի շարժումն է: Փոխադրական արագության արտահայտությունը ըստ (7, 6, 2)-ի

$$\vec{v}_{eB} = \vec{\omega} \times \overline{CB} + \vec{v}_{eC} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{eC}:$$

Անվանելով շրջանագծի կենտրոնը O , S -ի հարթությունը ուղղահայաց միավոր-վեկտորը $\hat{h}$, իսկ EOC անկյունը φ (OE -ն անշարժ ուղիղ է), կարող ենք գրել

$$\vec{v}_{eC} = (\hat{h} \dot{\varphi}) \times \overline{OC}, \quad \dot{\varphi} = \text{const}:$$

Արագիտով B -ի բացարձակ արագությունը

$$\vec{v}_{aB} = \vec{r} \dot{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} + (\hat{h} \times \overline{OC}) \dot{\varphi}:$$

Հարաբերական արագացումը

$$\vec{\omega}_{rB} = \dot{r} \dot{r}:$$

Փոխադրական արագացումը որոշելու համար նկատի առնենք, որ

$$\vec{\omega}_{eC} = -\overline{OC} \dot{\varphi}^2 = \overline{CO} \dot{\varphi}^2$$

և կիրառենք (6, 7, 1)-ը՝

$$\vec{\omega}_{eB} = \vec{z} \times \vec{r} - \vec{r} \omega^2 + \vec{\omega}_{eC}.$$

Հետևապես

$$\vec{\omega}_{eB} = \vec{z} \times \vec{r} - \vec{r} \omega^2 + \overline{CO} \dot{\varphi}^2.$$

Արագացիչ արագացումը

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2(\vec{\omega} \times \dot{r}) \dot{r}:$$

Այժմ կարող ենք գրել բացարձակ արագացման արտահայտությունը

$$\vec{\omega}_{aB} = \dot{r} \dot{r} + \overline{CO} \dot{\varphi}^2 + \vec{z} \times \vec{r} - \vec{r} \omega^2 + 2(\vec{\omega} \times \dot{r}) \dot{r}:$$

Դանի որ բացարձակ շարժումը հարթ է և կատարվում է S շրջանագծի հարթության վրա, հնարավոր է բացարձակ արագությունը և բացարձակ արագացումը վերլուծել երկուական բաղադրիչների՝ դուգաճևո $\vec{r}$ -ին և դուգաճևո $\dot{p} = (\hat{h} \times \dot{r})$:

Որոշենք բացարձակ արագացումը հետևյալ մոմենտներում.

$$1. \text{ երբ } \overline{CO} \parallel \overline{CB} \quad (\overline{CB} = \vec{r})$$

$$\vec{\omega}_{aB} = \dot{\vec{r}} (\ddot{r} - r\omega^2 - CO\dot{\omega}^2) + \dot{p} (\vec{z}r + 2\vec{\omega}r):$$

Բնորոշելով $\dot{h}$ -ի ուղղվածությունը անպես, որ

$$\dot{h} \parallel \vec{\omega},$$

այդ դեպքում $\vec{\omega}_{aB}$ -ի արտահայտության մեջ $\vec{\omega} > 0$, իսկ $\vec{z} > 0$, եթե

$$\vec{z} \parallel \vec{\omega}, \text{ և } \vec{z} < 0, \text{ եթե } \vec{z} \perp \vec{\omega};$$

$$2. \text{ երբ } \overline{CO} \parallel \dot{p},$$

$$\vec{\omega}_{aB} = \dot{\vec{r}} (\ddot{r} - r\omega^2) + \dot{p} (\vec{z}r + 2\vec{\omega}r + CO\dot{\omega}^2):$$

Խնդիր 6: Անվտիսկի Σ' ուղիղը գծում է կամայական կոնական մակերևույթ, որի զագաթը անշարժ O կետն է (նկ. 8—13ա):

Որոշել Σ' -ով սահող B կետի շարժումը, եթե արված են $OB = r = r(t)$ ֆունկցիան և Σ' -ի $\vec{\omega}$ անկլոնային արագությունը O -ի շուրջը $\omega = \omega(t)$:

Այստեղ հարաբերական շարժումն է B -ի շարժումը Σ' ուղղի վրա. հարաբերական արագությունը և արագացումը՝

$$\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} \dot{r}, \quad \dot{\vec{r}} \parallel \overline{OB},$$

$$\vec{\omega}_r = \dot{\vec{r}} \dot{r}.$$

Փոխադրական է B -ի շարժումը Σ' ուղղի հետ. փոխադրական արագությունը և արագացումը համաձայն (7, 5, 5)-ի և (7, 5, 6)-ի

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega}_e = \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}:$$

Լրացուցիչ արագացումը՝

$$\vec{\omega}_e = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \dot{r}:$$

Այսպիսով բացարձակ արագությունը

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}} \dot{r} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$



Նկ. 8—13ա

իսկ բացարձակ արագացումը՝

$$\vec{\omega}_a = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \ddot{\omega} \times \vec{r} + 2(\ddot{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r},$$

$$\text{որտեղ } \ddot{\omega} \times \vec{r} = \ddot{\omega} \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}):$$

Այս խնդիրը կարելի է կոնկրետացնել:

1. Ընթացիկինք, որ Σ' աղիպը միշտ մնում է O -ով անցնող Q հարթության վրա (արևինքն Σ' -ն պտտվում է Q -ին ուղղահայաց առանցքի շուրջը):

Արժեք $\omega \parallel \vec{z}$, $\omega \perp \vec{OB}$, $\vec{z} \perp \vec{OB}$, $\vec{r} = \vec{OB}$ և արդ պտտմանով $\ddot{\omega} \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}) = -\ddot{\omega} \vec{r}$:

$\ddot{\omega} \perp \dot{\vec{r}}$ արտադրյալը անփոփոխելի է, $\ddot{\omega} \perp \dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{r}} \perp \ddot{\omega}$ -ը կազմում են աջ ձեռքի եռյակ:

$\vec{z} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{z}$, $\vec{z}$ զրահան է, երբ $\vec{z} \parallel \ddot{\omega}$, և բացասական, եթե $\vec{z} \perp \ddot{\omega}$: $\ddot{\omega} \times (\ddot{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} = 2 \dot{\vec{r}} \times \ddot{\omega} \dot{\vec{r}}$:

Վերջնականապես ստանում ենք

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_a &= \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \ddot{\omega}, \\ \vec{\omega}_a &= \dot{\vec{r}} (\dot{\vec{r}} - \ddot{\omega} \dot{\vec{r}}) + \dot{\vec{r}} (\dot{\vec{r}} + 2\dot{\vec{r}} \times \ddot{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (a_0)$$

Բազմական է այս երկու բանաձևերում $\ddot{\omega}$ և $\ddot{\omega}$ -ի փոխարեն համապատասխանաբան զրել $\ddot{\varphi}$ և $\ddot{\varphi}$ սրղևողի ստացվեն արդեն ծանոթ (2, 9, 5), (2, 9, 8) տանջաթվանները՝ արագության և արագացման արտահայտությունները բեկառյին սխեմում:



Նկ. 8—13 բ:

II. Նոր ստացված $\vec{\omega}_a$ և $\vec{\omega}_b$ արտահայտությունները կարելի է պարզորոշել նաև OB ուղղի ամենաբնականոր շարժման դեպքում, (Նկ. 8—13 ա, բ, գ):

Բնիպակա անշարժ (O) կետ ունեցող աղղի զիրքը լիովին որոշվում է երկու, մեկը մրուսից անհախ անկյուններով, ինչպես արդ անդի ունի օֆերիկ կոորդինատային սխեմում: Թող անկյուններից մեկը լինի ψ , և զիցյաք OA աֆն անշարժ ուղղին է, որից հաշվվում է ψ , $\psi = \angle AOB$:

Պատկերացնենք, որ Q հարթությունը, որը պարունակում է OA և OB ուղղիցները, հանդիսանում է օֆերիկ կոորդինատային սխեմի:

մերիդիանալ հարթությունը և կարող է պատկերել OA -ի շուրջը: Այն երկնիստ անկյունը, որ կազմում է անշարժ մերիդիանալ OAD հարթությունը շարժվող Q -ի հետ, և որը չափվում է DOC ցծային անկյանով ($DOC \perp OA$) անվանենք φ , իսկ DOC հարթությունը՝ P :

Քանի որ φ , և անկյուններով որոշվում է OB -ի դիրքը, $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունն էլ պետք է որոշվի $\dot{\varphi}$ և $\dot{\theta}$ -ի միջոցով: Իրոք, եթե OB ուղղի երկու անսահման մոտ դիրքերին համապատասխանում են φ , և $\varphi + d\varphi$, և $\theta + d\theta$ անկյունները, հետևաբար OB -ն պատկերվում է O -ի շուրջ

$$d\vec{\varphi} = \dot{e}_3 d\theta + \dot{k} d\varphi$$

անկյունով:

Այստեղ $\dot{e}_3$ և $\dot{k}$ -ն միավոր-վեկտորներ են, $\dot{k} \perp P$, իսկ $\dot{e}_3$ պատկանում է շարժական սֆերիկ կոորդինատային սխեմի փոխադարձաբար ուղղահայաց $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$ միավոր-վեկտորների եռյակին: $\dot{e}_1 \uparrow \uparrow \overline{OB}$, $\dot{e}_2 \perp \overline{OB}$ և դանդում է Q հարթության վրա. $\dot{e}_3 = \dot{e}_1 \times \dot{e}_2$ ուղղահայաց է Q հարթությանը և ուղղված այն կողմը, որտեղից դիտելիս, և անկյան դրական աճը տեղի է ունենում մասնալսքի հակառակ ուղղությամբ: Այսպիսով $d\vec{\varphi}$, $\dot{e}_3 d\theta$ և $\dot{k} d\varphi$ անսահման փոքր անկյունները դիտարկվում են որպես վեկտորներ: Կազմելով $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}} = \bar{\omega}$ ամանցյալը, ունենք

$$\bar{\omega} = \dot{e}_3 \dot{\theta} + \dot{k} \dot{\varphi},$$

որտեղ

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (a)$$

Որպեսզի $\bar{\omega}$ -ն արտահայտենք $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$ միավոր-վեկտորների միջոցով, նկատի առնենք նկ. 8—13գ, որից պարզ է, որ

$$\dot{k} = \dot{e}_1 \cos \theta - \dot{e}_2 \sin \theta,$$

ուստի

$$\bar{\omega} = \dot{e}_1 \cos \theta \dot{\varphi} - \dot{e}_2 \sin \theta \dot{\varphi} + \dot{e}_3 \dot{\theta} \quad (b)$$

Արժամ B կետի շարժումը կարելի է պատկերացնել այսպես. B -ն կամ աշտեկոտրեն շարժվում է Q հարթաթվյան վրա և Q -ի հետ պտտվում է անշարժ OA առանցքի շուրջը: Շարժումը Q -ի վրա հարաբերականն է, իսկ Q -ի պտտումը OA -ի շուրջը փոխադրական շարժումն է:

Պարզ է, որ I -ում (տե՛ս էջ 396) նկարագրված բացարձակ շարժումը ալիստիկ վեր է անցնել B -ի հարաբերական շարժմանը:

Նկատի առնելով, որ I -ում օգտագործված $\dot{r}$ և $\dot{\theta}$ միավոր-վեկտորները ալժամ նշանադրված են համապատասխանաբար $\dot{e}_1$ և $\dot{e}_2$, որ I -ում φ հաճախար է $\dot{e}_2\dot{\theta}$, իսկ $\ddot{z} = \dot{e}_2\ddot{\theta}$, և փոխարինելով (a_0) -ում a ինդեքսը հարաբերական շարժման r ինդեքսով, կստանանք

$$\overline{v}_r = \dot{e}_1\dot{r} + \dot{e}_2r\dot{\theta} \quad (c)$$

$$\overline{w}_r = \dot{e}_1(\dot{r} - r\dot{\theta}^2) + \dot{e}_2(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (d)$$

Փոխադրական շարժման (Q -ի պտտումը OA -ի շուրջը) արագությունը և արագացումը՝

$$\overline{v}_\varphi = \dot{e}_2\dot{\varphi} \quad (e)$$

$$\overline{w}_\varphi = -\dot{\varphi}\dot{\varphi}^2 + \dot{e}_3\ddot{\varphi} \quad (f)$$

Վերջապես Կորիոլիսի արագացումը՝

$$\overline{w}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r$$

Համաձայն (b) և (c) -ի կարող ենք գրել

$$\overline{w} = 2(\dot{e}_1 \cos \dot{\theta} \dot{\varphi} - \dot{e}_2 \sin \dot{\theta} \dot{\varphi} + \dot{e}_2 \dot{\theta}) \times (\dot{e}_1 \dot{r} + \dot{e}_2 r \dot{\theta})$$

կամ, որովհետև

$$\dot{e}_2 \times \dot{e}_2 = \dot{e}_3, \quad \dot{e}_2 \times \dot{e}_3 = \dot{e}_1, \quad \dot{e}_3 \times \dot{e}_1 = \dot{e}_2,$$

$$\overline{w}_c = 2[\dot{\varphi} \dot{e}_2(r\dot{\theta} \cos \dot{\theta} + \dot{r} \sin \dot{\theta}) + \dot{e}_2 \dot{r} \dot{\theta} - \dot{e}_1 r \dot{\theta}^2] \quad (g)$$

Դանի որ մեր նպատակն է արագությունը և արագացումը արտահայտել $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$ միավոր-վեկտորների միջոցով, նրանց միջոցով պետք է արտահայտել նաև (e) և (f) -ում մասնակցող $\dot{\varphi}$ և $\ddot{\varphi}$ (նկ. 8-13դ):

$$\dot{\rho} = \dot{e}_1 \sin \theta + \dot{e}_2 \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta$$

և

$$\bar{\rho} = r \sin \theta (\dot{e}_1 \sin \theta + \dot{e}_2 \cos \theta);$$

Արագիւնով (e) և (f)-ը ստանում են նոր տեսք

$$\bar{v}_e = \dot{e}_3 r \sin \theta \dot{\varphi} \quad (e')$$

$$\bar{\omega}_e = -r \sin \theta (\dot{e}_1 \sin \theta + \dot{e}_2 \cos \theta) \dot{\varphi}^2 + \dot{e}_3 r \sin \theta \ddot{\varphi}, \quad (f')$$

(c), (e'), (d), (g) ու (f')-ը տալիս են բացարձակ արագութիւնը՝

$$\bar{v}_a = \dot{e}_1 \dot{r} + \dot{e}_2 r \dot{\theta} + \dot{e}_3 r \sin \theta \dot{\varphi}$$

և բացարձակ արագացումը՝

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_c = \dot{e}_1 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \dot{e}_2 (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) - \\ - r \sin \theta (\dot{e}_1 \sin \theta + \dot{e}_2 \cos \theta) \dot{\varphi}^2 + \dot{e}_3 r \sin \theta \ddot{\varphi} + \\ + 2\dot{\varphi} (\dot{e}_3 r \dot{\theta} \cos \theta + \dot{e}_3 \dot{r} \sin \theta) \end{aligned}$$

կամ

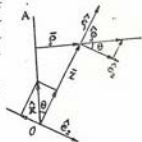
$$\begin{aligned} \bar{\omega}_a = \dot{e}_1 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \dot{e}_2 (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) + \\ + \dot{e}_3 (r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} + 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi}), \quad (h) \end{aligned}$$

(h)-ը արագացման արտահայտութիւնն է սֆերիկ կոորդինատաւիճակի սխեմայով:

Խնդիր 7: Երկու շոգենաւոր անցնում են դեռի մի ափից մյուս ափը: Շոգենաւորի հարաբերական արագութիւնն v_r չափը միեւնոյնն է, իսկ ջրի (փոխադրական) արագութիւնն չափը հաւասար է v_c : Առաջին շոգենաւոր շարժւում է աջակէս, որ նրա ճանապարհը լինի մասնակարճը, իսկ երկրորդ շոգենաւոր պետք է հասնի մյուս ափը մասնակարճ ժամանակամիջոցում:

Ցույց տալ, որ ճանապարհների տեղութիւնների տարբերութիւնը հաւասար է

$$\frac{b}{v_r} \left(\frac{v_c}{\sqrt{v_r^2 - v_c^2}} - 1 \right), \text{ եթե } v_c > v_r$$



ԷՎ. Տ-13 գ

$$\frac{b}{v_r} \left(\frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 - v_c^2}} \right), \quad \text{եթե } v_r > v_c.$$

Եւն գետի լայնությունն է:

Լուծում: Մի քանի հանգամանքների պետք է նկատի առնվեն.

ա) փոխադրական արագությունը (v_c) զուգահեռ է գետի ափերին. հետևապես հայտնի պետք է համարել թե՛ $\overline{v_c}$ -ի ուղղությունը և թե՛ $\overline{v_c}$ -ի չափը: Խնդրում արված է $\overline{v_r}$ -ի v_r չափը. $\overline{v_r}$ -ի ուղղությունը պետք է որոշվի:

բ) եթե $v_c > v_r$, բացարձակ հետադիմը S_c և բացարձակ արագությունը v_c չեն կարող ուղղահայաց լինել գետի ափերին:

Իսկապես (նկ. 8—14ա) ահա դեպքում, երբ $v_r \perp \overline{v_c}$, $\overline{v_r}$ -ը հանդիսանում է եռանկյան ներքնաձիգը, առաի $v_r > v_c$.



գ) Հարաբերական, փոխադրական և բացարձակ շարժումների հախառնաչափի լինելու պատճառով, մի ափից մյուս ափը հասնելու և ժամանակամիջոցը հափառար է ճանապարհի երկարություն և համապատասխան $S = 14$ կմ իրան արագության քանորդին՝

$$\tau = \frac{S_r}{v_r} = \frac{S_c}{v_c} = \frac{S_v}{v_v}. \quad (8)$$

S_r , S_c , S_v հարաբերական, փոխադրական և բացարձակ ճանապարհների երկարություններն են:

(8)-ից անմիջապես համարձակ է, որ $\tau_{\min}$ որոշելու համար պետք է պատկել $\frac{S_r}{v_r}$ քանորդից, քանի որ v_r -ը արված է. ուստի

$$\tau_{\min} = \frac{S_{r\min}}{v_r}.$$

Իսկ $S_{r\min}$ -ը (հարաբերական ճանապարհի մինիմալ երկարությունը), պարզ է. հախառն է գետի Ե լայնությունը:

Այսպիսով, անկախ ահա բանից, թե v_c և v_r չափերից որն է մեծ

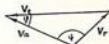
$$\tau_{\min} = \frac{b}{v_r}.$$

Այսինքն ահա դեպքից, երբ $v_c > v_r$, P -ում r -ի (v_c , v_r) անկյունը ուղիղ չէ. անկյուններ արդ անկյունը τ (նկ. 8—14բ)

$$v_r : v_e = \sin \varphi : \sin \psi, \quad \sin \varphi = \frac{v_r}{v_e} \sin \psi, \quad (b)$$

Պարզ է, որքան φ -ն մոտ լինի $\frac{\pi}{2}$ արժեքին, այնքան ավելի փոքր է բացարձակ ճանապարհի S_a երկարությունը, և որովհետե v_r , v_e արված են, ապա (b)-ից բխում է

$$(\sin \varphi)_{\max} = \frac{v_r}{v_e}, \quad \sin \psi = 1, \quad \vec{v}_a \perp \vec{v}_r, \quad (c)$$



Նկ. 8-14բ

ձևով

$$S_a = \frac{b}{\sin \varphi}, \quad \tau = \frac{S_a}{v_a} = \frac{b}{\sin \varphi v_a} = \frac{b}{\cos \varphi v_r},$$

որովհետե

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

(c)-ից ստանում ենք՝

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{v_e^2 - v_r^2}}{v_e},$$

ուստի, երբ $v_e > v_r$, ամենակարճ ճանապարհի տեղումնում

$$\tau = \frac{bv_e}{v_r \sqrt{v_e^2 - v_r^2}}$$

և

$$\tau - \tau_{\min} = \frac{b}{v_r} \left(\frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 - v_r^2}} - 1 \right),$$

Անցնենք երկրորդ դեպքին, երբ $v_e < v_r$ ։ Այժմ կարելի է այնպես ընտրել v_r -ի ուղղությունը, որ $\vec{v}_a$ լինի ուղղահայաց $\vec{v}_e$ -ին և բացարձակ ճանապարհի երկարությունը S_a լինի փոքրագույնը, $S_a = b$ ։

Ի՞նչ ափից մյուսին հասնելու համար կայանջվի

$$\tau = \frac{b}{v_e} = \frac{S_a}{v_a},$$

ընդ որում

$$v_a = \sqrt{v_r^2 - v_c^2} \text{ ;}$$

Нормировка

$$\tau' = \frac{b}{\sqrt{v_r^2 - v_c^2}}$$

и

$$\tau' - \tau_{min} = \frac{b}{v_r} \left(\frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 - v_c^2}} - 1 \right) \text{ ;}$$

ԿԱՐԾՐ ՄԱՐՄՆԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐԸ

§ 9. 1. ԸՆԳԻԱՏՈՐ ՊԻՏՈՂՈՒՅՈՒՆՆԵՐ

1°. Դիցուք A, A^*, B, B^* կետերը պատկանում են կարծր մարմնին: Վեկտորը, որի սկիզբն ու վերջը հանդիսանում են A և A^* ինչպես ասված է § 7, 1-ում անվանվում է կարծր մարմնի վեկտորական հատված (սովելի կարճ՝ հատված) և նշանակվելու է $\vec{a}$ տառով:

Այսպիսով $\vec{a} = \overline{AA^*}$. Նման ձևով $\vec{b} = \overline{BB^*}$ և այլն:

Կարծր մարմնի սահմանումից հետևում է, որ ինչպիսի փոփոխման էլ ենթարկվելու լինի նրա զիրքը տարածություն մեջ

$$a = \text{const.} \quad b = \text{const.}$$

և որովհետև նույնը վերաբերում է յուրաքանչյուր վեկտորական հատվածին, ապա պետք է եզրակացնել, որ երկու կամայական վեկտորական հատվածներով կազմած անկյունը անփոփոխ է օրինակ (նկ. 9—1),

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{const.}$$

Համոզվելու համար քաղական է զիտարկել վեկտորական հատվածներով կազմված մի եռանկյունի. ինչպիսի զիրք էլ որ զրավի եռանկյունին, նրա կողմերի երկարությունները անփոփոխ են, հետևապես նաև անփոփոխ են կողմերով կազմված անկյունները:

Վերջնական զիրքին վերաբերող տառերն ու մեծությունները նշվելու են



Նկ. 9—1:

մի շարքիսով վերահից՝ A' , A'' , $\bar{a}'$, φ' և այլն: Սկզբնական դիրքին վերադարձնող առանցքն ա մեծաթիվունները կզրվեն առանց վերահի շարքիսի:

Ըստ սրբ պայմանի, վերևում ասվածը կզրվի ապալես՝

$$\bar{a}' = \bar{A}'\bar{A}''^*, \quad \bar{b}' = \bar{B}'\bar{B}''^*, \quad \text{արանքն}$$

$$a' = a,$$

$$b' = b, \quad (9, 1, 1)$$

$$\varphi' = \varphi.$$

որակ

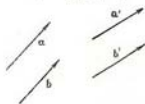
$$\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) \quad \varphi' = \angle(\bar{a}', \bar{b}')$$

(9, 1, 1)-ից հետևում է, որ

$$\bar{a}' \cdot \bar{b}' = \bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos \varphi \quad (9, 1, 2)$$

2^o. Նպատակահարմար է հիշել (9, 1, 1)-ի մի քանի սնմիչական հետևությունները.

[9—A] Կարծր մարմնի կամայական տեղափոխման դեպքում հավասար հատվածները մնում են հավասար, գուգահետ հատվածները՝ զուգահետ:



և 4. 9—2:

Ի՞րոք, (նկ. 9—2) զիցուք $\bar{a}$, $\bar{b}$ հատվածները իրար հավասար են՝

$$a = b, \quad a = b,$$

$$\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = 0.$$

Համաձայն (9, 1, 1)-ի $a' = b'$, $\varphi' = 0$,

արանքն $\bar{a}' = \bar{b}'$:

Եթե $\bar{a}$, $\bar{b}$ հատվածները զուգահետ են, միշտ կարելի է ախպես ընտրել սխալար և գործակցի թիվերն արժեքը, որ $\bar{b} = \lambda \bar{a}$

$$\lambda > 0, \text{ եթե } \bar{b} \parallel \bar{a}, \quad \lambda < 0, \text{ եթե } \bar{b} \nparallel \bar{a}:$$

Նույն ձևով $\bar{b}' = \lambda' \bar{a}'$, տեղադրելով $\bar{b}$ -ի և $\bar{b}'$ ախ արտահայտությունները (9, 1, 2)-ի մեջ ստանում ենք $\lambda = \lambda'$:

Արադիտով, եթե $\bar{b} = \lambda \bar{a}$, ապա

$$\bar{b}' = \lambda \bar{a}' \quad (9, 1, 3)$$

§ 9. 2. Կարծր մարմնի հասկացման փոփոխությունը

1°. Նկ. 9—3-ում պատկերված են հասկացման սկզբնական և վերջնական դիրքերը

$$\bar{a} = \overline{AA^*}, \quad \bar{a}' = \overline{A'A^{*}'}$$

և նրանց տարրերությունը

$$\overline{CA^{*'}} = x,$$

$$x = \bar{a}' - \bar{a}, \quad (\bar{a}' = \bar{a} + x) \quad (9, 2, 1)$$

տարրերությունը անփոփոխելի է հասկացման փոփոխությունը:

Նման ձևով կարծր մարմնի սկզբնական դիրքից վերջնականին անցնելիս $\bar{b}$ հասկացման փոփոխությունը՝

$$\bar{y} = \bar{b}' - \bar{b}, \quad (\bar{b}' = \bar{b} + \bar{y}) : \quad (9, 2, 1')$$

Հասկացման փոփոխության սահմանափակ հետևում է, որ այդ փոփոխությունը լիովին որոշվում է կարծր մարմնի սկզբնական և վերջնական դիրքերով և կախում չունի միջանկյալ դիրքերից:

2°. Ստորև թվարկված են հասկացման փոփոխության այն հատկությունները, որոնք հետագայում պետք են գալու:

[9—B] Կարծր մարմնի յուրաքանչյուր տեղափոխման դեպքում հավասար հատվածներն ունենա հավասար փոփոխություններ:

Իրոք, զիցուք $\bar{a} = \overline{AA^*}$ և $\bar{b} = \overline{BB^*}$ հատվածներն իրար համասար են

$$\bar{a} = \bar{b},$$

[9—A]-ի հիման վրա

$$\bar{a}' = \bar{b}'$$

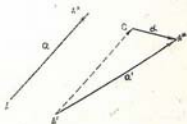
հետևապես

$$\bar{b}' - \bar{b} = \bar{a}' - \bar{a} \quad \bar{y} = \bar{x}$$

[9—C] փոփոխության չափը ուղիղ համեմատական է հասկացման չափին:

Դիցուք $\bar{b}$ և $\bar{a}$ -ն զուգահեռ հատվածներ են, և

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}$$



Նկ. 9—3.

Համաձայն (9, 1, 3)-ի

$$\bar{b}' = \lambda \bar{a}',$$

ուստի

$$\bar{b}' - \bar{b} = \lambda (\bar{a}' - \bar{a})$$

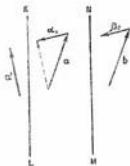
կամ

$$\beta = \lambda \bar{\alpha}.$$

(ախնճն, եթե $\bar{b} \parallel \bar{a}$ և $\bar{b}$ -ն չ. անգամ մեծ է $\bar{a}$ -ից ապա $\beta \parallel \alpha$ և β -ն λ անգամ մեծ է α -ից):

[9—D] Կարծի մարմնի պատումները միևեռյն անկյամբ տարբեր զուգահեռ առանցքների շուրջը առաջացնում են նույն հատվածի միևեռյն փոփոխությունը:

Առաջացնելու համար պատկերացնենք երկու զուգահեռ առանցքներ KL և NM (նկ. 9—4) և երկու համասար հատվածներ $\bar{a}$ և $\bar{b}$. Ընդ որում $\bar{b}$ -ն դասափոխած է NM -ի նկատմամբ ճիշտ աջակես, ինչպես $\bar{a}$ -ն KL -ի նկատմամբ:



Նկ. 9—4:

Դիցուք մարմնի պատմանը ϕ անկյունով KL -ի շուրջը համապատասխանում է $\bar{a}$ -ի α_1 փոփոխությունը, իսկ մարմնի պատմանը ϕ անկյունով NM առանցքի շուրջը թող համապատասխանեն $\bar{a}$ և $\bar{b}$ հատվածների α_2 և β_2 փոփոխությունները:

[9—B]-ի համաձայն $\alpha_2 = \beta_2$, բացի այդ, քանի որ $\bar{b}$ -ի դասափոխությունը NM -ի նկատմամբ նույնն է, ինչ $\bar{a}$ -ի դասափոխությունն KL -ի նկատմամբ.

$$\text{ապա } \alpha_1 = \beta_2:$$

Այսպիսով $\alpha_1 = \alpha_2$, այն, ինչ կամենում էինք ապացուցել:

[9—D]-ի խմատը այն է, որ պատմվող առաջացած փոփոխությունը կախում ունի առանցքի ուղղությունից, պատման անկյունից, և միանգամայն անկախ է առանցքի դիրքից մարմնի նկատմամբ:

3. Դիցուք $\bar{a}$ հատվածը հավասար է $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ հատվածների գումարին՝

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 \quad (9, 2, 2)$$

կամ ափսոսելի ընդհանուր

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3, \quad (9, 2, 2')$$

որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ -ը սկալար հաստատուն գործակիցներ են:

Ակներև է, որ (9, 2, 2)-ի դեպքում

$$\bar{a}' - \bar{a} = (\bar{a}'_1 - \bar{a}_1) + (\bar{a}'_2 - \bar{a}_2) + (\bar{a}'_3 - \bar{a}_3) \quad (9, 2, 3)$$

կամ

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3:$$

Նման ձևով (9, 2, 2') դեպքում կատանալինք

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3: \quad (9, 2, 3')$$

Վերջապես, ենթադրենք, որ բացի հատվածի սկզբնական և վերջնական $\bar{a}, \bar{a}'$ արժեքներից հայտնի են նաև միջանկյալ $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ արժեքները: Ընդ որում երկու հաջորդ արժեքներին համապատասխանում են հատվածի հետևյալ փոփոխությունները՝

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_1 - \bar{a}, \quad \bar{a}_1 = \bar{a}_2 - \bar{a}_1, \dots, \quad \bar{a}_n = \bar{a}' - \bar{a}_n,$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n &= (\bar{a}_1 - \bar{a}) + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) + \dots + \\ &+ (\bar{a}' - \bar{a}_n) = \bar{a}' - \bar{a} = \bar{a}: \end{aligned}$$

Այսպիսով $\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n$, այսինքն՝

[9—E] Արդյունաբար փոփոխությունը հավասար է միջանկյալ փոփոխությունների գումարին:

§ 9. 3. Փոփոխությունների վերաբերող հիմնական քերեմբ

1°. (9, 1, 2) առնչությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$\bar{a}' \cdot \bar{b}' - \bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

Հանելով և գումարելով $\bar{a}' \cdot \bar{b}$ արտադրյալը, գտնում ենք

$$(\bar{a}' \cdot \bar{b}' - \bar{a}' \cdot \bar{b}) + (\bar{a}' \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$$

կամ

$$\bar{a}' \cdot \bar{b}' + \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad (9, 3, 1)$$

Այն մասնավոր դեպքում, երբ $\bar{b} = \bar{a}$, (9, 3, 1) տալիս է՝

$$(\bar{a}' + \bar{a}) \cdot \bar{a} = 0, \quad (9, 3, 2)$$

ալսինքն հաստվածի փոփոխությունը ուղղահայաց է նրա սկզբնական և վերջնական արժեքներին գումարին:

(9, 3, 2)-ի հետևություններին մեկը այն է, որ հաստվածի վերջավոր փոփոխությունը չի կարող նրան ուղղահայաց լինել:

Բայց, ենթադրենք, որ $\bar{a} \perp \bar{a}$, հետևապես $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0$.

ալսեաղից՝ քանի որ ըստ (9, 2, 1)-ի $\bar{a}' = \bar{a} + \bar{a}$ ստանում ենք՝ եթե $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0$, ապա $\bar{a}^2 = 0$, $\bar{a} = 0$: (9, 3, 3)

(9, 3, 3) արդյունքը հասկանալի է. հաստվածին ուղղահայաց վերջավոր փոփոխությունը կերպարացնել հաստվածը, իսկ այս, ըստ կարծի մարմնի սահմանումի, անհնարին է:

2°. Դիտարկենք երեք հաստվածներ՝ $\bar{a}$, $\bar{b}$ և $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Նշանակենք $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ հաստվածներին փոփոխությունները $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$

Յուրք առնք, որ $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ փոփոխությունները կողմնադր վեկտորներ են:

Նախ, պարզ է, որ

$$\bar{\gamma} = \bar{c}' - \bar{c} = \bar{a}' \times \bar{b}' - \bar{a} \times \bar{b} \quad (9, 3, 4)$$

իսկ ինչպես հայտնի է

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ վեկտորներին կողմնադրություն պարմանն է

$$\bar{\gamma} \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) = 0: \quad (9, 3, 5)$$

(9, 3, 4) և (9, 3, 5) տալիս են

$$\bar{\gamma} \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) = (\bar{a}' \times \bar{b}' - \bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{\beta})$$

կամ, փոխելով $\times$ և $\cdot$ -ի տեղերը

$$\bar{\gamma} \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) = \bar{a}' \cdot [\bar{b}' \times (\bar{\alpha} \times \bar{\beta})] - \bar{a} \cdot [\bar{b} \times (\bar{\alpha} \times \bar{\beta})]$$

Բաց աճելով առ մասի կրկնակի վեկտորական արտադրյալները, ստանում ենք

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) &= \bar{a}' \cdot [\bar{\alpha} (\bar{b}' \cdot \bar{\gamma}) - \bar{\beta} (\bar{b}' \cdot \bar{\alpha})] - \bar{a} \cdot [\bar{\alpha} (\bar{b} \cdot \bar{\beta}) - \\ &- \bar{\beta} (\bar{b} \cdot \bar{\alpha})] = (\bar{a}' \cdot \bar{\alpha}) (\bar{b}' \cdot \bar{\beta}) - \bar{a}' \cdot \bar{\beta} (\bar{b}' \cdot \bar{\alpha}) - (\bar{a} \cdot \bar{\alpha}) (\bar{b} \cdot \bar{\beta}) + \\ &+ (\bar{a} \cdot \bar{\beta}) (\bar{b} \cdot \bar{\alpha}): \end{aligned} \quad (9, 3, 6)$$

(9, 3, 2)-ից հետևում է, որ

$$\bar{a}' \cdot \bar{\alpha} = -\bar{a} \cdot \bar{\alpha}, \quad \bar{b}' \cdot \bar{\beta} + \bar{b} \cdot \bar{\beta} = 0:$$

Այդ պատճառով (9, 3, 6)-ի առաջին և երրորդ անդամները ապիտ են

$$\bar{a}' \cdot \bar{x} (\bar{b}' \cdot \bar{z} + \bar{b} \cdot \bar{z}) = 0;$$

(9, 3, 1) հիման վրա

$$\bar{a}' \cdot \bar{z} = -\bar{b} \cdot \bar{x}, \quad \bar{b}' \cdot \bar{x} = -\bar{a} \cdot \bar{z},$$

որի շնորհիվ (9, 3, 6)-ի երկրորդ և չորրորդ անդամների գումարը նույնպես զրո է: Այսպիսով՝

$$\bar{\gamma} \cdot (\bar{x} \times \bar{z}) = 0, \quad (9, 3, 7)$$

այսինքն՝ $\bar{\gamma}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$ վեկտորները կոպլանար են:

3^o. Ելնելով նշված կոպլանարությունից, կարելի է ապացուցել հետևյալ շատ կարևոր թեորեմը.

[9—F] Ինչպիսիք է, լինեն կարծր մարմնի սկզբնական և վերջնական դիրքերը, այդ մարմնի

ա) որոշ հատվածների փոփոխությունները հավասար են զրոյի

բ) իսկ մյուս բոլոր հատվածների փոփոխությունները կոպլանար են:

Սկսենք Գ-ի ապացույցից: Ենթադրենք, $\bar{a}$, $\bar{b}$ հատվածները իրար զուգահեռ չեն, նրանցով կազմենք երրորդ հատվածը՝ $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ և դիտարկենք $\bar{c}$ հատվածը՝

$$\bar{c} = p\bar{a} + q\bar{b} + r\bar{c}, \quad (9, 3, 8)$$

որտեղ p , q , r -ը հաստատուն սկալար գործակիցներ են:

Նշանակելով $\bar{c}$ -ի փոփոխությունը $\bar{z}$, իսկ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ հատվածների փոփոխությունները՝ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\gamma}$, կարող ենք (9, 2, 2') և (9, 2, 3')-ի հիման վրա գրել

$$\bar{z} = p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{\gamma}, \quad (9, 3, 8')$$

ընդ որում, ըստ (9, 3, 7)-ի $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\gamma}$, վեկտորները կոպլանար են: Այդ պատճառով $\bar{z}$ -ը նույնպես պետք է կամ լինի $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\gamma}$ -ին կոպլանար, կամ մասնավոր դեպքում՝ լինի զրո:

p , q , r գործակիցներին տալով տարբեր արժեքներ, մենք կարող ենք (9, 3, 8), (9, 3, 8')-ի միջոցով արտահայտել կարծր

մարմնի լուրացանչյուր հատվածը, նրա փոփոխությունը և կոես-
նենք, որ զրոյից տարբերվող բոլոր փոփոխությունները կոպլա-
նար են:

Դժվար չէ ցույց տալ, որ բոլոր չփոփոխված հատվածները
(այսինքն այն հատվածները, որոնց համար $\bar{z} = 0$) զուգահեռ են
կոպլանար փոփոխությունների ընդհանուր ուղղահայացին:

Իսկապես, $\alpha \times \bar{\beta}$ վեկտորական արտադրյալը ուղղահայաց է
բոլոր $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}, \dots)$ փոփոխություններին: Դիտարկենք $(\alpha \times \bar{\beta})$ -ին
զուգահեռ $\bar{f}$ հատվածը, և թող նրա փոփոխությունը լինի
 $\bar{\varphi}$: Եթե $\bar{\varphi}$ -ն տարբերվել զրոյից, այն, ինչպես և զրոյից տարբեր-
վող բոլոր փոփոխությունները պետք է լինել ուղղահայաց $(\alpha \times \bar{\beta})$ -ին
և մենք կունենալինք $\bar{f} \cdot \bar{\varphi} = 0$. Իսկ ըստ $(\vartheta, \beta, \beta)$ այդ
հնարավոր է միայն եթե $\bar{\varphi} = 0$:

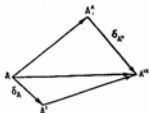
Այսպիսով ապացուցվեց և $[\vartheta - F]$ -ի ա կետը:

§ 9. 2. Փոփոխությունները և տեղափոխությունները

1°. Օգտվելով հատվածների փոփոխությունների հատկու-
թյուններից կարծր մարմնի կլինեմատիկայում արտածում են վեր-
ջավոր տեղափոխություններին վերաբերող թեորեմները:

Կապը հատվածի փոփոխության և նրա ծայրերի տեղափո-
խությունների միջև շատ պարզ է.

Դիցաք կարծր մարմնի A ու A'^* կետերը գրավեցին համա-
պատասխանաբար A' , A'^* գիւրքերը (նկ. 9-5): Այդ կետերի $\bar{\delta}_A$,
 $\bar{\delta}_{A'}$ տեղափոխությունները համասար են՝



Նկ. 9-5:

$$\bar{\delta}_A = \overline{AA''}, \quad \bar{\delta}_{A''} = \overline{A''A''*},$$

իսկ $\bar{a} = \overline{AA''}$ հատվածի փոփոխու-
թյունը՝

$$\bar{a} = \bar{a}' - \bar{a}''$$

Նկ. 9-5-ից պարզ է, որ

$$\overline{AA'^*} = \overline{AA'} + \overline{A'A'^*} = \overline{AA''} + \overline{A''A'^*}$$

կամ

$$\bar{\delta}_A + \bar{a}' = \bar{a} + \bar{\delta}_{A'},$$

այսինքն՝

$$\bar{\delta}_{A^*} = \bar{\delta}_A + \bar{a} \quad (\bar{a} = \bar{a}' - \bar{a}), \quad (9, 4, 1)$$

նույնը կարելի է գրել կարծր մարմնի B , B^* կետերի վերաբերյալ՝

$$\bar{\delta}_{B^*} = \bar{\delta}_B + \bar{\beta} \quad (\bar{\beta} = \bar{\beta}' - \bar{\beta}) \quad (9, 4, 1')$$

Մասնավոր դեպքում, երբ A կետը անշարժ է, կամ նրա հետագիծը փակ կոր է (և այդ պատճառով տեղափոխումը հավասար է զրոյին) այսինքն՝ $\bar{\delta}_A = 0$, ապա (9, 4, 1)-ը վեր է ածվում

$$\bar{\delta}_{A^*} = \bar{a} \quad (9, 4, 2)$$

ստանդարտում: Այսինքն եթե հատվածի (A) սկզբի վերջնական ու սկզբնական դիրքերը համընկնում են, ապա (A^*) վերջի տեղափոխումը հավասար է հատվածի փոփոխությանը:

2^o. Դիտարկենք ընդհանուր O սկիզբ ունեցող $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ... հատվածները

$$\overline{OA} = \bar{a}, \quad \overline{OB} = \bar{b}, \dots$$

Ըստ (9, 4, 1) և (9, 4, 1')-ի

$$\bar{\delta}_A = \bar{\delta}_O + \bar{a}, \quad \bar{\delta}_B = \bar{\delta}_O + \bar{\beta} \quad (9, 4, 3)$$

Ինչպես ապացուցված է [9—F] թեորեմում կարծր մարմնի յուրաքանչյուր տեղափոխման դեպքում կան չփոփոխված հատվածներ. այդ հատվածները ուղղահայաց են $\bar{a}$, $\bar{\beta}$ փոփոխությաններին:

Դիցուք $\hat{f}$ միավոր վեկտորը զուգահեռ է չփոփոխված վեկտորներին:

Այժմ $\hat{f} \perp \bar{a}$, $\hat{f} \perp \bar{\beta}$, ..., այսինքն $\hat{f} \cdot \bar{a} = 0$, $\hat{f} \cdot \bar{\beta} = 0$ և այդ պատճառով (9, 4, 3) կգրվի այսպես.

$$\bar{\delta}_A \cdot \hat{f} = \bar{\delta}_O \cdot \hat{f}, \quad \bar{\delta}_B \cdot \hat{f} = \bar{\delta}_O \cdot \hat{f} \text{ և այլն:}$$

Այսպիսով՝

$$\hat{f}(\bar{\delta}_A \cdot \hat{f}) = \hat{f}(\bar{\delta}_B \cdot \hat{f}) = \dots = \hat{f}(\bar{\delta}_O \cdot \hat{f}). \quad (9, 4, 4)$$

(9, 4, 4)-ը նշանակում է, որ տեղափոխման այն բաղադրիչը, որը

դուգաձևն է չփափոխված հաստվածներին, նույնն է կարծր մարմնի բոլոր կետերի համար:

3. Ինչպես դիտենք, կետի միեռաջն անդամախուսը կարող է առաջիկ նրա տարրեր հետադնդրով շարժվելիս: Այսպես, C գիրքից կետը կարող է հասնել C' -ը ուղղադիր՝ CC' հետադնդրով և կորագիծ CDC' , CEC' հետադնդրով (նկ. 9—6):



Նկ. 9—6:

Վերջինիս նման՝ կարծր մարմնն էլ կարելի է մի գիրքից անդամախուս միուսը բացմամբիվ կդառանալնդով:

Հաջորդող 9, 5—9, 8 պարագրաֆներում ցույց է տրված, որ մարմնի լուրս քանչևլուր անդամախուսը կարելի է իրականացնել կամ պարզ շարժումներից մեկով (համընթաց շարժում, պտտում անշարժ ստանդքի շուրջ), կամ նրանց դուգորդմամբ:

Համառոտաթխան համար պայմանավորվենք անվանել համարմեք՝ կարծր մարմնի ախ տարրեր շարժումները, որոնք առաջացնում են նրա միեռաջն անդամախուսները:

§ 9, 5. Համընթաց շարժում

1°. Համընթաց կոչվում է կարծր մարմնի ախ շարժումը (աես § 5, 1), որում բոլոր կետերի անդամախուսները նույնն են (այս է պատանոր, որ ամբողջ շարժումը բնութագրվում է մի կետի շարժումով):

Այսպիսով (9, 4, 3)-ում պետք է ընդունել

$$\vec{\xi}_C = \vec{\xi}_A = \vec{\xi}_B = \dots \quad (9, 5, 1)$$

և հասացվի, որ

$$\vec{x} = \vec{\xi} = \dots = 0. \quad (9, 5, 2)$$

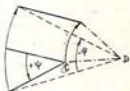
ախմեքն՝

[9—G] Համընթաց շարժումը չի առաջացնում կարծր մարմնի որևէ հատվածի փոփոխություն:

Ճիշտ է եսե հակառակը, որովհետև ընդունելով (9, 5, 2)-ը ստանում ենք (9, 4, 3)-ից (9, 5, 1):

[9—G'] Նրե կարծր մարմնի բոլոր հատվածները մեում են անփոփոխ, բոլոր կետերի անդամախուսները իրար հավասար են, շարժումը համընթաց է:

2°. Ենթադրենք, որ մարմինը նախ պտտվում է ψ անկյունով KL առանցքի շուրջը և ապա ($-\psi$) անկյունով KL -ին զուգահեռ NM առանցքի շուրջը (նկ. 9—7ա, որտեղ C -ն KL առանցքի հետքն է, իսկ D -ն NM -ինը):



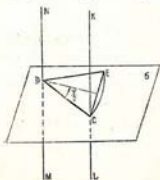
Նկ. 9—7ա:

Ապացուցենք, որ այդպիսի երկու պատումներից հետո կարծր մարմնի յուրաքանչյուր հատվածի փոփոխությունը հավասար է զրոյի, և իսկապես, համաձայն $[9-D]$ -ի պատումից առաջացած փոփոխությունը կախում չունի պտտման առանցքի դիրքից: Ուստի, որպեսզի որոշենք հատվածի փոփոխությունը, որ առաջացել է երկու պատումից, կարելի է պատկերացնել, որ $(+\psi)$ և $(-\psi)$ անկյուններով պատումները կատարվում են առանցքներից մեկի շուրջը, որինակ, NM առանցքի շուրջը:

Բայց տկներն է, որ այդ դեպքում յուրաքանչյուր հատվածի փոփոխությունը զրո է և, համաձայն $[9-G']$ -ի, կարող է իրականացվել համընթաց շարժման միջոցով:

Տեղափոխումը որոշելու համար օգտվենք այն հանգամանքից, որ համընթաց շարժման դեպքում բոլոր կետերի տեղափոխումները նույնն են:

Դիցուք պտտման առանցքներին ուղղահայաց π հարթությունը հատում է KL առանցքը C կետում, իսկ NM առանցքը՝ D կետում, (նկ. 9—7բ): Երբ պտտումը ($-\psi$) անկյունով կատարվում է KL առանցքի շուրջը, C -ն



Նկ. 9—7բ:

մնում է անշարժ, իսկ NM առանցքի շուրջ պտտումը $(+\psi)$ անկյունով առաջացնում է C -ի $\delta_C = CE$ տեղափոխումը, որի շափք

$$\delta_C = CE = 2DC \sin \frac{\psi}{2}, \quad (9, 5, 3)$$

ընդ որում DC -ն KL -ի հեռավորությունն է NM -ից:

Ստացված արդյունքը իրենից ներկայացնում է հետևյալ թեորեմը.

$[9-H]$ Երկու պատումները ($-\psi$) անկյունով մի առանցքի շուրջը և $(+\psi)$ անկյունով առաջինին զուգահեռ առանցքի շուրջը

համարժեք են համընթաց շարժման. նրանցից առաջացած տեղափոխումը հավասար է առաջին առանցքի կամայական կետի տեղափոխմանը, երբ այն պտտվում է երկրորդ առանցքի շուրջը (+ ϕ) անկյունով:

Նկարից և (9, 5, 3)-ից պարզ է, որ երբ $\overline{DC}$ -ն և ϕ անկյունը տրված են, $\overline{DC}$ -ն հեշտ որոշվում է: Իսկ տվյալ $\overline{DC}$ -ի գնալույժ միշտ հնարավոր է լուրջառնչելու $\overline{DC}$ -ի (ϕ) համար ընտրել այնպիսի ϕ ($\overline{DC}$), որ ստացվի նույն ($\overline{DC}$) տեղափոխումը:

Ուշագրավ է որ KL և NM առանցքների դիրքերն առանձին վերցրած, չեն ազդում վերջնական տեղափոխման վրա, կարևոր է միայն նրանց հեռավորությունը: Օրինակ՝ պտտումները ($-\phi$) և (+ ϕ) անկյուններով KL և NM -ի շուրջը կառաջացնեն ճիշտ այն տեղափոխումը, ինչ որ նույն պտտումները $K'L'$ և $N'M'$ առանցքների շուրջը, եթե $D'C' = \overline{DC}$:

[9 - H] Խեղճը կարող է ընդհանրացվել հետևյալ կերպ.

[9 - H] Մի քանի զուգահեռ (KL , $K'L'$, $K''L'' \dots$) առանցքների շուրջ կատարվող պտտումների հաջորդականությամբ համարժեք է համընթաց շարժման, եթե պտտման անկյունների գումարը հավասար է զրոյի (կամ $2\pi n$, որտեղ n -ը ամբողջ թիվ է):

3'. Պատկերացնենք հաջորդաբար իրագործված երեք պտտումներ՝

1. (+ ϕ) անկյունով KL առանցքի շուրջը

2. ($-\phi$) անկյունով KL -ին զուգահեռ կամայական NM առանցքի շուրջը

3. (+ ϕ) անկյունով NM առանցքի շուրջը:

Ակնհերձ է, որ երկու վերջին պտտումները միասին համարժեք են զրոյի, այսինքն նրանցից հետո կարծր մարմինը կգտնվի այն դիրքում, ինչ որ առաջին պտտումից հետո:

Սակայն նշված երեք պտտումները կարելի է խմբավորել նաև այսպես՝ առաջին երկու պտտումները և ապա երրորդ պտտումը:

Համաձայն [9 - H] թեորեմի առաջին երկու պտտումները համարժեք են համընթաց շարժման:

Այսպիսով հանգում ենք հետևյալ արդյունքին:

[9 - I] Կարծր մարմնի պտտումը կամայական առանցքի շուրջը համարժեք է երկու շարժումների հաջորդականությամբ՝ պտտման առանցքին ուղղահայաց համընթաց շարժման և

պատման նույն անկյունով առաջին առանցքին զուգահեռ կամայական առանցքի շուրջը:

(9, 5, 3) ցույց է տալիս, թե համընթաց շարժումից առաջացած տեղափոխման չափը ինչպես է կախված առանցքների հեռավորությունից և պտտման անկյունից:

§ 9. 6. Անշարժ կեռ ունեցող մարմնի շարժումը

1°. Այս և հաջորդ պարագրաֆներում դիտարկվում է անշարժ կեռ ունեցող կարծր մարմնի շարժումը:

Նախ հարկավոր է պարզաբանել «անշարժ կեռ» արտահայտության իմաստը: Այդ կարելի է հասկանալ տառացիորեն կամ, երբ մարմնի շարժումն այնպիսին է, որ նրա կետերից մեկը վերագրանում է իր նախկին դիրքը, ապա անշարժ է համարվում այդ իսկ կետը: Այսպիսով, անշարժ համարվում է նաև այն կետը, որի վերջավոր շարժմանը համապատասխանում է զրո տեղափոխում:

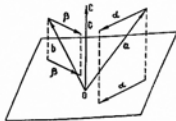
[9—'] Անշարժ կեռ ունեցող կարծր մարմնի յուրաքանչյուր տեղափոխումը կարելի է իրականացնել պտտելով մարմինը անշարժ կետով անցնող առանցքի շուրջը:

Այլ կերպ

[9—'] Անշարժ կեռ ունեցող կարծր մարմնի յուրաքանչյուր շարժումը համարվում է պտտման անշարժ կետով անցնող առանցքի շուրջը:

Ապացույց: Համաձայն [9—F]-ի կարծր մարմնի ցանկացած շարժման դեպքում կան չփոփոխված հատվածներ, որոնք իրար զուգահեռ են և ուղղահայաց են մյուս հատվածների փոփոխություններին:

Հետևապես (նկ. 9—8) անվանելով $\vec{a}$ և $\vec{\beta}$ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ հատվածների փոփոխությունները, տեսնում ենք, որ $(\vec{a} \wedge \vec{\beta})$ -ին զուգահեռ $\vec{c} = \vec{OC}$ հատվածը, որ անցնում է անշարժ O կետով, պետք է լինի չփոփոխված: Քանի որ O կետը անշարժ է, OC հատվածը հանդիսանում է անշարժ (և ոչ թե միայն չփոփոխված): Այսպիսով, անշարժ կեռ ունեցող կարծր մարմինը պետք է ունենա և անշարժ հատված, իսկ անշարժ



Նկ. 9—8.

համաժամի ասկալության դեպքում շարժումը հանդիսանում է պատում:

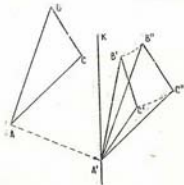
[$\mathcal{D}-J'$] Թևորեմը ապացուցված է: Շեշտենք, որ պատման առանցքը ուղղահայաց է բոլոր համաժամների փոփոխություններին. կամ (ինչ որ նույնն է) զուգահեռ է երկու ոչ զուգահեռ փոփոխությունների վեկտորական արտադրյալին:

§ 9. 7. Կարծր մարմնի ընդհանուր շարժումը

1°. Անշարժ կետ չունեցող կարծր մարմնի դեպքում, ընդհանուր հանդիսանում է հետևյալ թևորեմը.

[$\mathcal{D}-K$] Կարծր մարմնի ցանկացած շարժումը կարելի է իրականացնել մեկը մյուսին հաջորդող համընթաց և պատողական շարժումների միջոցով:

Ապացույց. Ենթադրենք, որ կարծր մարմնի կետք՝ մի ուղղի վրա չգտնվող կետերը սկզբում գրավում են A, B, C դիրքերը, իսկ վերջում A', B', C' դիրքերը (նկ. 9—9):



Նկ. 9—9.

Կարելի է կարծր մարմինը սկզբնական դիրքից բերել վերջնական դիրքին երկու նվազ՝ նախ, հաղորդելով մարմնին ափսոսի համընթաց շարժում, որ A կետը գրավի A' դիրքը: Այդ շարժման հետևանքով B և C կետերը կգրավեն B'', C'' դիրքերը, ընդ որում $\overline{BB''} = \overline{CC''} = \overline{AA'}$: Ընդհանուր առմամբ B'' և C'' չեն համընկնում B' և C' -ի հետ: Հաժառակելու համար B'' -ը B' -ի հետ, իսկ C'' -ը C' -ի հետ առաջացնենք պատողական շարժում ափսոսանքի շարժքը, որ անցնում է A' կետով և զուգահեռ է $(\overline{B''B'} \times \overline{C''C'})$ արտադրյալին: Պատողական շարժման վերջում B'' -ը կհամընկնի B' -ի հետ, իսկ

C'' -ը C' -ի հետ:

Այսպիսով կարծր մարմինը սկզբնական (A, B, C) դիրքից կանցնի վերջնական (A', B', C') դիրքը:

Հարկավոր է նկատի առնել, որ համընթաց շարժումը կարելի է ընտրել այնպես, որ համընթանի B -ն B' -ի, կամ C -ն C' -ի հետ (այլ ոչ թե A -ն A' -ի հետ)։ Դժվար չէ համոզվել, որ հետագա պատողական շարժման առանցքի ուղղությունը և պտտման անկյունը լիովին անկախ են համընթաց շարժման ընտրությունից։

Իսկապես A , B , C և A' , B' , C' կետերի դիրքերով որոշվում են $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների փոփոխությունները՝ $\overline{A'B'} - \overline{AB}$, $\overline{B'C'} - \overline{BC}$ ։ Փանի որ համընթաց շարժման ղեկավար հատվածները մնում են անփոփոխ, $\overline{A'B'} - \overline{AB}$, $\overline{B'C'} - \overline{BC}$ փոփոխությունները կարող են միայն առաջանալ պատողական շարժումից։ Համաձայն $[9-D]$ -ի այդ փոփոխությունները լիովին որոշվում են պտտման առանցքի ուղղությամբ և պտտման անկյունով։

§ 9. Տ. Մասնավոր դեպքեր

I°. $[9-K]$ թևերումը ընդգրկում է բոլոր հնարավոր ղեկավարներ։ Մասնավոր դեպքերում համարժեք շարժումը լինում է կամ համընթաց, կամ պատողական (օրինակ, § 9, 3, 2°-ի շարժումը, կամ անշարժ կետ ունեցող կարծր մարմնի շարժումը)։

Անցնենք մի քանի այլ մասնավոր դեպքերի քննարկմանը։

2°. Հարթությունը զուգահեռ շարժում։

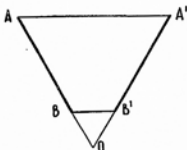
Այս դեպքում բոլոր կետերի տեղափոխումները կոպլանառ են և այդ պատճառով $[9-K]$ թևերումում համընթաց շարժումից առաջացած $\overline{T}$ տեղափոխումը ուղղահայաց է պտտման առանցքին։ Անվանենք այդ առանցքը KL , չույց տանք, որ հարթությունը զուգահեռ շարժումը համարժեք է պտտման KL -ին զուգահեռ մի NM առանցքի շուրջը և որոշենք NM առանցքի դիրքը։

Հիմնվելով $[9-I]$ -ի վրա, կարող ենք պատումը ψ անկյունով KL -ի շուրջը փոխարինել պտտումով նույն ψ անկյունով NM առանցքի շուրջը և համընթաց շարժումով, որից առաջացած տեղափոխումը հավասար է $\overline{T}$ ։

Այսպիսով, շարժումը, որը համարժեք է պտտմանը KL առանցքի շուրջը և $\overline{T}$ տեղափոխում առաջացնող համընթաց շարժմանը նույն համարժեք է պտտմանը NM առանցքի շուրջը և այնպիսի համընթաց շարժման, որի տեղափոխումն $T + \overline{T}$ ։ Փանի որ շարժումը զուգահեռ է հարթությանը, բոլոր տեղափոխումները ուղղահայաց են KL և NM -ին, իսկ կարելի է NM առանցքի

դիրքը ընտրել այնպես, որ $\vec{T}'$ ու $\vec{T}$ տեղափոխումները լինեն հակա-
զուգահեռ և ըստ չափի հավասար: Այդ դեպքում $\vec{T}' + \vec{T} = 0$ և
մնում է միայն պատումը $N.M$ առանցքի շուրջը: Այդ իսկ պատու-
մը համարվել է տրված հարթութվանը զուգահեռ շարժման:

3°. Հարթ պատկերի շարժումը իր հարթութվան մեջ ($P|Q$
շարժումը, տե՛ս § 6, 1) հանդիսանում է կարծր մարմնի հարթ
շարժման մասնավոր դեպքը: Հետևապես նոր ստացած արդյունքը
կիրառելի է և $P|Q$ շարժմանը. այս դեպքում պատման առանցքը
ուղղահայաց է պատկերին, իսկ պատման առանցքի և պատկերի
հատման կետը՝ գտնվում է հասարակ կառուցումով (նկ. 9—10ա,
բ, գ տե՛ս բացատրությունը 426—427 էջերում):



Նկ. 9—10ա:

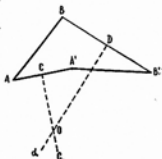
4°. Պտտողական շարժում-
ների երկու զուգահեռ առանցք-
ների շուրջը:

Այս շարժումը նույնպես
հանդիսանում է հարթութվանը
զուգահեռ շարժման մասնավոր
դեպքը և այդ պատճառով համար-
վել է պատմանը մի առանցքի
շուրջը:

[9—L] Մեկը մյուսին հա-
ջորդող պատումները՝ φ անկյունով KL առանցքի շուրջը և ψ ան-
կյունով KL -ին զուգահեռ $N.M$ առանցքի շուրջը համարվել են
պատմանը $\varphi + \psi$ անկյունով մի (IH)
առանցքի շուրջը, որը զուգահեռ է
տված (KL, NM) առանցքներին: IH
առանցքի դիրքը կախված է պտա-
ղական շարժումների հաջորդականու-
թյունից:



Նկ. 9—10բ:



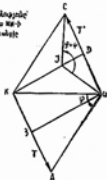
Նկ. 9—10գ:

Ապացույցը նման է 2°-ի ապացույցին:

Հինգվելով [9—1]-ի վրա՝ փ անկյունով պատումը KL -ի շուրջը փոխարինենք նույն անկյունով NM առանցքի շուրջը պտտումով և T տեղափոխում առաջացնող համընթաց շարժումով (նկ. 9—11):

Այսպիսով, ստանում ենք պտտում $\varphi + \psi$ անկյունով NM առանցքի շուրջը և T տեղափոխում առաջացնող համընթաց շարժում: Եթե ընտրենք պտտման նոր (IH) առանցք պետք է ավելացնենք նոր համընթաց շարժում, որը զիջուք առաջացնում է T' տեղափոխում: IH առանցքի զիրքը կարելի է ալնպես ընտրել, որ $T + T' = 0$: Այսպիսով, շարժումը կվերածվի մի պտտման IH առանցքի շուրջը $\varphi + \psi$ անկյունով:

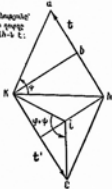
Պտմանի հաջորդականությունը
եթե KL -ի շուրջը և ապա NM -ի
շուրջը, ապա շարժումը տեղի է
ունենում:



Նկ. 9—11:

Հետաքրքիր է համեմատել § 7, 9-ի հետ. այնտեղ զգուսարվում ենք արագությունները և արդյունաբար առանցքը գտնվում է աված երկու առանցքները պարունակող հարթության վրա: Իսկ այստեղ IH -ը չի գտնվում KL և NM առանցքներով անցնող հարթության վրա:

Պտմանի հաջորդականությունը
եթե NM -ի և ապա KL -ի շուրջը
ապա շարժումը տեղի է
ունենում:



Նկ. 9—12:

Նկ. 9—12-ում ցույց է տրվում աված գիպը, երբ պտտումների հաջորդականությունը փոխված է. սկզբում կատարվում է պտտումը NM առանցքի շուրջը և ապա KL -ի շուրջը: Արդյունաբար առանցքը այստեղ նշանակված է ih : IH և ih առանցքները սիմետրիկ են դասավորված $KLNMN$ հարթության նկատմամբ:

ՎԵՐԱՎՈՐ ՊՏՄԱՆՆԵՐԻ ԱՆԱԼԻԶԻ ԴԻՏԱՐԿՈՒՄԸ

§ 9. 9. Մոնոկլոնոմ համակարգի, մեռ փոփոխության և պատման վեկտորի միջև

1°. Վտտման վեկտորը գաղափարը շատ օգտակար է լինում, երբ անալիտիկորեն դիտարկվում են վերջավոր տեղափոխումների

(և հատկապես վերջավոր պատումներին) վերաբերող զանազան հարցեր:

Այս հատկացումները կարելի է հանդիմ հետևելու կերպ.
(9, 3, 2)-ից ունենք

$$(\bar{a}' + \bar{a}) \cdot \bar{x} = 0,$$

այսինքն

$$(\bar{a}' + \bar{a}) \perp x;$$

Մյուս կողմից, նշանակելով $\bar{f}$ -ով չփոփոխված հատվածներին զուգահեռ միավոր-վեկտորը, տեսնում ենք, որ § 9, 3, 3^o-ի հիման վրա

$$\bar{f} \perp \bar{x}, \quad (9, 9, 1)$$

վեկտորական տրտադրության հատկություններից հետևում է, որ

$$\bar{x} \parallel \bar{f} \times (\bar{a}' + \bar{a});$$

Առաջի միշտ կարելի է աշտրև քնարել սկալար λ գործակիցը, որ բավարարվի

$$\bar{x} = \lambda \bar{f} \times (\bar{a}' + \bar{a}) \quad (9, 9, 2)$$

պայմանը:

(9, 9, 2)-ին բավարարող

$$\bar{f} = \lambda \bar{f} \quad (9, 9, 3)$$

վեկտորը կոչվում է պատման վեկտոր:

Այս վեկտորի կապը առաջարկ առանցքի շուրջը կատարվող պտտման առկայան հետ, կարտածվի քիչ ներքև (§ 9, 9, 3^o):

Այսպիսով

$$\bar{x} = \bar{f} \times (\bar{a}' + \bar{a}) \quad (9, 9, 4)$$

կամ, որովհետև

$$\bar{a}' = \bar{a} + \bar{x}$$

(տե՛ս 9, 2, 1),

$$\bar{x} = \bar{f} \times (2\bar{a} + \bar{x}), \quad (9, 9, 5)$$

2^o. (9, 9, 5) առնչությունը նպատակահարմար է: $\bar{x}$ -ն որոշելու համար, որովհետև (9, 9, 5)-ի աջ մասում պարունակվում է

$\vec{f} \times \vec{a}$ արտադրվում: Սակայն այդ արտադրվումը հնարավոր է արտաքսել:

Իսկապես, բազմապատկենք $\vec{f}$ -ը վեկտորապես (9, 9, 5)-ի երկու մասերով՝

$$\vec{f} \times \vec{a} = 2\vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}) + \vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}) \quad (9, 9, 6)$$

(9, 9, 1)-ը տալիս է

$$\vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}) = -\vec{a}f^2$$

և (9, 9, 6)-ը՝ վեր է ավելում

$$\vec{f} \times \vec{a} = 2\vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}) - \vec{a}f^2 \quad (9, 9, 7)$$

առնչությունը, իսկ (9, 9, 7) և (9, 9, 5) տալիս են

$$\vec{a} = \frac{2(\vec{f} \times \vec{a}) + 2\vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a})}{1 + f^2} \quad (9, 9, 8)$$

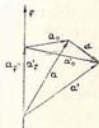
Վերջապես պետք է նկատի առնել (նկ. 9—13), որ $\vec{a}$ համալսվածը կարելի է վերլուծել երկու բաղադրիչի՝

$$\vec{a} = \vec{a}_f + \vec{a}_0, \quad \vec{a}_f \parallel \vec{f} \text{ և } \vec{a}_0 \perp \vec{f}.$$

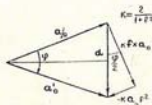
արևմտ

$$\begin{aligned} \vec{f} \times \vec{a} &= \vec{f} \times \vec{a}_0, & \vec{a}_f \times \vec{f} &= 0, \\ \vec{a}_0 \cdot \vec{f} &= 0. \end{aligned} \quad (9, 9, 9)$$

Այսպիսով, համաձայն (9, 9, 9)-ի, (9, 9, 8)-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը



Նկ. 9—13:



Նկ. 9—14:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{2}{1 + f^2} [\vec{f} \times \vec{a}_0 + \vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}_0)] = \\ &= \frac{2}{1 + f^2} (\vec{f} \times \vec{a}_0 - \vec{a}_0 f^2), \end{aligned} \quad (9, 9, 10)$$

9—14 նկարում զմայրի հարթությունը ուղղահայաց է $\vec{f}$ -ին. $\vec{a}$ -ն բաղկացած է երկու գումարելիներից՝

$$\frac{2}{1 + f^2} (\vec{f} \times \vec{a}_0) \text{ և } -\frac{2}{1 + f^2} \vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}_0) = -\frac{2f^2}{1 + f^2} \vec{a}_0.$$

առաջին դումարելին պատված է $\frac{\pi}{2}$ անկյունով a_0 -ի նկատմամբ.

իսկ երկրորդ դումարելին հակադրադահեռ է $\bar{a}_0$ -ին:

(9, 9, 8) և (9, 9, 10)-ով որոշվում է $\bar{a}$ հատվածի $\bar{a}$ փոփոխությունը, երբ հայտնի է պատման f վեկտորը:

3. Այժմ ցույց տանք, որ $\bar{f}$ -ի հսկիը հավասար է պատման անկյան կեսի տանգենսին, այսինքն

$$f = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

Իբրեք, քանի որ

$$\begin{aligned} & (f \times a_0) \perp f \\ & |f \times (\bar{f} \times \bar{a}_0)| = f |f \times \bar{a}_0| \\ & f = \frac{|\bar{f} \times (\bar{f} \times \bar{a}_0)|}{|f \times \bar{a}_0|} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (9, 9, 11)$$

տե՛ս նկ. 9-14:

Ինչպես արդեն տեսանք, f վեկտորը զուգահեռ է կարծր մարմնի չփոփոխված հատվածներին, այսինքն՝ եթե $\bar{a}$, $\bar{\beta}$ վեկտորները հանդիսանում են $\bar{a}$, $\bar{\beta}$ հատվածների փոփոխությունները

$$\bar{f} \parallel (\bar{a} \times \bar{\beta})$$

կամ

$$\bar{f} = \lambda (\bar{a} \times \bar{\beta}), \quad (9, 9, 12)$$

որտեղ λ -ն համապատասխանորեն ընտրված սկալար գործակից է: Տեղագրելով $\bar{f}$ -ի այդ արտահայտությունը (9, 9, 5)-ի մեջ, ունենք

$$\bar{a} = \lambda (\bar{a} \times \bar{\beta}) \times (2\bar{a} + \bar{a}) = \lambda (2\bar{a} + \bar{a}) \times (\bar{\beta} \times \bar{a})$$

կամ, բաց անելով վերջին կրկնակի վեկտորական արտադրվալը, կստանանք

$$\bar{a} = \lambda \bar{\beta} [(\bar{a} \times \bar{a}) \cdot \bar{a}] - \lambda \bar{a} [(2\bar{a} + \bar{a}) \cdot \bar{\beta}],$$

Այստեղ բոլոր (9, 2, 1)

$$(2\bar{a} + \bar{a}) = \bar{a}' + \bar{a}$$

և համաձայն (9, 3, 2)-ի

$$(2\bar{a} + \bar{\alpha}) \cdot \bar{\alpha} = 0.$$

առաջի

$$\bar{\alpha} = \lambda \bar{\alpha} [(2\bar{a} + \bar{\alpha}) \cdot \bar{\beta}],$$

այսինքն

$$\lambda = -\frac{1}{(2\bar{a} + \bar{\alpha}) \cdot \bar{\beta}}$$

և (9, 9, 12)-ի հիման վրա

$$\bar{f} = -\frac{\bar{\alpha} \times \bar{\beta}}{(2\bar{a} + \bar{\alpha}) \cdot \bar{\beta}} \quad (9, 9, 13)$$

Համեմատենք (9, 9, 13)-ը (5, 3, 3)-ի հետ, որով որոշվում է պտտման անկյունային արագությունը. եթե $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ փոփոխությունները լինեն անսահման փոքր, ապա $\bar{f}$ -ը նույնպես անսահման փոքր է և բացի այդ (9, 9, 13)-ի հալտարարում կարելի է արհամարհել $\bar{\alpha}$ -ն: Այսպիսով, բաժանելով (9, 9, 13)-ի երկու մասերը Δt -ի և անցնելով սահմանի կատանանք

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\bar{f}}}{\Delta t} = -\frac{\bar{v}_A \times \bar{v}_B}{2\bar{a} \cdot \bar{v}_B}$$

այսինքն

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{f}}{\Delta t} = \frac{\bar{\omega}}{2} :$$

4. Հատուկ քննարկում է պահանջում այն դեպքը, երբ պտտման անկյունը $\varphi = \pi$, $f = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \infty$:

Նկատի առնելով, որ $\bar{f} = f \bar{f}$, կարելի է (9, 9, 10) արտադրել այսպես

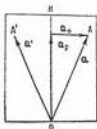
$$\bar{\alpha} = \frac{2}{1 + f^2} [f(\bar{f} \times \bar{a}_0) - a_0 \bar{f}^2]$$

և, որովհետև $f = \infty$, արհամարհելով հալտարարում 1-ը, իսկ համարելով $\bar{f}(\bar{f} \times \bar{a}_0)$, ստանում ենք

$$\bar{\alpha} = -\frac{2\bar{a}_0}{f^2} f^2 = -2\bar{a}_0 : \quad (9, 9, 14)$$

Այդպես էլ պետք է լինի Իրոք, $[9-D]$ -ն իրավունք է ստելիս ընդունել, որ $\bar{a} = \overline{OA}$ հատվածի սկիզբը գտնվում է պտտման

ՕՒ առանցքի վրա (նկ. 9—15): Սկզբում $\vec{a}$ -ն գտնվում է HOA հարթության վրա. ՕՒ-ի շարժը π անկյունով պտտվելուց հետո $\vec{a}$ -ն գտնվում է $\vec{a}' = \vec{OA}'$ և նորից գտնվում է HOA հարթության վրա: Այսպիսով, $\vec{a}'$ -ը սխեմայիկ է $\vec{a}$ -ին ՕՒ առանցքի նկատմամբ և



Նկ. 9—15:

$$\vec{z} = \vec{a}' - \vec{a} = -2\vec{a}_0,$$

Յ. (9, 9, 8) և (9, 9, 10)-ով որոշվում է $\vec{z}$ -ն, երբ հաշվենք $\vec{f}$ և $\vec{a}$ (կամ $\vec{a}_0$). (9, 9, 13)-ով որոշվում է $\vec{f}$ -ը, երբ ավանդ են կրկն հաստատունների փոփոխությունները և արդ հաստատուններից մեկը ($\vec{z}$, $\vec{z}$, $\vec{a}$): Այժմ որոշենք $\vec{a}_0$ (և $\vec{a}$) $\vec{f}$ -ի և $\vec{z}$ -ի միջոցով:

(9, 9, 9)-ի հիման վրա կարելի է (9, 9, 7)-ում փոփոխել $\vec{a}$ -ն $\vec{a}_0$ -ով, և, որովհետև

$$\vec{f} \times (\vec{f} \times \vec{a}_0) = -\vec{a}_0 f^2,$$

գրել

$$\vec{f} \times \vec{z} = -f^2 (2\vec{a}_0 + \vec{z}),$$

որտեղից

$$\vec{a}_0 = -\left(\frac{\vec{f} \times \vec{z}}{2f^2} + \frac{\vec{z}}{2}\right), \quad (9, 9, 15)$$

Նկ. 9—16-ում

$$\overline{AA'} = \vec{z}, \quad \overline{AC} = \frac{\vec{z}}{2},$$

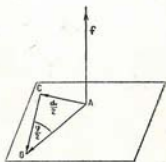
$$\overline{CO} = \frac{\vec{f} \times \vec{z}}{2f^2}, \quad \overline{AC} + \overline{CO} = \overline{AO} = -\vec{a}_0.$$

պետք է նկատի առնել, որ

$$CO = \left| \frac{\vec{f} \times \vec{z}}{2f^2} \right| = \frac{\alpha}{2f} = \frac{\alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}},$$

արդպես էլ պետք է լինի՝

$$\frac{\alpha}{2} : OC = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$



Նկ. 9—16:

2-ում $\vec{a}$ -ն վերլուծվել է $\vec{a}_0$ և $\vec{a}_f \parallel \vec{f}$ բաղադրիչների, ալ-
սինքն $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_f = \vec{a}_0 + \lambda \vec{f}$.

որտեղ λ -ն սկալար, որական կամ բացասական, պարժակից է:
(9, 9, 15)-ից հետևում է, որ

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{\vec{f} \times \vec{a}}{2f^2} - \frac{\vec{a}}{2}; \quad (9, 9, 15')$$

§ 9. 10. Համարժեք պատճան առանցքի որոշումը հարթ-գուգահեռ շարժման դեպքում. համարժեք պատճանային շարժման առանցքի որոշումը

1°. Ինչպես հալանի է, [6—C], 1° հարթությունը գուգահեռ
շարժումը համարժեք է պատճան մի առանցքի շուրջը, որը ուղ-
ղահայաց է P-ին: Անոլանենք այդ առանցքը KOL և գիտարկենք
մարմնի ալն $\vec{OA} = \vec{a}_0$ համարժեք, որ ուղղահայաց է KL-ին: Քանի
որ KOL առանցքը անշարժ է $\vec{\omega}_O = 0$, (9, 4, 3)-ի հիման վրա
տենենք

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}$$

Փոխարինելով (9, 9, 15)-ում $\vec{a}$ -ն $\vec{\omega}_A$ -ով, պատճան ենք (նկ.
9—17),

$$-\vec{a}_0 = \frac{\vec{\omega}_A}{2} + \frac{\vec{f} \times \vec{\omega}_A}{2f^2}, \quad (9, 10, 1)$$

որտեղ

$$-\vec{a}_0 = \vec{AO}$$

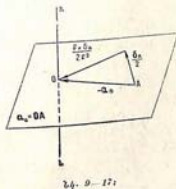
հանդիսանում է KOL առանցքի
հեռավորությունը կամայական ալն
A կետից, որի $\vec{\omega}_A$ անդամությունը
համարվում է հալանի.

$$(\vec{f} \times \vec{\omega}_A) \perp \vec{\omega}_A,$$

իսկ

$$\left| \frac{\vec{f} \times \vec{\omega}_A}{2f^2} \right| = \frac{\omega_A}{2f} = \frac{\omega_A}{2fg \frac{v}{c}}$$

է-ն համարժեք պատճան անկյունն է:



(9, 10, 1) կիրառելու համար անհրաժեշտ է դիտենալ $\tilde{\varepsilon}_A$ և $\tilde{f}$ -ը (կամ φ): Եթե φ -ն հալոնի չէ, կարելի է վարդիլ ախպես. KOL-ին ուղղահայաց հարթություն վրա վերցնել երկու կետ՝ A , B , որոնց $\tilde{\varepsilon}_A$, $\tilde{\varepsilon}_B$ տեղափոխումները հալոնի են. $\tilde{\varepsilon}_A$ և $\tilde{\varepsilon}_B$ -ի միջնակետերից տարած ուղղահայացների համաձայն կետը կդառնի KOL առանցքի վրա:

KOL առանցքի ընթացիկ կետի շատավիզ-վեկտորը՝

$$\vec{r} = -\vec{a}_0 + \lambda \vec{f} = -\vec{a}_0 + \varepsilon (\tilde{\varepsilon}_A \times \tilde{\varepsilon}_B) \quad (9, 10, 2)$$

ալետեղ λ և ε սկալար գործակիցները փոփոխվում են $-\infty$ մինչև $+\infty$:

Գ. Հարթ պատկերի շարժումը իր հարթության մեջ ($P|Q$ շարժում) հարթ-դուգաձև շարժման մասնավոր դեպքն է. ուստի պարզ է, որ $P|Q$ շարժման համարժեք պատման կենտրոնը որոշվում է (9, 10, 1) բանաձևով, կամ, եթե φ անկյունը հալոնի չէ, $\tilde{\varepsilon}_A$ և $\tilde{\varepsilon}_B$ տեղափոխումների միջնակետերից տարած ուղղահայացների հատումով, տե՛ս նկ. 9—10 ա, բ, գ:

Բերենք մանրամասն ապացույցը:

Ենթադրենք, $P|Q$ շարժման հետևանքով P -ի A , B կետերը դառնել են A' , B' դիրքերը: A -ի տեղափոխումը կրճնի $\overline{AA'}$ -ը, B -ինը՝ $\overline{BB'}$:

Ալետեղ հնարավոր են երեք դեպքեր՝

ա) $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

բ) $\overline{AA'} \neq \overline{BB'}$, բայց $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ (նկ. 9—10ա, բ)

գ) $\overline{AA'}$ -ը ու $\overline{BB'}$ -ը իրար դուգաձև չեն:

ա դեպքում շարժումը համընթաց է: Բ և գ դեպքերում շարժումը կարող է լինել պտտողական:

Մի գիտադաթյուն, որը կպարզեցնի Բ, գ դեպքերի չճանաչկումը:

$\overline{AA'}$ -ի և $\overline{BB'}$ -ի միջնակետերը համապատասխանորեն անվանենք C և D , տանենք C -ից $Cc \perp AA'$, իսկ D -ից՝ $Dd \perp BB'$: P -ի և պատման առանցքի համաձայն կետը նշանակենք O :

Եթե $\overline{AA'}$ և $\overline{BB'}$ տեղափոխումները առաջացել են պտտումից, ապա A և A' կետերը սիմետրիկ են OC -ի նկատմամբ. ուստի O -ն պետք է գտնվի Cc -ի վրա: Նույն պատճառով O -ն պետք է գտնվի նաև Dd -ի վրա:

Այժմ պարզ է, որ Cc -ն ու Dd -ն պետք է կամ հասնեն, կամ ձուլվեն:

զ զեպքում $\overline{AA'}$ ու $\overline{BB'}$ -ը զուգահեռ չեն (նկ. 9—10 գ) և O -ն հանդիսանում է Cc -ի և Dd -ի համաժան կետը:

բ զեպքում $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ հետևապես Cc , Dd և O -ն պետք է գտնվեն մի ուղղի վրա և պետք է բավարարված լինի

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}$$

պարմանը: Այդ պարմանին բավարարում է հենց AB -ի ու $A'B'$ -ի կամ նրանց շարունակությունների համաժան կետը (նկ. 9—10ա, 9—10բ):

3°. Նույն (9, 10, 1) բանաձևով, կամ նույն երկրաչափական կառուցումով սրտչվում է պտուտակային առանցքի դիրքը:

Եվ իբրեք, անդափոխման այն բաղադրիչը, որը զուգահեռ է շփոփոխված հատվածների ուղղությունը, նույնն է կարծր մարմնի բոլոր կետերի համար. արդ բաղադրիչին զուգահեռ են պտուտակային KOL առանցքը, և պտտման $\vec{f}$ վեկտորը:

Նշանակելով 0 ինդեքսով անդափոխականների այն բաղադրիչները, որոնք ուղղահայաց են KOL -ին և ընտրելով O կետը այնպես, որ A կետի $\overline{OA} = \vec{a}_0$ շառավիղ-վեկտորը ուղղահայաց լինի KOL -ին, ունենք $\vec{\omega}_0 = 0$ և ըստ (9, 4, 3)-ի $\vec{\omega}_{0A} = \vec{a}$ տրայխտով, նման (9, 10, 1)-ին

$$-\vec{a}_0 = \frac{\vec{\omega}_{0A}}{2} + \frac{\vec{f} \times \vec{\omega}_{0A}}{2f^2} \quad (9, 10, 3)$$

որտեղ $-\vec{a}_0 = \overline{AO}$ — պտուտակային առանցքի հեռավորությունն է A կետից:

Պտուտակային առանցքի համաստեղային՝

$$\vec{r} = -\vec{a}_0 + \lambda \vec{f} = -\vec{a}_0 + \alpha (\vec{\omega}_{0A} \times \vec{\omega}_{0B}): \quad (9, 10, 4)$$

Այստեղ λ և α ընդունում են բոլոր արժեքները $-\infty$ -ից մինչև $+\infty$, իսկ $\vec{\omega}_{0A}$ և $\vec{\omega}_{0B}$ A և B կետերի անդափոխականների այն բաղադրիչներն են, որոնք ուղղահայաց են KOL առանցքին:

§ 9. II. Պեստան վեկտորների «գումարումը»

Ենթադրենք, որ կարծր մարմինը OF առանցքի շուրջը φ անկյունով պտտվելուց հետո պտտվում է φ' անկյունով OG առանց-

քի շուրջը: Ընդանկենք որ $OF \parallel \vec{f}$, $OG \parallel \vec{g}$ և նշանակենք համապատասխանաբար $\vec{f}$ ու $\vec{g}$ պատման վեկտորները՝ φ անկյունով (OF -ի շուրջը) և ψ անկյունով (OG -ի շուրջը):

Համաձայն $[9-J]$ -ի ալս մեկը մյուսին հաջորդող երկու պատումները համարենք են մի պատմանը, որի առանցքը (OH) անցնում է OF և OG առանցքների համաման կետով:

Դիցուք $\bar{h}$ -ը OH առանցքի շուրջը պատման վեկտորն է, $\bar{h}$ -ը անվանենք արդյունաբար (համարենք) պատման վեկտոր:

Գումարել $\vec{f}$ և $\vec{g}$ պատման վեկտորները նշանակում է արդյունաբար պատման $\bar{h}$ վեկտորը արտահայտել այդ երկու վեկտորների միջոցով:

Չ. Որպեսզի հաստատենք անշաղթյալն $\bar{h}$ և $\vec{f}$, $\vec{g}$ վեկտորների միջև, պատկերացնենք այն փոփոխությունները, որ կրում է կամայական $\overline{OA}$ հատվածը շնորհիվ պատումների OF , OG և OH առանցքների շուրջը, ընդ որում OF առանցքի շուրջը պատմանը հաջորդում է պատումը OG առանցքի շուրջը:

Դիցուք OF առանցքի շուրջը պատման հետևանքով $\overline{OA}$ հատվածը զրափում է $\overline{OA'}$ դիրքը, իսկ շնորհիվ պատմանը OG առանցքի շուրջը $\overline{OA'}$ -ը զրափում է $\overline{OA''}$ դիրքը: OH առանցքի շուրջը համարենք պատման զեպքում $\overline{OA}$ -ն պետք է զրափի $\overline{OA''}$ դիրքը:

Նշանակենք

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \overline{OA'} - \overline{OA} & \bar{a} &= \overline{OA'} + \overline{OA} \\ \bar{y} &= \overline{OA''} - \overline{OA'} & \bar{b} &= \overline{OA''} + \overline{OA'} \\ \bar{z} &= \overline{OA''} - \overline{OA} & \bar{c} &= \overline{OA''} + \overline{OA} \end{aligned} \right\} \quad (9, 11, 1)$$

(9, 11, 1) ապրիտ է

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{z} \quad (9, 11, 2)$$

$$\bar{b} - \bar{a} = \bar{z} \quad (9, 11, 3)$$

$$\bar{b} - \bar{x} = \bar{c} \quad (9, 11, 4)$$

$$\bar{y} + \bar{a} = \bar{c} \quad (9, 11, 5)$$

Նկատի առնելով (9, 11, 1) նշանակումները կարող ենք աչապես արտագրել (9, 3, 2) և (9, 9, 4)-ը

$$\vec{f} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{g} \cdot \vec{\beta} = 0, \quad \vec{h} \cdot \vec{\gamma} = 0 \quad (9, 11, 6)$$

$$\vec{a} = \vec{f} \times \vec{a}, \quad \vec{\beta} = \vec{g} \times \vec{b}, \quad \vec{\gamma} = \vec{h} \times \vec{c} \quad (9, 11, 7)$$

Օգտվելով (9, 11, 1)–(9, 11, 7) ասեղաթվաններից բերենք $\vec{a}$ -ի արտահայտությունը նոր առարկի: Համաձայն (9, 11, 7) և (9, 11, 5)-ի

$$\vec{a} = \vec{f} \times \vec{a} = \vec{f} \times (\vec{c} - \vec{\beta}), \quad (9, 11, 8)$$

Համաձայն (9, 11, 7) և (9, 11, 4)-ի

$$\vec{f} \times \vec{\beta} = \vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{b}) = \vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{c}) + \vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{a})$$

ըստ (9, 11, 6)-ի

$$\vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{a}) = -\vec{a} (\vec{f} \cdot \vec{g}), \quad (9, 11, 9)$$

(9, 11, 8) և (9, 11, 9)-ը ապրիւ են

$$\vec{a} = \vec{f} \times \vec{c} - \vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{c}) + \vec{a} (\vec{f} \cdot \vec{g})$$

կամ

$$\vec{a} = \frac{\vec{f} \times \vec{c} - \vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{c})}{1 - \vec{f} \cdot \vec{g}}, \quad (9, 11, 10)$$

Բարդովին նման եղանակով կառանալինք

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{g} \times \vec{c} + \vec{g} \times (\vec{f} \times \vec{c})}{1 - \vec{f} \cdot \vec{g}}, \quad (9, 11, 11)$$

$\vec{a} + \vec{\beta}$ գումարը կարելի է պարզեցնելը Իրոք (9, 11, 10)-ում

$$- \vec{f} \times (\vec{g} \times \vec{c}) = \vec{f} \times (\vec{c} \times \vec{g})$$

Պիտակով

$$\vec{g} \times (\vec{f} \times \vec{c}) + \vec{f} \times (\vec{c} \times \vec{g}) + \vec{c} \times (\vec{g} \times \vec{f}) = 0$$

Թերեւք և նկատի ունենալով, որ

$$\vec{c} \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \times \vec{f}) \times \vec{c}$$

ստանում ենք

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} = \vec{a} + \vec{\beta} &= \frac{\vec{f} \times \vec{c} + \vec{g} \times \vec{c} - (\vec{f} \times \vec{g}) \times \vec{c}}{1 - \vec{f} \cdot \vec{g}} = \\ &= \frac{(\vec{f} + \vec{g} - \vec{f} \times \vec{g}) \times \vec{c}}{1 - \vec{f} \cdot \vec{g}} \end{aligned}$$

Համաձայն (9, 11, 7)-ի

$$\gamma = \bar{h} \times \bar{c},$$

Համեմատենք $\bar{\gamma}$ -ի ալի երկու արտահայտությունները, քանի որ $\overline{OA}$ և $\overline{OA''} + \overline{OA} = \bar{c}$ վեկտորները միանդամալն կամալական են, հզրակացնում ենք՝

$$\bar{h} = \frac{\bar{f} + \bar{g} - \bar{f} \times \bar{g}}{1 - \bar{f} \cdot \bar{g}} \quad (9, 11, 12)$$

3°. Հալտնի է, որ վերջավոր պտտումների ենթակա մարմնի վերջնական դիրքը կախում ունի ալն հաջորդականությունից, որով կատարվում էն պտտումները OF և OG առանցքների շուրջը:

Այդ պատճառով (9, 11, 12)-ում պտտումների հաջորդականությունը պետք է նշված լինի. (9, 11, 12)-ի աշ մասի համարիչում առաջին գումարելին-առաջին պտտման վեկտորն է, երկրորդ գումարելին-երկրորդ պտտման վեկտորն է, իսկ երրորդ գումարելիի առաջին արտագրիչը՝ առաջին պտտման վեկտորն է:

Նշանակենք պտտման վեկտորը $\bar{h}_{jg}$, երբ առաջին պտտումը կատարվում է OF -ի շուրջը, և $\bar{h}_{gf}$, երբ առաջին պտտումը կատարվում է OG -ի շուրջը:

(9, 11, 12)-ից հետևում է, որ

$$\bar{h}_{jg} = \frac{\bar{f} + \bar{g} + \bar{g} \times \bar{f}}{1 - \bar{g} \cdot \bar{f}}, \quad \bar{h}_{gf} = \frac{\bar{g} + \bar{f} + \bar{f} \times \bar{g}}{1 - \bar{f} \cdot \bar{g}},$$

իսկ նրանց տարբերությունը (քանի որ $\bar{g} \cdot \bar{f} = \bar{f} \cdot \bar{g}$)

$$\bar{h}_{jg} - \bar{h}_{gf} = \frac{2\bar{g} \times \bar{f}}{1 - \bar{g} \cdot \bar{f}}, \quad (9, 11, 13)$$

4°. Երկու զեպքերում (9, 11, 13) առնչությունը դառնում է ավելի պարզ.

ա) OF և OG առանցքները միմյանց ուղղահայաց են, հետևապես նաև

$$\bar{g} \perp \bar{f}, \quad \bar{g} \cdot \bar{f} = 0.$$

(9, 11, 13)-ի փոխարեն ստանում ենք՝

$$\bar{h}_{jg} - \bar{h}_{gf} = 2\bar{g} \times \bar{f},$$

ընդ որում $\bar{g}$, $\bar{f}$ և $\bar{g} \times \bar{f}$ վեկտորները կազմում են աջ ձևովի հոլոնոմ:

բ) OF և OG -ն համընկնում են. հետևապես $\bar{g} \parallel \bar{f}$, $\bar{g} \times \bar{f} = 0$ և $\bar{h}_{g'} = \bar{h}_{fg}$ ալոինքն ալս դեպքում պատումների հաջորդականությունը չի ազդում մարմնի վերջնական դիրքի վրա:

Այդ արդյունքը հետևում է նաև $(9, 11, 12)$ -ից. իսկապես՝ եթե φ_1 , φ_2 առաջին և երկրորդ պատումների անկյուններն են, իսկ φ նրանց գումարը ($\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$), ապա ալմ $\hat{f} = \hat{g}$ և, ըստ $(9, 9, 11)$ -ի

$$\bar{h} = \frac{\hat{f}(f + g)}{1 - fg} = \hat{f} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} = \hat{f} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

§ 9. 12. ԽՈՂԻՐՈՒՄ

Խնդիր 1: Որպես վարժություն, անալիտիկորեն ցույց տանք, որ մեկը մյուսին հաջորդող երկու պատումները միևնույն անշարժ առանցքի շուրջը $\div$ անկյունով և ապա — անկյունով, վերադարձնում են կարծր մարմինը իր սկզբնական դիրքը, ալսինքն ալդպեսի երկու պատումները համարժեք են զրույի:

Իրոք $\div$ անկյունով պտտվելուց հետո $\bar{a}$ հատվածը վեր է ածվում

$$\bar{a}' = \bar{a} + \bar{\alpha}', \quad (9, 12, 1)$$

— անկյունով պտտվելուց հետո $\bar{a}'$ -ը վեր է ածվում

$$\bar{a}'' = \bar{a}' + \bar{\alpha}'' \text{ կամ } \bar{a}'' = \bar{a} + \bar{\alpha}' + \bar{\alpha}'':$$

Այստեղից պարզ է, որ երկու պտտումներից հետո $\bar{a}$ հատվածը կմնա անփոփոխ ($\bar{a}'' = \bar{a}$) միայն ալն դեպքում, եթե

$$\bar{\alpha}' + \bar{\alpha}'' = 0: \quad (9, 12, 2)$$

Կարծր մարմնի կամայական $\bar{a}$ հատվածը կարող է լինել անփոփոխ երկու դեպքում.

1. եթե մարմինը կատարել է համընթաց շարժում
2. եթե մարմինը վերադարձել է իր սկզբնական դիրքը:

Մեր խնդրում մարմնի մի հատվածը (որը համընկնում է պտտման առանցքի հետ) անշարժ է. հետևապես համընթաց շարժում

ժամը անհնարին է և, $\bar{x}' + \bar{x}'' = 0$ պայմանից կարելի է հանել ժխախն ախն կզրահացությանը, որ մարմնի սկզբնական և վերջնական դիրքերը համընկնում են:

Ապացուցելու համար կարելի է հենվել ախն պարզ մտքի վրա, որ եթե $+ \psi$ պատման անկյանը համապատասխանում է $\bar{f}'$ պատման վեկտորը, ապա ($- \psi$) անկյան համապատասխանող պատման $\bar{f}''$ վեկտորը համապատասխանում է ($-\bar{f}'$), այսինքն

$$\bar{f}'' = -\bar{f}', \quad f'' = f'; \quad (9, 12, 3)$$

Այժմ համաձայն (9, 9, 7)-ի, տենենք

$$\bar{f}' \times \bar{x} = 2\bar{f}' \times (\bar{f}' \times a) - \bar{x} f''$$

կամ

$$2\bar{f}' \times (\bar{f}' \times a) = \bar{f}' \times x' + \bar{x} f'' \quad (9, 12, 4)$$

Նման ձևով $\bar{f}''$, $\bar{a}'$ և $\bar{x}''$ -ի համար կարող ենք գրել

$$2\bar{f}'' \times (\bar{f}'' \times \bar{a}') = \bar{f}'' \times \bar{x}'' - 2\bar{x} f''; \quad (9, 12, 5)$$

Համաձայն (9, 12, 1) և (9, 12, 3)-ի ախն տանջության ձախ մասը՝

$$\begin{aligned} 2\bar{f}'' \times (\bar{f}'' \times \bar{a}') &= 2(-\bar{f}') \times [(-\bar{f}') \times (a + \bar{x}')] = \\ &= 2\bar{f}' \times [\bar{f}' \times (\bar{a} + \bar{x}')] = 2\bar{f}' \times (\bar{f}' \times a) - 2\bar{x} f'' \end{aligned}$$

բանի որ $\bar{x}' \perp \bar{f}'$, տե՛ս (9, 9, 1):

Ոգտովիւով (9, 12, 4)-ից, ստանում ենք

$$\bar{f}' \times (\bar{x}' + \bar{x}'') = (\bar{x}' + \bar{x}'') f''; \quad (9, 12, 6)$$

Այստեղ ձախ մասը ուղղահայաց է աջ մասին (եթե $\bar{x}' + \bar{x}'' \neq 0$), հետևապես (9, 12, 6) հավասարությունը հնարավոր է ժխախն, եթե երկու մասերն էլ զրո են՝

$$\bar{x}' + \bar{x}'' = 0$$

Ախ է հենց (9, 12, 2)-ը:

Խնդիր 2: Ապացուցելու Լուրյի թեորեմը.

Դիցուք OF , OG և OF' -ը տանջարժ տանցքներ են, որոնց շարքը պատման անկյունները համապատասխանաբար հավասար են φ , ψ , φ : Եթե OF տանցքը մասնակցեր պատմանը OG -ի շարքը ψ անկյանով, նա կհամընկնի OF' -ի հետ.

Այդպիսի պայմաններում կարծի մարմնի պտտումը OF -ի շուրջը և ապա պտտումը OG -ի շուրջը համարվենք են $\mathfrak{Z}$ հաջորդական պտտումների՝ նախ OG -ի շուրջը և ապա OF -ի շուրջը:

Ապացույց. Անշարժ O կետի առկալովիցան պետքում

ա) յուրաքանչյուր անկախությամբ կարելի է իրականացնել մի պտտումով, տե՛ս $[9-1]$.

բ) յուրաքանչյուր անկախությամբ որոշվում է պտտման վեկտորով.

OF , OG , OF' առանցքների շուրջ կատարվող պտտումների վեկտորները անվանենք համապատասխանաբար $\vec{f}$, $\vec{g}$, $\vec{f}'$: OF -ի և ապա OG -ի շուրջը պտտումներին համարվենք պտտման վեկտորը թող լինի $\vec{h}$, իսկ OG և OF' -ի շուրջը պտտումներին համարվենք պտտման վեկտորը նշանակենք $\vec{h}'$, ըստ L ուղևի թեորեմի $\vec{h} = \vec{h}'$, ընդ որում համաձայն, (9, 11, 12) ի

$$\vec{h} = \frac{\vec{f} + \vec{g} + \vec{g} \times \vec{f}}{1 - \vec{g} \cdot \vec{f}}, \quad \vec{h}' = \frac{\vec{g} + \vec{f}' + \vec{f}' \times \vec{g}}{1 - \vec{g} \cdot \vec{f}'},$$

Այսպիսով պետք է ապացուցել, որ $\vec{h} = \vec{h}'$:

Ամենից առաջ նկատվում է, որ աջ մասերի կոտորակների հայտարարներն իրար հավասար են. իրոք

$$j = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad f' = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

և բացի այդ

$$\angle (\overline{OF}, \overline{OG}) = \angle (\overline{OF'}, \overline{OG}).$$

Հետևապես

$$\begin{aligned} \vec{g} \cdot \vec{f} &= gf \cos (\overline{OF}, \overline{OG}) \\ \vec{g} \cdot \vec{f}' &= gf' \cos (\overline{OF'}, \overline{OG}) \end{aligned}$$

այսինքն

$$\vec{g} \cdot \vec{f} = \vec{g} \cdot \vec{f}':$$

Մնում է միայն ապացուցել համարիչների հավասար լինելը՝

$$\vec{f} + \vec{g} + \vec{g} \times \vec{f} = \vec{g} + \vec{f}' + \vec{f}' \times \vec{g}:$$

Նթև այդ աղպես է, ապա

$$\vec{f}' - \vec{f} = \vec{g} \times (\vec{f}' + \vec{f}).$$

իսկ այս առնչութիւնը ճիշտ է, որովհետեւ եթէ OF -ը մասնակցեր պտտմանը OG -ի շուրջը, OF -ի վրա դասավորված $\bar{f}$ հատվածը կհամընկներ $\bar{f}'$ -ի հետ, իսկ $\bar{l}' - \bar{l}$ կլինէր $\bar{f}$ -ի փոփոխութիւնը. որը ինչպէս հալտնի է, արտահայտվում է այդ բանաձևով, տե՛ս (9, 9, 4):

Խնդիր 3: OH առանցքը գտնվում է yOz հարթութիւնի վրա և կազմում է 45° անկյուն թե Oy -ի և թե Oz -ի հետ:

Մարմինը պտտվում է z անկյունով Oy -ի շուրջը և ապա z անկյունով Oz -ի շուրջը: Ինչ β անկյունով պետք է պտտվի մարմինը OH -ի շուրջը, որպեսզի Oy , Oz պտտումների համարժեք վեկտորի և OH -ի շուրջ պտտման վեկտորի տարրերութիւնը դուրս գան OX առանցքին:

Լուծում: անվանենք $\bar{h}_{yz}$ Oy , Oz պտտումներին համարժեք պտտման վեկտորը, իսկ $\bar{h}_n$ թող լինի պտտման վեկտորը OH -ի շուրջը:

Համաձայն (9, 11, 12) և (9, 11, 13)-ի

$$\begin{aligned}\bar{h}_{yz} &= j \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} (k \times j) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(j + k - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} i \right).\end{aligned}$$

Ջանի որ OH -ի միավոր-վեկտորը համասար է $\frac{j+k}{\sqrt{2}}$, ապա

$$\bar{h}_n = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \left(\frac{j+k}{\sqrt{2}} \right),$$

Այստեղից

$$\bar{h}_{yz} - \bar{h}_n = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) (j + k) - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} i,$$

Պարզ է ($\bar{h}_{yz} - \bar{h}_n$) կլինի դուրսն OX առանցքին, եթե

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 0$$

ալիսինքն, եթե

$$\frac{\beta}{2} = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right),$$

BL -ի շուրջը համարժեք է կիսապտույտի AB -ի շուրջը և համընթաց շարժման, որում տեղափոխումը հավասար է $2\overline{AB}$:

Լուծում: Դիտարկենք կարծր մարմնի կամայական D կետը, որի շառավիղ-վեկտորն է $\vec{r}$: Վերլուծենք $\vec{r}$ -ը երեք բաղադրիչների

$$\overline{AD} = \vec{r} = \vec{h} + \vec{b} + \vec{l}, \quad \vec{h} \parallel \overline{AH}, \quad \vec{b} \parallel \overline{AB}, \quad \vec{l} \parallel \overline{BL};$$

կիսապտույտը AH -ի շուրջը չի ազդում $\vec{h}$ -ի վրա, D -ն ընդունում է D' դիրքը, ալիքն $(\vec{b} + \vec{l})$ -ը վեր է ածվում — $(\vec{b} + \vec{l})$ -ի.

$$\overline{DD'} = -2(\vec{b} + \vec{l}), \quad \overline{AD'} = \vec{h} - (\vec{b} + \vec{l});$$

Դիտարկելով կիսապտույտը BL -ի շուրջը, ընդունենք որպես շառավիղ-վեկտորների սկիզբ B կետը

$$\overline{BD'} = \overline{BA} + \overline{AD'} = \overline{BA} + \vec{h} - \vec{b} - \vec{l} \quad (\overline{BA} + \vec{h} - \vec{b}) \perp \overline{BL};$$

Այդ կիսապտույտից առաջացած տեղափոխումը՝

$$\overline{D'D''} = -2(\overline{BA} + \vec{h} - \vec{b});$$

D -ի ընդհանուր տեղափոխումը՝

$$\overline{DD''} = \overline{DD'} + \overline{D'D''} = 2(\vec{b} + \vec{l}) - 2(\overline{BA} + \vec{h} - \vec{b}),$$

$$\overline{DD''} = -2(\vec{h} + \vec{l}) + 2\overline{AB};$$

Անցնենք կիսապտույտին AB -ի շուրջը. D -ի շառավիղ-վեկտորը

$$\overline{AD} = \vec{h} + \vec{b} + \vec{l}$$

այդ կիսապտույտից առաջացած տեղափոխումը

$$\overline{DD'''} = -2(\vec{h} + \vec{l});$$

$\overline{DD''}$ և $\overline{DD'''} = -2\overline{AB}$ տեղափոխումները տարբերվում են $2\overline{AB}$ -ով, այդ տարբերությունը կախում չունի D կետի ընտրությունից, ալիքն ընտանիք է կարծր մարմնի բոլոր կետերի համար: Այսպիսով, $2\overline{AB}$ տեղափոխումը կարելի է վերագրել համընթաց շարժմանը: Խնդիրը լուծված է:

Խնդիր 6: Անփոփոխելի ուղիղը համընկնում է ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի Oy առանցքի հետ: Ցույց տալ, որ երեք

պատումներից հետո Ox , Oy , Oz առանցքների շուրջը ռոտորը կոնկրետացնում էր սկզբնական դիրքը, եթե լուրացանչույթ պատման անկյունը հավասար է $\frac{\pi}{2}$:

Խնդիր 7: Ապացուցել, որ մեկը մյուսին հաջորդող կիսապատումները՝ երկու զադաճեա առանցքների շուրջը համարժեք են համընթաց շարժման, որում տեղափոխումը հավասար է $2b$, որտեղ b -ն երկրորդ առանցքի հեռավորությունն է առաջինից:

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ն ա խ ու ր ա ն	3
Մի թանի զիտոգումայուններ	8
Գ լ ա խ I. Սկալար արգումենտի վեկտորական ֆունկցիաներ	
1, 1 Մի սկալար արգումենտի վեկտորական ֆունկցիաները և նրանց հոգոգրաֆները	9
1, 2 Սկալար արգումենտի մի թանի վեկտորական ֆունկցիաների հո- գոգրաֆները	12
1, 3 $\vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$ գումարի հոգոգրաֆը	18
1, 4 Վեկտորական ֆունկցիաների զեֆերենցումը	22
1, 5 Վեկտորական ֆունկցիաների առաջին կարգի ածանցյալը	25
1, 6 Երկրորդ և ափսիսի բարձր կարգի ածանցյալները	32
1, 7 Վեկտորի ածանցյալներն ըստ նրա հոգոգրաֆի աղեղի	38
1, 8 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ միավոր վեկտորները	41
1, 9 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների ածանցյալները. Ֆրեննի թանանները	44
1, 10 Վեկտորի կամայական ածանցյալների արտահայտությունը ըստ հոգոգրաֆի աղեղի վերջված ածանցյալների միջոցով	48
1, 11 Վեկտորի ածանցյալների պրոեկցիաները	50
1, 12 Խնդիրներ	54
Գ լ ա խ II. Կետի կինեմատիկայի նիմեական դրույթները	
2, 1 Եւրմուտ և նրա հարաբերականությունը	62
2, 2 Հետագիծ և նրա հետ կապված դադափարներ	63
2, 3 Արագությունը որպես վեկտոր	70
2, 4 Արագացում	72
2, 5 Արագացում—սխառեմաակի ըննարկում	76
2, 6 Խնդիրներ	83
2, 7 Վեկտորի և նրա ածանցյալների պրոեկցիաները	88
2, 8 Արագության և արագացման արտահայտությունները զեկարտյան կոորդինատային սխառեմում	90
2, 9 Արագության և արագացման արտահայտությունները բևեռային սխառեմում	95
2, 10 Արագության և արագացման արտահայտությունները կոորդի- նատների զլանային և զնդային սխառեմներում	101
2, 11 Թեորեմ $\frac{dV^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$	108

2, 12 Խնդիրներ	111
Գլուխ III. Կետի շարժման մասնավոր դեպքեր	
3, 1 Շրջանային շարժում	115
3, 2 Ներդաշնակ տատանումներ (հիմնական առնչություններ)	120
3, 3 Ներդաշնակ տատանումների հատկությունները	122
3, 4 Ներդաշնակ տատանումներ (շարունակություն)	125
3, 5 Ուղղադիրձ համասարաչափ փոփոխվող շարժում	132
3, 6 Խնդիրներ	139
3, 7 Շարժումը այն դեպքում, երբ արագացումը հաստատուն է որպես փեկտոր	144
3, 8 Մի ժամյի լրացուցիչ առնչություններ	151
3, 9 Կետի շարժումը, երբ հաստատուն է արագացման ուղղությունը Խնդիրներ	161
3, 10 Խնդիրներ	163
Գլուխ IV. Մակերեսներ, ակնյուններ, կենտրոնական շարժում	
4, 1 Հարթ պատկերի մակերեսը որպես փեկտոր	172
4, 2 Կամայական մակերևույթի փեկտորական մակերեսը	174
4, 3 Ո՛ր անկյունները կարելի է համարել փեկտորներ	178
4, 4 Սեկտորիալ արագություն և սեկտորիալ արագացում	181
4, 5 Սեկտորիալ արագության և սեկտորիալ արագացման կոորդինա- տական արտահայտություններ	184
4, 6 Կենտրոնական շարժում	187
4, 7 Կենտրոնական շարժման հատկությունները	189
4, 8 Կետի շարժումը էլիպսով, որի կենտրոնը համընկնում է արագաց- ման կենտրոնի հետ	193
4, 9 Դիֆերենցիալ համասարմունքի մասին	201
4, 10 $\overline{\omega} = \omega^2$ համասարման մի ալլ ընդհանուր լուծում	204
4, 11 $\overline{\omega} = \omega^2$ դիֆերենցիալ համասարման լուծումը	206
4, 12 Խնդիրներ	209
4, 13 Կետի շարժումը, երբ կենտրոնական արագացումը հակադարձ հա- մեմատական է հեռավորության քառակուսուն	217
4, 14 Կեպլերի օրենքները	223
Գլուխ V. Կարճ մարմնի պարզագույն շարժումները	
5, 1 Համընթաց շարժում	229
5, 2 Պտտում անշարժ առանցքի շուրջը	231
5, 3 Կարճ մարմնի դիրքը որոշող անկյաի մեծությունների թիվը	234
5, 4 Պտտվող մարմնի կետի արագությունը	235
5, 5 Արագությունների բաշխումը պտտվող մարմնում	238
5, 6 Արագությունների կախումը առանցքի դիրքից	243
5, 7 Անկյունային արագացում	244
5, 8 Պտտվող մարմնի կետի արագացումը	247
5, 9 Արագացումների բաշխումը	249
Գլուխ VI. Հարթ շարժում	
6, 1 Հարթ պատկերի շարժումը եր հարթության մեջ	252

6, 2	Հարթ պատկերի շարժումը իր հարթության մեջ կարող է լինել կամ համընթաց, կամ պատողական	265
6, 3	Արագության և անշարժ ցենտրոիդները	266
6, 4	Շարժական և անշարժ ցենտրոիդները	262
6, 5	Ակնթարթային կենտրոնի, շարժական և անշարժ ցենտրոիդների որոշումը	261
6, 6	Խնդիրներ	269
6, 7	Հարթ պատկերի կետերի արագացումները	273
6, 8	Արագացումների կենտրոնի զիջքի անալիտիկ որոշումը	276
6, 9	Խնդիրներ	278
6, 10	Հիմնական առնչությանների ալլ մեկնարանում	282
6, 11	Կորդինատային արտահայտություններ	283
6, 12	Լրացուցիչ տեղեկություններ	288
6, 13	Արագության և արագացումների պլաններ	296
Գլուխ VII. Կործր մարմնի շարժման քննադատիկ դասը		
7, 1	Կործր հասկացումների հասկացությունները	301
7, 2	Կործր հասկացի կեննեմատիկան	307
7, 3	Կործր մարմնին վերաբերող հիմնական թեորեմը	312
7, 4	[7—G] թեորեմի հետևանքները	315
7, 5	Մեկ անշարժ կետ ունեցող կործր մարմնի շարժումը	318
7, 6	Էլլերի անկյունները	327
7, 7	Ինը ուղղորդ կոսինուսների արտահայտությունները $\theta, \frac{1}{2}, \varphi$ անկյունների միջոցով	330
7, 8	Կործր մարմնի շարժումը ընդհանուր դեպքում	334
7, 9	Կործր մարմնի շարժման վերամումը ակնթարթային պատման	339
7, 10	Կործր մարմնի պատատական շարժումը (զինամա)	340
7, 11	Պատումների դումարումը	344
7, 12	Խնդիրներ	333
Գլուխ VIII. Հարաբերական շարժման տեսություն		
8, 1	Հարաբերական շարժման տեսության էությունը	362
8, 2	Մացարձակ, հարաբերական և փոխադրական շարժումներ	363
8, 3	Օրենքներ	365
8, 4	Առնչությանը հարաբերական, փոխադրական և բացարձակ արագությունների միջև	367
8, 5	Կորեկոսի թեորեմը	369
8, 6	Կորեկոսի թեորեմի մի ալլ ապացույց	375
8, 7	Տեսության մի բանի կիրառումներ	378
8, 8	Թեզաի թեորեմը	383
8, 9	Խնդիրներ	384
Գլուխ IX. Կործր մարմնի վերադոր տեղափոխումները		
9, 1	Ընդհանուր դիտողություններ	403
9, 2	Կործր մարմնի հասկացի փոփոխություններ	405
9, 3	Փոփոխությաններին վերաբերող հիմնական թեորեմը	407
9, 4	Փոփոխությունները և տեղափոխումները	410
9, 5	Համընթաց շարժում	412
9, 6	Անշարժ կետ ունեցող մարմնի շարժումը	416

9, 7 Կարծր մարմնի ընդհանուր շարժումը	416
9, 8 Մասնավոր դեպքեր	417
Վերջավոր պատումների անայխտիկ դիտարկումը	419
9, 9 Անշախտան նստվածք, նրա փոփոխության և պտտման վեկտորի միջև	419
9, 10 Համարմեր պտտման առանցքի որոշումը նարթ-գուդանեո շարժ- ման ղեկգրում. համարմեր պտտասեկային շարժման առանցքի որոշումը	425
9, 11 Պտտման վեկտորների չզուգարումը	427
9, 12 Խնդիրներ	431



ԱԼԵՔՏԵՆԴԻ ԱՐԿԱԴԵՎԻՉ ՀԱԿՈԲՅԱՆ
АЛЕКСАНДР АРКАДЬЕВИЧ АКОПЯН

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

II մաս

Կրկնամասիկա

Տպագրվում է Հայկական ՍՍՍԻ ԴԱ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ինստիտուտի զինական խոհերդի հանձնարարությամբ

Պատ. խմբագիր՝ Գ. Պ. ԳՅՈՒՆՉԵԱՆ

Հրատ. խմբագիր՝ Ս. Ա. ԱՆԱՍՏԱՍՅԱՆ

Նկարչական ձևավորում՝ Լ. Ա. ՍԱԴՈՅԱՆԻ

Տեխ. խմբագիր՝ Մ. Ա. ԿԱՓԷԱՆՅԱՆ

Սրբագրիչներ՝ Զ. Խ. ՕՐԽԱՆՅԱՆ, Ս. Կ. ԶԱԲԱՐՅԱՆ

ՎՋ 06774, հրատ. № 2235, ԽՀԽ 810, տպագրեր 137, տպաքանակ 1000

Հանձնված է արտադրության 10/111 1964 թ., ստորագրված է տպագրու-
թյան 8/XII 1964 թ., տպագր. 27,63 մամուլ, հրատ. 22 մամուլ:
Թուղթ 60×92¹/₂, Գինը 1 ս. 79 կոպ.

Հայկական ՍՍՐ գիտության բաժանմունքի տեղագեմության հրատարակչության
տպարան, Երևան, Բաքեկամուսթյան 24:

Էջ	Տող	Տպադրված է	Պետք է լինի
33	12 զ	$d-t$	$t-t$
33	13 զ	$t^2 a$ $\frac{d^2 a}{dt^2}$	$\frac{d^2 a}{dt^2}$
34	13 զ	Համասարուժից	Համասարությունից
43	7 զ	$\frac{dr}{ds}$	$\frac{dr}{ds}$
49	7 ն	Համապատասխան է	պատասխան է
109	10 զ	$dr =$	$dr =$
121	10 ն	$+ l_2$	$+ l^2$
123	8 ն	Կլասիկալ	Կլասիկալ (նկ. 3—5):
124	10 ն	$\cup B_2 B_1$	$\cup B_1 B_2$
155	1 զ	$\bar{v} + v$	$\bar{v} + u$
187	9 ն	$\{4, 6, 1'\}$	$\{4, 6, 1\}$
190	4 զ	$ 4 - f $	$ 4 - f $
190	2 ն	$(4, 5, 2)$	$(4, 6, 2)$
190	1 ն	$(4, 5, 3)$	$(4, 6, 3)$
207	3 ն	$+ \bar{b} e^{wf}$	$+ \bar{b} e^{-wf}$
225	9 ն	$= \pm \bar{\omega} \cdot \overset{A}{r} + \varepsilon$	$= \pm \bar{\omega} r \cdot (\overset{A}{r} \pm \varepsilon)$
327	1 ն	$\bar{v} = \frac{a}{h} \bar{p} + \frac{a}{h} \overset{A}{h} \times \varepsilon,$	$\bar{v} = \frac{a}{h} \bar{p} + \frac{a}{h} \bar{h} \times \varepsilon, \quad (4, 14, 8)$
233	11 ն	$OA \perp DH$	$OA \perp OH$
284	1 ն	$= \overset{A}{I} \overset{A}{X} = \overset{A}{J} \overset{A}{Y}$	$= \overset{A}{I} \overset{A}{X} + \overset{A}{J} \overset{A}{Y}$
325	14 զ	$(\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) \cdot (\overset{A}{a} \times \overset{A}{b})$	$(\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) \cdot (\overset{A}{a} \times \overset{A}{b})$
331	14 ն	$\overset{A}{i}, \overset{A}{j}, \overset{A}{k}$	$\overset{A}{i}, \overset{A}{j}, \overset{A}{k}$
333	10 զ	$= \overset{A}{k} \cos \theta$	$= \overset{A}{k} \cos \varphi$
339	5 ն	$\bar{\omega} \cdot \overset{A}{A}$	$\bar{\omega} \cdot \overset{A}{A}$
344	6 զ	$\frac{dh}{d\omega}$	$\frac{dh}{d\bar{\omega}}$
350	5 զ	$\frac{\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1}{\omega^2}$	$\frac{\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_1}{\omega^2} > 1,$
374	11 զ	դ) $q b y p p$	բ) $q b y p p$
379	5 ն	$b p p \bar{l} \parallel \bar{\omega}_c$	$b p p \bar{l} = \bar{\omega}_c$
379	3 ն	$(8, 7, 6)$	$(8, 7, 6')$
411	6 ն	$\overset{A}{f} \perp \bar{a}$	$\overset{A}{f} \perp \bar{a}$
432	10 զ	$-\frac{a}{\alpha} f'^2$	$-\frac{a}{\alpha} f'^2$
432	12 զ	$+\frac{a}{\alpha} f'^2$	$+\frac{a}{\alpha} f'^2$
432	14 զ	$-\frac{a}{\alpha} f'^2$	$+\frac{a}{\alpha} f'^2$

ՀԱՍ Հիմնարար Գիտ. Գրադ.



220036504

A 11
3650