

4. Позняк Э.Л. Нелинейные колебания роторов на подшипниках качения // Изв. вузов. Машиностроение. - 1971. - № 1. - С. 40-46.  
 5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. - М.: Наука, 1971. - 520 с.  
 6. Papoulis A.A. New method of inversion of the Laplace transform // Quarterly of applied mathematics. - 1957. - № 14. - P.

Военный институт МО РА

20.11.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. 11, № 1, 1998, с. 7-11

УДК 539.30:620.1

МАШИНОСТРОЕНИЕ

С.Х.ГЕВОРКЯН, Н. УЗУНОГЛУ

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В СОСТАВНОМ ВОЛНОВОДЕ

Ուսումնասիրվում է երկտեսակյան ալիքների տարածման խնդիրը դանդաղ և արագազանի ալիքաառի՝ ծածկույթ ունեցող դեպքում Միջշված 1 երկաթաեղան ալիքների տարածման արագության կախվածությունն ալիքաառի և ծածկույթի նյութերի մեխանիկական հատկություններից:

Изучается задача распространения продольных волн в случаях, когда упругий цилиндрический волновод имеет покрытие. Определена зависимость скорости распространения продольных волн от механических свойств материалов волновода и покрытия.

Библиогр.: 4 назв.

The problem of longitudinal wave propagation when the elastic cylindrical waveguide has a coating is studied. The dependence of longitudinal wave propagation on mechanical properties of the waveguide and coating materials is determined.

Ref 4

Вопросам распространения упругих волн в слоистых средах посвящено много работ, среди которых можно отметить [1, 2, 4]. В настоящей работе рассматривается задача распространения продольных волн в составном упругом цилиндрическом волноводе с малым по сравнению с толщиной упругого покрытия радиусом при различных физико-механических свойствах материалов волновода и покрытия. Получено дисперсионное уравнение, в некоторых предельных случаях определены скорости распространения продольных волн.

Пусть ось цилиндрического волновода совпадает с осью  $z$ , а радиус волновода равен  $R$ . Принимается, что продольная волна распространяется параллельно оси  $z$  с фазовой скоростью  $C$ . Предполагается, что волна характеризуется осевой симметрией относительно оси  $z$ . В дальнейшем все величины, относящиеся к волноводу, будем отмечать индексом 1, а величины, относящиеся к упругой среде покрытия, верхним индексом 2.

Для решения задачи воспользуемся волновыми потенциалами  $\Phi^{(i)}$  и  $\Psi^{(i)}$  ( $i=1,2$ ). Волновые уравнения в силу предположенной симметрии деформации относительно оси  $z$  имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{C_1^{(i)}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi^{(i)} = 0, \quad \left( \Delta - \frac{1}{C_2^{(i)}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi^{(i)} = 0, \\ \left( \Delta - \frac{1}{C_2^{(2)}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi^{(2)} = 0, \quad \left( \Delta - \frac{1}{C_2^{(2)}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \Psi^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа;  $C_1^{(i)} = [(\lambda_i + 2\mu_i)/\rho_i]^{1/2}$ ,  $C_2^{(i)} = (\mu_i/\rho_i)^{1/2}$  - скорость распространения продольных и поперечных волн в материалах волновода и покрытия;  $\lambda_i, \mu_i$  - коэффициенты Ламе;  $\rho_i$  - плотность материалов.

Составляющие вектора перемещения  $U = U(U_r, 0, U_z)$  связаны с потенциалами  $\Phi^{(i)}$  и  $\Psi^{(i)}$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} U_r^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial r \partial z}, \quad U_z^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial z^2} - \frac{1}{C_2^{(i)}} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial t^2}, \\ U_r^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z}, \quad U_z^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi^{(2)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя эти соотношения в формулы для напряжений

$$\sigma_{rr}^{(i)} = 2\mu_i \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \lambda_i \left( \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} \right), \quad \sigma_{zz}^{(i)} = \mu_i \left( \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial r} \right), \quad (3)$$

получим выражения напряжений при помощи потенциалов  $\Phi^{(i)}, \Psi^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} = (\lambda_i + 2\mu_i) \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \Psi^{(i)}}{\partial r^2 \partial z} \right) + \lambda_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial r \partial z} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial t^2} - \frac{1}{C_2^{(i)}} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial z \partial t^2} \right), \\ \sigma_{rz}^{(i)} = \mu_i \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z} + 2 \frac{\partial^3 \Psi^{(i)}}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{C_2^{(i)}} \frac{\partial^3 \Psi^{(i)}}{\partial r \partial t^2} \right), \\ \sigma_{zz}^{(2)} = 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial r \partial z} \right) + \frac{\lambda_2}{C_1^{(2)^2}} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{rz}^{(2)} = 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \rho_2 \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение уравнений (1) и (2) ищем в следующем виде, который соответствует предположению о распространении продольной волны в направлении оси  $z$  с фазовой скоростью  $C$

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)} &= A J_0(v_1^{(1)} r) \cos k(z-ct), & \Psi^{(1)} &= B J_0(v_2^{(1)} r) \sin k(z-ct), \\ \Phi^{(2)} &= C K_0(v_1^{(2)} r) \cos k(z-ct), & \Psi^{(2)} &= D K_1(v_2^{(2)} r) \sin k(z-ct).\end{aligned}\quad (5)$$

где  $J_0, K_0, K_1$  - функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода,

$$K = \omega/c, \quad v_i^{(j)} = (K^2 - K_i^{(j)2})^{1/2}, \quad K_i^{(j)} = \omega/C_i^{(j)} \quad (i, j=1, 2).$$

$\omega$  - частота колебаний.

Длина волны  $\ell$  связана с величинами  $K$  и  $C$  зависимостью

$$\ell = 2\pi/k = 2\pi C/\omega. \quad (6)$$

Примем, что на цилиндрической поверхности  $r=R$  выполняются условия полного контакта

$$\begin{aligned}U_i^{(1)} &= U_i^{(2)}(R, z), & U_i^{(1)}(R, z) &= U_i^{(2)}(R, z), \\ \sigma_n^{(1)}(R, z) &= \sigma_n^{(2)}(R, z), & \sigma_n^{(1)}(R, z) &= \sigma_n^{(2)}(k, z).\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя в (2) и (4) выражения потенциалов  $\Phi^{(1)}$  и  $\Psi^{(1)}$  из (5) и используя рекуррентные формулы для функций Бесселя, получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно постоянных  $A, B, C, D$ :

$$A v_1^{(1)} \cdot J_1(v_1^{(1)} R) + B k J_1(v_2^{(1)} R) + C v_1^{(2)} K_1(v_1^{(2)} R) + D k \cdot K_1(v_2^{(2)} R) = 0.$$

$$A k J_0(v_1^{(1)} R) + B v_2^{(1)} \cdot J_0(v_2^{(1)} R) - C \cdot k \cdot K_0(v_1^{(2)} R) - D v_2^{(2)} K_0(v_2^{(2)} R) = 0.$$

$$\begin{aligned}A \left[ 2\mu_1 \left( -\frac{v_1^{(1)}}{R} J_1(v_1^{(1)} R) - v_1^{(1)} J_0(v_1^{(1)} R) \right) - \lambda_1 K_1^{(1)} J_0(v_1^{(1)} R) \right] + \\ + B \cdot 2k \cdot \mu_1 \left[ -\frac{v_2^{(1)}}{R} J_1(v_2^{(1)} R) + v_2^{(1)} J_0(v_2^{(1)} R) \right] -\end{aligned}\quad (8)$$

$$- C \left[ 2\mu_2 \left( \frac{v_1^{(2)}}{R} K_1(v_1^{(2)} R) + v_1^{(2)} K_0(v_1^{(2)} R) \right) - \lambda_2 k^{(2)2} K_0(v_1^{(2)} R) \right] -$$

$$- D \cdot 2k\mu_2 \left[ \frac{K_1(v_2^{(2)} R)}{R} + v_2^{(2)} K_0(v_2^{(2)} R) \right] = 0.$$

$$A \cdot 2k\mu_1 v_1^{(1)} J_1(v_1^{(1)} R) + B(2k^2 - k^{(1)2}) \mu_1 v_2^{(1)} J_1(v_2^{(1)} R) +$$

$$+ C 2k\mu_2 v_1^{(2)} K_1(v_1^{(2)} R) + D(2k^2 - k^{(2)2}) \mu_2 K_1(v_2^{(2)} R) = 0.$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (8) следует

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где

$$a_{11} = v_1^{(1)} J_1(v_1^{(1)} R), \quad a_{12} = k \cdot v_2^{(1)} J_1(v_2^{(1)} R), \quad a_{13} = (v_1^{(1)})^2 K_1(v_1^{(1)} R),$$

$$a_{14} = k \cdot K_1(v_2^{(1)} R), \quad a_{21} = k J_0(v_1^{(1)} R), \quad a_{22} = v_2^{(1)2} J_0(v_2^{(1)} R),$$

$$a_{23} = -k K_0(v_1^{(1)} R), \quad a_{24} = -v_2^{(2)} K_0(v_2^{(2)} R),$$

$$a_{31} = 2\mu_1 \left[ -\frac{v_1^{(1)}}{R} J_1(v_1^{(1)} R) + v_1^{(1)2} J_0(v_1^{(1)} R) \right] - \lambda_1 k_1^{(1)} J_0(v_1^{(1)} R),$$

$$a_{32} = 2k\mu_1 \left[ -\frac{v_2^{(1)}}{R} J_1(v_2^{(1)} R) + v_2^{(1)2} J_0(v_2^{(1)} R) \right],$$

$$a_{33} = -2\mu_2 \left[ \frac{v_1^{(2)}}{R} K_1(v_1^{(2)} R) + v_1^{(2)2} K_0(v_1^{(2)} R) \right] + \lambda_2 k_1^{(2)} K_0(v_1^{(2)} R),$$

$$a_{34} = -2k\mu_2 \left[ \frac{K_1(v_2^{(2)} R)}{R} + v_2^{(2)2} K_0(v_2^{(2)} R) \right],$$

$$a_{41} = 2k\mu_1 v_1^{(1)} J_1(v_1^{(1)} R), \quad a_{42} = (2k_2 - k_1^{(2)}) \mu_1 v_1^{(1)} J_1(v_2^{(1)} R),$$

$$a_{43} = 2k\mu_2 v_1^{(2)} K_1(v_1^{(2)} R), \quad a_{44} = (2k^2 - k_1^{(2)}) \mu_2 K_1(v_2^{(2)} R).$$

Рассмотрим предельные случаи: 1.  $\lambda_1 \rightarrow 0$ ,  $\mu_1 \rightarrow 0$ , 2.  $\lambda_2 \rightarrow 0$ ,

$\mu_2 \rightarrow 0$ .

Для первого случая из уравнения (9) получим

$$4\sqrt{1-\alpha_2^{(2)2}} \left[ \frac{1}{v_2^{(2)} R} + \frac{K_0(v_2^{(2)} R)}{K_1(v_2^{(2)} R)} \right] - \frac{2(2-\alpha_2^{(2)2})\sqrt{1-\alpha_2^{(2)2}}}{v_2^{(2)} R} \quad (10)$$

$$- \frac{(2-\alpha_2^{(2)2})^2 K_0(v_1^{(2)} R)}{\sqrt{1-\alpha_2^{(2)2}} K_1(v_1^{(2)} R)} = 0,$$

$$\sqrt{1-\alpha_1^{(2)2}} \sqrt{1-\alpha_2^{(2)2}} \frac{J_1(v_1^{(1)} R)}{J_0(v_1^{(1)} R)} - \frac{J_1(v_1^{(1)} R)}{J_0(v_2^{(1)} R)} = 0, \quad (11)$$

где  $\alpha_i^{(j)} = C_j/C_i^{(j)}$  ( $i, j=1, 2$ ).

Уравнение (10) соответствует задаче распространения продольных волн в упругой среде с цилиндрической полостью радиуса  $R$ , которая была рассмотрена в работе [3], а уравнение (11) - задаче распространения продольных волн в упругом цилиндре радиуса  $R$ , когда перемещения точек его поверхности ограничены. Учитывая асимптотические выражения для модифицированных функций Бесселя  $K_n$  и  $K_2$  при малых по сравнению с радиусом  $R$  длинах волн, уравнение (10) приводится к известному характеристическому уравнению поверхностных волн Рэлея:

$$4\sqrt{1-\alpha_1^2} \sqrt{1-\lambda_2^2} = (2-\alpha_2^2)^2, \quad (12)$$

Для второго предельного случая из уравнения (9) получим

$$\frac{k^2}{v_1^{(1)} v_2^{(1)}} - \frac{K_0(v_2^{(2)} R)}{K_1(v_2^{(2)} R)} = 0, \quad (13)$$

$$(k_2^{(1)2} - 2k^2) \left[ \frac{v_1^{(1)2} J_1(v_2^{(1)} R)}{J_0(v_2^{(1)} R)} - \frac{2v_2^{(2)} J_1(v_1^{(1)} R) J_1(v_2^{(1)} R)}{R J_0(v_1^{(2)} R) J_0(v_2^{(1)} R)} + \right. \quad (14)$$

$$\left. + \frac{v_2^{(2)2} J_1(v_1^{(1)} R)}{J_0(v_1^{(1)} R)} \right] + 4k^2 \left[ \frac{v_2^{(2)} J_1(v_1^{(1)} R)}{J_0(v_1^{(1)} R)} - \frac{v_2^{(2)} J_1(v_1^{(1)} R) J_1(v_2^{(1)} R)}{R J_0(v_1^{(2)} R) J_0(v_2^{(1)} R)} \right] = 0.$$

Уравнение (13) соответствует задаче распространения продольных волн в упругой среде с цилиндрической полостью, когда перемещения точек на поверхности полости ограничены, а уравнение (14) - задаче распространения продольных волн в упругом цилиндре радиуса  $R$ . Можно показать, что из уравнения (14) для малых радиусов  $R$  по сравнению с длиной волны  $\ell$ , используя разложение функции Бесселя  $J_0$  и  $J_1$  в ряд, при первом приближении значение фазовой скорости получается равным

$$c = \left[ \frac{\mu_1 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{\rho_1 (\lambda_1 + \mu_1)} \right]^{1/2} = \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2},$$

т.е. значению скорости распространения продольных волн в упругой среде, а при втором приближении выявляется дисперсия волны. Если длина волны мала по сравнению с радиусом волновода, то уравнение (14) переходит в характеристическое уравнение для волн Рэлея [2]. Таким образом, при малых по сравнению с толщиной упругого покрытия радиусах составного цилиндрического волновода, используя полученные трансцендентные уравнения, а также учитывая появление в некоторых предельных случаях волн Рэлея, с достаточной точностью можно оценить влияние неоднородности составного волновода на скорость распространения продольных волн, что делает возможным применение полученных результатов в волоконно-оптических системах связи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Изд-во АН СССР, 1957. - 502 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
3. Biot M.A. Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // Appl. Phys. - 1952. - № 23. - P. 997-1005.
4. Геворкян С.Х., Узуноглу Н. Распространение крутильных волн в составном волноводе // Изв. НАН и ГИУ Армении. Сер. ТН.-1997 - Т. 50, № 2. - С.73-76.