ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 122 2022 № 1

**МЕХАНИКА**

УДК 621.38
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.1-14

**А. А. Гукасян**

# Уточненные модели многозвенного манипулятора с упругими элементами и кинематический анализ движений

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 1/II 2022)

**Ключевые слова:** *многозвенный манипулятор, уточненная модель, упругие звенья манипулятора, упругие соединительные шарниры, кинематика.*

**Введение.** При движении манипуляторов в ряде случаев существенное значение имеет упругая податливость конструктивных элементов, которая должна учитываться при разработке системы управления. Колебательные процессы, вызванные упругой податливостью конструкции, существенно влияют на такие важнейшие характеристики робота, как точность выполнения рабочих операций, быстродействие, экономичность [1-9]. Исследования показывают, что упругая податливость конструкции манипулятора обусловлена различными факторами, которые можно разделить на две группы: упругая податливость соединительных узлов и упругая податливость звеньев. К упругой податливости узлов (шарниров) отнесем все факторы, действующие в узлах (соединениях) роботов: упругость шарниров, редукторов приводов, уплотнений и т.д. Таким образом, упругость узлов будет носить сосредоточенный характер [1, 2, 5, 6]. Упругость же звеньев манипулятора распределена по всей длине звеньев и должна учитываться в рамках методов теории упругости и сопротивления материалов [3, 4, 7-12]. Возможно, что в будущем получат распространение «гибкие» манипуляторы с легкими звеньями, изготовленные из новых конструкционных элементов. Звенья таких роботов будут обладать значительной упругой податливостью. Обеспечение высокой точности позиционирования и достаточного быстродействия гибких роботов возможно только за счет специальных режимов управления, осуществляющих гашение упругих колебаний в процессе движения манипулятора. Сказанное обусловливает актуальность научных исследований по кинематике, динамике и управлению движением роботов с упругими свойствами с применением

асимптотических методов и методов управления системами с распределенными параметрами [13-18].

**1. Кинематическая модель многозвенного манипулятора с абсолютно твердыми звеньями и идеальными шарнирами.** Рассматривается управляемое движение многозвенного манипулятора, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами, соединенными идеальными цилиндрическими шарнирами (рис. 1)**.** Линейные размеры звеньев обозначим через $l_i\left(i=1,2,...,N\right)$, соответственно. В конце $N-$ого звена расположен схват с грузом.

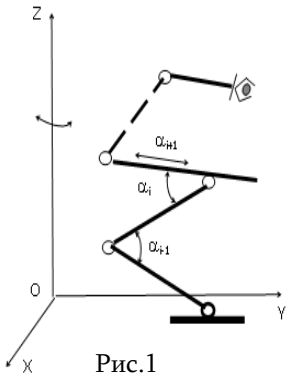

Рис.1

Обобщенные координаты, определяющие конфигурацию манипулятора и положение основания в системе координат $OXYZ$, которые как обычно представляют собой совокупность углов относительных поворотов и линейных относительных перемещений звеньев, а также декартовые координаты основания. обозначим через $\alpha_i\left(i=1,2,...,n;n\geq N\right)$,

Положение инерционных элементов и груза на схвате манипулятора в инерциальной системе координат $OXYZ$ определим координатами $q_j\left(j=1,2,...,m\right)$ (некоторые из степеней свободы могут быть безынерционными, т.е. некоторым $\alpha_i$ отвечают нулевые массы). $q_j\left(j=1,2,...,m\right)$ – координаты центра масс звеньев и груза, а также углы Эйлера, задающие ориентацию схвата. Через векторные переменные $\boldsymbol{\alpha}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)^T$, $\mathbf{q}=\left(q_1,q_2,...,q_m\right)^T$ (символ $^T$ означает транспонирование) кинематику движения манипулятора можно определить соотношением

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}\right), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)-$ заданная $m$-мерная вектор-функция от вектора аргумента $\boldsymbol{\alpha}$, структура которой зависит от выбора обобщенных координат схвата и манипулятора, а также от геометрии манипулятора.

Если задан $\boldsymbol{\alpha}$-вектор обобщенных координат, то вектор $\mathbf{q}$ определяется однозначно. Решение обратной задачи является неоднозначным, поскольку каждому состоянию захватного устройства манипулятора отвечает некоторое множество конфигураций $G=\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\},\alpha_i\in Q_i$. Единственность решения обратной задачи может быть достигнута путем дополнительного требования к построению программного движения, например, определения оптимальной и устойчивой траектории манипулятора [1, 14-16].

**1.2. Обобщенные скорость и ускорение.** Из (1.1) следует, что обобщенные скорость и ускорение движений инерционных элементов манипулятора определяются соотношениями

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\,,\ \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{dF}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{dt}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\,, \tag{1.2}$$

где $$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}\right\} \quad (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n), \tag{1.3}$$

$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ – якобиан. Будем предполагать, что матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ с размерностями $(m \times n)$ имеет максимальный ранг $rang\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \min(m,n)$.

Компоненты обобщенной скорости движения схвата манипулятора определяются из (1.1), (1.2), (1.4) и имеют вид

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}\dot{\alpha}_j \quad (i = 1,2,...,m). \tag{1.4}$$

Имея компоненты вектора скорости характерных точек манипулятора и схвата (1.4), можно стандартным образом определить модуль и направление вектора скорости движения в пространстве

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}). \tag{1.5}$$

Компоненты обобщенного ускорения движения характерных точек и схвата манипулятора определяются согласно (1.1), (1.3), (1.4) и имеют вид

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}\ddot{\alpha}_j + \left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j \partial \alpha_l}\dot{\alpha}_l\right)\dot{\alpha}_j\right](i = 1,2,...,m), \tag{1.6}$$

Ускорения движений характерных точек и схвата манипулятора (1.6) зависят от обобщенных координат $\boldsymbol{\alpha}$, обобщенных скоростей $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и ускорений $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ изменений конфигураций манипулятора. (1.6) позволяет определить модуль и направление вектора ускорения

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}). \tag{1.7}$$

**2. Кинематика манипулятора с абсолютно твердыми звеньями и упругими соединительными шарнирами.** Исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи (рис. 2.1).

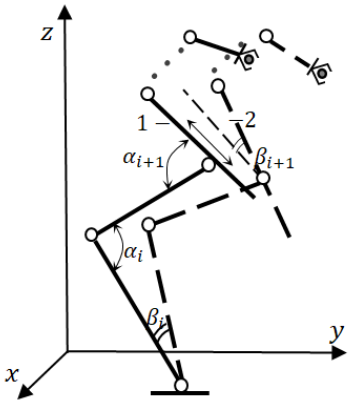

Рис. 2.1

Обобщенные координаты жесткой модели механической системы манипулятора, определяющие его конфигурацию в пространстве $OXYZ$, обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ (п. 1), а через $\boldsymbol{\beta}$

$=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)^T,(k\le n)$ – дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах между звеньями. Заметим, что здесь как координаты $\alpha_i\ (i=1,2,...,n)$, так и координаты $\beta_j\ (j=1,2,...,k)$ зависят только от времени. Положение инерционных элементов манипулятора, как и в п. 1, характеризуется $m$ координатами $\mathbf{q}=(q_1,q_2,...,q_m)^T$, где $m\le n+k$. Следовательно, манипулятор имеет $(n+k)$ степеней свободы.

Кинематику упругого манипулятора можно исследовать на основании соотношения

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ – заданная $m$-мерная вектор-функция.

Будем предполагать, что матрицы частных производных

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left\{\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_j}\right\}_{i,j=1}^{m,n},\quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left\{\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_l}\right\}_{i,l=1}^{m,k}, \tag{2.2}$$

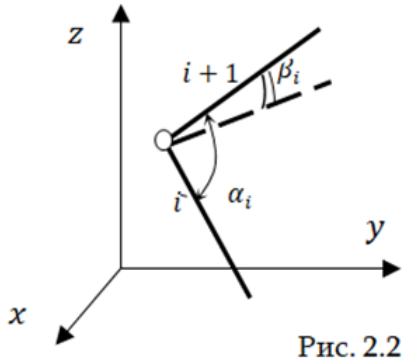

Рис. 2.2

имеют максимальные ранги, равные $rang\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\min(n,m)$ и $rang\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\min(k,m)$, соответственно. Для дальнейшего асимптотического исследования кинематических величин упругого манипулятора предполагается, что обобщенные координаты $\beta_i\,(i=1,2,...,k)$, обусловленные упругостью соединительных узлов, малы (рис. 2.2), а их жесткости $C_i\ (i=1,2,...,k)$ велики, т.е.

$$\beta_i \square\ \varepsilon, C_i \square\ \varepsilon^{-1}\ (i=1,2,...,k),\ \text{где}\ \varepsilon \square\ 1 \tag{2.3}$$

В пределе при $\varepsilon\to 0$ упругие элементы становятся жесткими, а соединительные узлы превращаются в дополнительные идеальные связи и при этом $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})$.

Применяя формулы Тейлора для функции (2.1) относительно вектора переменной $\boldsymbol{\beta}$ и оставляя в разложении члены, порядок которых не превышает $\varepsilon$, получим

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{\partial\beta_i}\beta_i+O(\varepsilon^2)\cdot \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{f}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{\partial\beta_i}\beta_i$ – имеет порядок $\varepsilon$ и $\mathbf{f}^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\equiv 0$ .

Разложение (2.4) показывает, что (2.3) позволяют описывать положения упругого манипулятора в рамках жесткой модели путем введения дополнительной величины, порядок которой не превышает $\varepsilon$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{2.5}$$

**2.1. Обобщенные скорости движений манипулятора с упругими шарнирами**. Разложение (2.5) позволяет определить обобщенные скорости движений инерционных элементов упругого манипулятора и схвата в рамках жесткой модели путем введения дополнительных векторов скорости, обусловленных упругостью соединительных узлов.

Вычисляя производные по времени от (2.5), получим

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}}, \tag{2.6}$$

где первое слагаемое $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ определяет скорость движения жесткой модели манипулятора (1.2), (1.5), (1.6) и матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ имеет структуру (1.4), а второе $\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и третье $\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}}$ слагаемые обусловлены упругостью конструкции соединительных узлов.

Матрица $\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ имеет размерность $(m \times n)$ с элементами

$$\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \frac{\partial f_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \right\}, \tag{2.7}$$

где $\dfrac{\partial f_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_j}\left[ \sum_{l=1}^{k} \dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \beta_l \right]$ и $\dfrac{\partial f_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \alpha_j} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n)$.

Слагаемое $\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ (2.6) является $m$-мерным вектором со следующими компонентами:

$$\left(\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i = \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{\partial}{\alpha_j} \left( \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \right] \dot{\alpha}_j, \left(i = 1, 2, ..., m\right). \tag{2.8}$$

Аналогично, матрица $\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})$ (2.6) имеет размерность $(m \times k)$ с элементами

$$\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_j} \right\}, \ \left(i = 1, 2, ..., m; l = 1, 2, ..., k\right). \tag{2.9}$$

Поскольку

$\dfrac{\partial f_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_l} = \dfrac{\partial}{\partial \beta_l}\left[ \sum_{j=1}^{k} \dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j \right] = \dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \quad (i = 1, 2, ..., m; \quad l = 1, 2, ..., k)$, то слагаемое $\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (2.6) также является мерным вектором с компонентами

$$\left(\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)_i = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \dot{\beta}_l, \left(i = 1, 2, ..., m\right). \tag{2.10}$$

Следовательно, вектор скорости движения инерционных элементов упругого манипулятора является $m$-мерным, определяется согласно (2.6),

(1.2), (1.4), (2.7)-(2.10) и может быть представлен в виде суммы двух векторов

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) + \mathbf{v}^2\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\right), \tag{2.11}$$

где вектор $\mathbf{v}^1\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)$ определяет скорость движения абсолютно жесткой модели манипулятора (п.1) (1.5), а $\mathbf{v}^2\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\right)$ зависит от упругости соединительных узлов, имеет порядок $\varepsilon$ и $\mathbf{v}^2\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right) \equiv 0.$

**2.2. Ускорение движений манипулятора с упругими шарнирами**. Вычисляя производные по времени от функции (2.6), определим ускорения движений инерционных элементов и схвата упругого манипулятора

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{dF}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{dt}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\mathbf{dF^1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\mathbf{dt}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F^1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\mathbf{dF^2}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\mathbf{dt}}\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})\ddot{\boldsymbol{\beta}}. \tag{2.12}$$

Первые два слагаемых в (2.12) соответствуют ускорению движения инерционных элементов и схвата абсолютно жесткой модели манипулятора (1.3)-(1.7). Остальные четыре слагаемых обусловлены упругостью соединительных узлов звеньев манипулятора и имеют порядок $\varepsilon$.

Матрица $\dfrac{d\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{dt}$ согласно (2.7) имеет размерность $(m \times n)$ с элементами

$$\frac{d\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{dt} = \left\{\mathbf{F}^1_{il}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\right\}, \ \left(i = 1, 2, ..., m; \quad l = 1, 2, ..., n\right), \tag{2.13}$$

где

$$F^1_{il}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j}\dot{\alpha}_j + \sum_{p=1}^{k} \frac{\partial^2 f_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_l \partial \beta_p}\dot{\beta}_p =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j}\left[\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p}\beta_p\right]\dot{\alpha}_j + \sum_{\vartheta=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \beta_\vartheta}\left[\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p}\beta_p\right]\dot{\beta}_\vartheta, \tag{2.14}$$

и $F^1_{il}\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{0}\right) \equiv 0, \left(i = 1, 2, ..., m; \quad l = 1, 2, ..., n\right).$

Компонентами вектора $\dfrac{d\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{dt}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ согласно (2.13). (2.14) являются

$$\left(\frac{d\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{dt}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{F}^1_{il}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\dot{\alpha}_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j}\left[\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p}\beta_p\right]\dot{\alpha}_j + \sum_{\vartheta=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \beta_\vartheta}\left[\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p}\beta_p\right]\dot{\beta}_\vartheta\right\}\dot{\alpha}_l. \tag{2.15}$$

Аналогично, матрица $\dfrac{d\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0})}{dt}$ в (2.12) имеет размерность $(m \times k)$ с элементами

$$\frac{d\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{dt}=\left\{\mathbf{F}_{il}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})\right\},(i=1,2,...,m;l=1,2,...,k). \quad (2.16)$$

Здесь элементы $\mathbf{F}_{il}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ матрицы (2.16) определяются согласно (2.9) и имеют вид

$$\mathbf{F}_{il}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{\partial\beta_l\partial\alpha_j}\dot{\alpha}_j \quad (i=1,2,...,m;\ l=1,2,...,k). \quad (2.17)$$

Вектор $\dfrac{d\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{dt}\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (2.12) имеет следующие компоненты:

$$\left(\frac{d\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{dt}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)_i=\sum_{l=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{\partial\beta_l\partial\alpha_j}\dot{\alpha}_j\right]\dot{\beta}_l\ (i=1,2,...,m). \quad (2.18)$$

Векторы $\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\boldsymbol{\beta}}$ согласно (2.12), (2.7)-(2.10) имеют следующие компоненты, соответственно:

$$\left(\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{\partial\beta_l}\beta_l\right)\right]\ddot{\alpha}_j,$$

$$\left(\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right)_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})}{\partial\beta_l}\ddot{\beta}_l,(i=1,2,...,m). \quad (2.19)$$

Вектор ускорения движений упругого манипулятора имеет размерность $m$, и согласно (2.12)-(2.19) его можно также представить в виде суммы двух векторов ускорения

$$\mathbf{w}=\mathbf{w}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}})+\mathbf{w}^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}), \quad (2.20)$$

где вектор $\mathbf{w}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ определяется согласно первым двум слагаемым выражения (2.12) и соответствует ускорению движения абсолютно жесткой модели манипулятора (1.9), а вектор ускорения $\mathbf{w}^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}})$ определяется последними четырьмя слагаемыми (2.12) и зависит от упругости соединительных узлов между звеньями манипулятора. Вектор ускорения $\mathbf{w}^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}})$ имеет порядок $\varepsilon$ и $\mathbf{w}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{0},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{0})\equiv 0$.

Итак, соотношения (2.5), (2.6), (2.11), (2.12), (2.20) позволяют в рамках предположения (2.3) определить положения, скорость и ускорение движения инерционных элементов и схвата манипулятора с упругими соединительными узлами между звеньями в зависимости от обобщенных координат $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, скоростей $(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ и ускорений $(\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}})$.

**3. Математическая модель многозвенного манипулятора с упругими звеньями и упругими соединительными шарнирами (узлами).** Исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора, звенья которого или часть из них моделируются как упругие

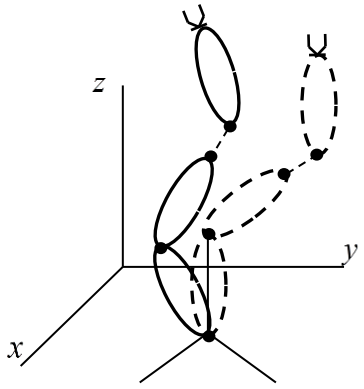


Рис.3.1

тела или одномерные упругие стержни. Предполагается также, что соединительные шарниры между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости (рис. 3.1) [8-10].

Обобщенные координаты манипулятора с абсолютно жесткими звеньями и идеальными соединительными узлами, как и в п.1, обозначим через компоненты вектора

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T. \qquad (3.1)$$

По аналогии с п.1 и 2 предполагается, что все соединительные узлы представляют собой цилиндрические шарниры или поступательные кинематические пары.

Через компоненты вектора

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)^T, \quad (k \le n) \qquad (3.2)$$

обозначим дополнительные обобщенные координаты, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах (п.2).

Обобщенные координаты, описывающие деформацию упругих звеньев манипулятора, являются компонентами вектора $\mathbf{w}(t, \xi)$

$$\mathbf{w}(t, \xi) = \left(w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), \ldots, w_\Lambda(t, \xi)\right)^T, \qquad (3.3)$$

где $\xi$ – произвольная точка упругого звена (фиг.3.2), $\xi \in [0, l_i]$

Положение инерционных элементов манипулятора в пространстве характеризуем $m$ координатами (п.1, 2)

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)^T. \qquad (3.4)$$

Кинематику манипулятора с упругими звеньями и упругими соединительными узлами между звеньями в общем случае можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), \qquad (3.5)$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ – заданная $m$ -мерная вектор-функция от вектора аргументов, структура которой зависит от выбора обобщенных координат жесткой (3.1) и упругой модели манипулятора (3.2), (3.3), а также от геометрии манипулятора [9,10].

Для дальнейшего исследования основной задачи кинематики упругих манипуляторов через обобщенные координаты $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}$, скорости $\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{\mathbf{w}}$ и ускорения $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\mathbf{w}}$ предполагаем, что обобщенные координаты $\beta_i$ малы, а жесткость $C_i$ соединительных узлов велика, т.е. (п.2)

$$\beta_i \square \varepsilon, C_i \square \varepsilon^{-1} (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (3.6)$$

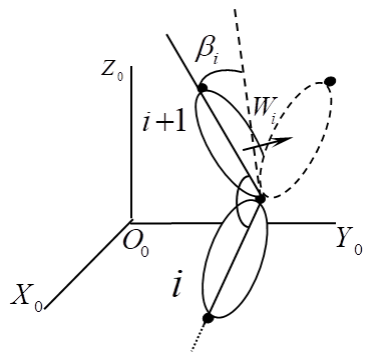


Рис. 3.2

где $\varepsilon << 1$ – малый параметр, а координатный вектор $\mathbf{w}(t,\xi)$ в рамках линейной теории упругости мал по сравнению с линейными размерами упругого звена и удовлетворяет соотношениям [9, 10]

$$w_i(t,\xi) \square \varepsilon, \quad w_i'(t,\xi) \square \varepsilon, \; \dot{w}_i(t,\xi) \square \varepsilon, \; (i=1,2,\ldots,\Lambda) \tag{3.7}$$

(здесь частные производные функции $w_i(t,\xi)$ по $\xi$ обозначены штрихом, а по $t$ – точкой).

В рамках предположений (3.6), (3.7) применим асимптотические методы малого параметра [8, 9, 11, 16].

Формула Тейлора для (3.5) относительно $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{w}$ с точностью $\varepsilon$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial \beta_i}\beta_i + \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_j} w_j + O(\varepsilon^2). \tag{3.8}$$

Введя обозначения

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0}), \; \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial \beta_i}\beta_i, \; \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_j} w_j, \tag{3.9}$$

где имеют место условия

$$\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}) \equiv 0, \; \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}) \equiv 0, \tag{3.10}$$

разложения (3.8) с учетом обозначения (3.9) представим в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}). \tag{3.11}$$

Формула (3.11) позволяет исследовать кинематику манипулятора, когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья абсолютно жесткие $(\boldsymbol{\beta} \equiv 0, \mathbf{w} \equiv 0)$ (п.1):

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.12}$$

а также в случае упругих соединительных узлов и абсолютно жестких $(\mathbf{w} \equiv 0)$ звеньев (п.2)

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{3.13}$$

и когда упругими являются звенья манипулятора, а соединительные узлы идеальные:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}). \tag{3.14}$$

Все эти частные математические модели манипуляторов имеют место и широко исследуются в научной литературе.

**3.1. Обобщенная скорость движений упругого манипулятора.** Вычисляя производные по времени от функций (3.11), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}} \quad (3.15)$$

или $$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}), \quad (3.16)$$

где $\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ (п.1), (3.17)

$\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (п.2), (3.18)

$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}}$ - (3.19)

вектор скорости, который зависит от упругих свойств звеньев манипулятора. Заметим, что $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv 0$.

Для определения вектора скорости $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}}$ (3.19), вычислим элементы матрицы $\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ и $\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})$.

Матрица $\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ имеет размерность $(m\times n)$ с элементами

$$\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}) = \left\{\frac{\partial f_i^{2^*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_j}\right\}_{i,j=1}^{m,n}, \frac{\partial f_i^{2^*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_l}w_l\right), \quad (3.20)$$

Компонентами вектора $\left(\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i$, где $(i=1,2,\ldots,m,)$ являются

$$\left(\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_l}w_l\right)\dot{\alpha}_j\right], (i=1,2,\ldots,m,) \quad (3.21)$$

Матрица $\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}) = \left\{\frac{\partial f_i^{2^*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_j}\right\} \ (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,\Lambda), \quad (3.22)$$

где $\frac{\partial f_i^{2^*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_l}w_l\right) = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_j}$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,\Lambda)$.

Вектор $\left(\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}}\right)$ имеет компоненты

$$\left(\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}}\right)_i = \sum_{j=1}^{\Lambda}\left[\frac{\partial}{\partial w_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{w}_j\right] = \sum_{j=1}^{\Lambda}\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_j}\right)\dot{w}_j \ (i=1,2,...,m) \quad (3.23)$$

Алгоритм вычисления скорости движения упругого манипулятора по формуле (3.15) в общем случае сводится к необходимости дополнительного определения элементов матриц (3.20), (3.22) и вычислению компонентов векторов (3.21) и (3.23).

**3.2. Ускорение движений упругого манипулятора.** Вычисляя производные по времени от функции (3.15), определим ускорение движений инерционных элементов и схвата упругого манипулятора

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \\ + \mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\mathbf{w}}. \quad (3.24)$$

По аналогии с (3.16) вектор ускорения (3.24) представим в виде трех

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}), \quad (3.25)$$

где $\mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ (п.1.2),

$\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\boldsymbol{\beta}}$ (п.2.2),

а вектор ускорения

$$\mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\mathbf{w}} \quad (3.26)$$

обусловлен упругостью звеньев манипулятора.

Когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья абсолютно жесткие, имеем

$$\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv 0, \ \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv 0. \quad (3.27)$$

Определим элементы матриц $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ и $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})$ согласно (3.20) и (3.22). Матрица $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ является

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}) = \left\{F_{ij}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})\right\}, (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n). \quad (3.28)$$

где

$$F_{ij}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_j}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right] = \\ = \sum_{\vartheta=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_\vartheta \partial \alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{\alpha}_\vartheta + \sum_{p=1}^{\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{w}_p \quad (3.29)$$

$$\left(F_{ij}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0) \equiv 0; \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n\right).$$

Компоненты вектора $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ определяются согласно, (3.29)

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})\dot{\alpha}_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{\vartheta=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_\vartheta\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{\alpha}_\vartheta + \sum_{p=1}^{\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial w_p\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{w}_p\right]\dot{\alpha}_j. \quad (3.30)$$

Элементами матрицы $\frac{d}{dt}F^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})$ размерностью $(m\times\Lambda)$ являются

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}) = \left\{F_{ij}^4(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})\right\}, (i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,\Lambda), \quad (3.31)$$

где согласно (3.22) $F_{ij}^4(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_l\partial w_j}\dot{\alpha}_l$, $(i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,\Lambda)$.

Компоненты вектора $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}}$ определяются согласно (3.22), (3.31) и имеют вид

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\dot{\mathbf{w}}\right)_i = \sum_{j=1}^{\Lambda}F_{ij}^4(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})\dot{w}_j = \sum_{j=1}^{\Lambda}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_l\partial w_j}\dot{\alpha}_l\right)\dot{w}_j,\ (i=1,2,...,m). \quad (3.32)$$

Векторами $\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\mathbf{w}}$ из (3.24) являются

$$\left(\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\ddot{\alpha}_j\right],\ (i=1,2,...,m), \quad (3.33)$$

$$\left(\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})\ddot{\mathbf{w}}\right)_i = \sum_{j=1}^{\Lambda}\left[\frac{\partial}{\partial w_j}\left(\sum_{l=1}^{\Lambda}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\ddot{w}_j\right] = \sum_{j=1}^{\Lambda}\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial w_j}\right)\ddot{w}_j, \quad (3.34)$$

Компоненты вектора ускорения $\mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}})$, обусловленного упругостью звеньев манипулятора и имеющего размерность $m$. Векторы $\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}})$ имеют порядок $\varepsilon$.

**Выводы.** Для определения скорости и ускорения движений многозвенного манипулятора с абсолютно твердыми звеньями и идеальными шарнирами, а также многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и упругими звеньями в рамках линейной теории упругости с применением асимптотических методов малого параметра необходимо вычислить элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ (1.3), $\mathbf{F}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ (2.7), $\mathbf{F}^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})$ (2.9), $\mathbf{F}^3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ (3.20), $\mathbf{F}^4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})$ (3.22) и их производные по времени, сделать ряд вычислений, которые для современной вычислительной техники являются весьма простыми, и по формулам (1.2), (2.6), (2.12), (3.15), (3.24) определить все кинематические соотношения. Методы исследования позволяют представить кинематику упругого манипулятора в рамках абсолютно жесткой модели путем введения дополнительных величин, обус-

ловленных упругостью конструкции. Результаты исследования можно учитывать при моделировании движений гибких манипуляционных систем.

Институт механики НАН РА
e-mail: ghukasyan10@yandex.ru

**А. А. Гукасян**

**Уточненные модели многозвенного манипулятора с упругими элементами и кинематический анализ движений**

Приводятся результаты математического моделирования многозвенных манипуляторов с абсолютно твердыми звеньями, соединенными идеальными шарнирами, а также манипуляторов, звенья которых моделируются как упругие тела. Соединительные шарниры содержат упругие элементы большой жесткости. В рамках линейной теории упругости с применением асимптотических методов малого параметра кинематические соотношения в общем случае представлены в виде суммы трех слагаемых, которые необходимо учитывать при моделировании движений упругих манипуляционных систем. Уточненные модели упругих манипуляторов и методы исследования позволяют представить кинематику упругих манипуляторов в рамках абсолютно жесткой модели путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью конструкции.

**Ա. Ա. Ղուկասյան**

**Առաձգական էլեմենտներով բազմօղակ մանիպուլյատորի ճշգրտված մոդելներ և շարժման կինեմատիկական անալիզ**

Բերված են բազմօղակ մանիպուլյատորի մաթեմատիկական մոդելավորման արդյունքները, երբ օղակները բացարձակ պինդ մարմիններ են՝ միացված իդեալական հանգույցներով, ինչպես նաև մանիպուլյատորի, որի օղակները առաձգական մարմիններ են: Միացման հանգույցները պարունակում են մեծ կոշտության առաձգական էլեմենտներ: Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում, կիրառելով փոքր պարամետրի ասիմպտոտական մեթոդները, կինեմատիկական առնչությունները, ընդհանուր դեպքում, ներկայացված են երեք գումարելիների տեսքով, որոնք անհրաժեշտ է հաշվի առնել առաձգական մանիպուլյատորի շարժումների մոդելավորման դեպքում: Առաձգական մանիպուլյատորի ճշգրտված մոդելները և հետազոտության մեթոդները թույլ են տալիս առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկան ներկայացնել բացարձակ կոշտ մոդելի շրջանակներում՝ ավելացնելով լրացուցիչ մեծություններ, որոնք պայմանավորված են կոնստրուկցիայի առաձգականությամբ:

**A. A. Ghukasyan**

**Refined Models of a Multi-Link Manipulator with Elastic Elements and Kinematic Analysis of Movements**

The results of mathematical modeling of multi-link manipulators with absolutely solid links connected by ideal hinges, as well as manipulators whose links are modeled as elastic bodies, are presented. The connecting hinges contain elastic elements of high

rigidity. In the framework of the linear theory of elasticity with the use of asymptotic methods of small parameter, kinematic relations, in general, are presented as the sum of three terms that must be taken into account when modeling the movements of elastic manipulation systems. Refined models of elastic manipulators and research methods allow us to present the kinematics of elastic manipulators within an absolutely rigid model by introducing additional quantities due to the elasticity of the structure.

## Литература


1. *Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Болотник Н. Н.* Манипуляционные роботы. М. Наука. 1989. 363 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С.101-113.
3. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С.118-124.
4. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* –Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С.33-41.
5. *Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И. и др.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С.63-71.
6. *Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Гукасян А. А. и др.* Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт 231, ИПМ АН СССР. М. 1984. 66 с.
7. *Болотник Н. Н., Гукасян А. А.* –Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С.38-46.
8. *Гукасян А. А.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. № 3. С. 79-87.
9. *Гукасян А. А.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 4. С. 53-64.
10. *Гукасян А. А.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 3. С. 68-83.
11. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л. Судпромгиз. 1958. 245 с.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М. Наука. 1979. 560 с.
13. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. Наука. 1968. 475 с.
14. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* и др. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука. 1983. 392 с.
15. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М. Наука. 1972. 576 с.
16. 16.*Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М. Наука. 1987. 365 с.
17. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М. Наука. 1975. 568 с.
18. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М. Наука. 1977. 480 с.