

УДК 621.391.1:62.507

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Е.Ш. БОЗОЯН

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СХЕМЫ С УЧЁТОМ ЧАСТОТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ СОСТОЯНИЙ ЕЁ ЭЛЕМЕНТОВ

Աշխատանքի հիմքում ընկած է մի սենսիվետ, ըստ որի գործառնական սխեմայի տարրի էլյուտ «պաշտահական սխալի» հավանականությունը համեմատական է սխեմայի գործառնության ընթացքում այդ էլրի վիճակի փոփոխման հաճախությանը: Դրա հիման վրա ստեղծում է տարրի ակտիվության հասկացությունը և ցույց է տրվում, որ սխեմայի հուսալիության բարձրացման համար բավական է բարձրացնել նրա առավել «ակտիվ» տարրերի հուսալիությունը:

В основе работы лежит точка зрения, согласно которой вероятность «случайной ошибки» на выходе элемента функциональной схемы пропорциональна частоте переключения состояния этого выхода при функционировании схемы. С учетом этого вводится понятие «активности» элемента. Показывается, что для повышения надежности схемы достаточно повысить надежность ее наиболее «активных» элементов.

На 1. Библиогр: 4 назв.

The viewpoint of this paper is to show the probability of «random error» on the element output of the functional scheme proportional to the state switching frequency of this output during functioning of the scheme. Moreover, a notion «activity» of the element has been introduced. It is also shown that in order to increase the reliability of the whole scheme, it is sufficient to increase the reliability of its most «active» elements.

Ref. 1. Ref. 4

Оценке надежности дискретных схем посвящено много работ [1-3] В них в процессе «формирования» ненадежности элементов, из которых «собрана» данная схема, учтено много физических и иных факторов (длительность работы, режимные условия и т.д.), способствующих ухудшению надежности работы этих элементов. Однако во всех этих работах не учитывался фактор частоты переключения состояний элементов в процессе функционирования схемы.

В основе данной работы лежит представление, согласно которому ненадежность элемента функциональной схемы существенным образом зависит от частоты переключения состояний его выхода при функционировании схемы. Реальность такого представления основана на том, что «случайные» ошибки на выходе элемента, которые составляют существенную часть среди всех типов ошибок, являются в основном последствием отклонений от допустимых пределов во временной диаграмме при переходе элемента из одного состояния к другому. Вероятность того, что на выходе элемента появляется «ошибочный» сигнал, при условии, что на входы поступают «правильные» сигналы, здесь принимается пропорциональной частоте переключения состояний на выходе.

1. Пусть $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная булева функция, а x_i с вероятностью $p(x_i = \alpha_i)$ принимает значение α_i ($p(x_i = 1) + p(x_i = 0) = 1$, $i = \overline{1, n}$). Предположим также, что значения, принимаемые переменными x_i и x_j ($i, j \in \overline{1, n}$, $i \neq j$), статистически независимы. Вероятность события $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ при случайном наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из нулей и единиц назовем нормой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и обозначим через $\|f(\bar{x})\|$. Эта вероятность вычисляется по формуле

$$\|f(\bar{x})\| = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n} \left(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \prod_{i=1}^n p(x_i = \alpha_i) \right). \quad (1)$$

Норма обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

1. $0 \leq \|f(\bar{x})\| \leq 1$.

2. $\|\bar{f}(\bar{x})\| = 1 - \|f(\bar{x})\|$.

3. $\|f_1(\bar{x}) \vee f_2(\bar{x})\| = \|f_1(\bar{x})\| + \|f_2(\bar{x})\| - \|f_1(\bar{x})f_2(\bar{x})\|$.

4. $\|f_1(\bar{x}) \oplus f_2(\bar{x})\| = \|f_1(\bar{x})\| + \|f_2(\bar{x})\| - 2\|f_1(\bar{x})f_2(\bar{x})\|$.

5. $\|f_1(x_1, \dots, x_k)f_2(x_{k+1}, \dots, x_n)\| = \|f_1(x_1, \dots, x_k)\| \|f_2(x_{k+1}, \dots, x_n)\|$.

Последнее свойство допускает следующее обобщение:

5'. Если $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(\bar{x}_1), \dots, h_k(\bar{x}_k))$, где $\bar{x}_i \cap \bar{x}_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, k}$,

$i \neq j$, $\bar{x}_1 \cup \dots \cup \bar{x}_k = \{x_1, \dots, x_n\}$, то

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in E^k} g(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \|h_1^{\sigma_1}(\bar{x}_1)\| \dots \|h_k^{\sigma_k}(\bar{x}_k)\|.$$

2. Пусть схема S имеет n входов и 1 выход, состоит из функциональных элементов $\mathcal{E}_1^{(n_1)}, \dots, \mathcal{E}_N^{(n_N)}$, где n_i — число входов элемента $\mathcal{E}_i^{(n_i)}$ ($i = \overline{1, N}$). Пусть элемент $\mathcal{E}_i^{(n_i)}$ при его безотказной работе реализует функцию $f_i(y_1^{(i)}, \dots, y_{n_i}^{(i)})$ ($i = \overline{1, n}$). Пусть входные сигналы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ схемы S статистически независимы и появляются соответственно с вероятностями $p(x_1 = \alpha_1), \dots, p(x_n = \alpha_n)$. Предполагается также, что схема работает в "тактовом" режиме, т.е. в момент времени t ($t = 0, 1, 2, \dots$) на ее входы поступает набор входных сигналов $(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$, и что события $x_i = \alpha_i(t_1)$ и $x_i = \alpha_i(t_2)$ ($i = \overline{1, n}$, $t_1 \neq t_2$) являются независимыми.

Пусть выход элемента $\mathcal{E}_i^{(n_i)}$ при безотказной работе всех элементов схемы относительно входов этой схемы реализует функцию $F_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, N}$). Заметим, в частности, что если $\mathcal{E}_N^{(n_N)}$ — "последний" элемент схемы (т.е. выход элемента $\mathcal{E}_N^{(n_N)}$ является выходом схемы), то схема будет

реализовывать функцию $F_i(x_1, \dots, x_n)$. Если в моменты времени t и $t+1$ на входы схемы поступают соответственно наборы $\bar{\alpha}(t)$ и $\bar{\alpha}(t+1)$, то событие $F_i(\bar{\alpha}(t)) \oplus F_i(\bar{\alpha}(t+1)) = 1$ называется "переключением" состояния элемента $\mathcal{E}_i^{(n)}$ ($i = \overline{1, N}$) в момент времени $t+1$. Вероятность этого события, которая не зависит от t , называется частотой переключения состояний этого элемента (обозначим ее через v_i) и вычисляется следующим образом:

$$v_i = \|F_i(\bar{x}(t)) \oplus F_i(\bar{x}(t+1))\| = \|F_i(\bar{x}(t))\| + \|F_i(\bar{x}(t+1))\| - 2\|F_i(\bar{x}(t))\| \|F_i(\bar{x}(t+1))\| = 2\|F_i(\bar{x})\| - 2\|F_i(\bar{x})\|^2 = 2\|F_i(\bar{x})\| \| \bar{F}_i(\bar{x}) \| \quad (2)$$

v_i принимает максимальное значение, если $\|F_i(\bar{x})\| = \| \bar{F}_i(\bar{x}) \| = 1/2$, т.е. $0 \leq v_i \leq 1/2$.

Впоследствии будем считать, что вероятность появления "ошибочного" сигнала на выходе элемента при условии, что на его входы поступают "правильные" сигналы, пропорциональна частоте переключения состояний выхода элемента. Назовём её вероятностью "ошибки" элемента.

Обозначив эту вероятность для элемента $\mathcal{E}_i^{(n)}$ через p_i , получим

$$p_i = \alpha_i v_i \quad (i = \overline{1, N}), \quad (3)$$

где α_i ($0 \leq \alpha_i \leq 1$) — постоянная, характеризующая технологический уровень производства той элементной базы, из которой собрана схема S .

Если все элементы схемы работают безотказно и на ее входы поступает набор сигналов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то на выходе схемы появляется "правильный" сигнал, который обозначим через (f_1, \dots, f_N) ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$). Тогда вероятность того, что на выходе схемы S появляется "ошибочный" сигнал при условии, что элементы $\mathcal{E}_1^{(n)}, \dots, \mathcal{E}_k^{(n)}$ "ошибаются" (т.е. они соответственно реализуют функции $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$), а все остальные элементы функционируют безотказно, равна

$$P_S(i_1, \dots, i_k) = \sum_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in B^n} \prod_{i=1}^k p(x_i = \alpha_i) \left((f_1, \dots, f_i, \dots, f_{i_k}, \dots, f_N)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \oplus \right. \\ \left. \oplus (f_1, \dots, \bar{f}_i, \dots, \bar{f}_{i_k}, \dots, f_N)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right).$$

Складывая все условные вероятности по формуле полной вероятности, получим вероятность появления "ошибочного" сигнала на выходе S :

$$P_S = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} P_S(i_1, \dots, i_k) \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} p_i \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (1 - p_i), \quad (4)$$

где сумма берется по всем $2^n - 1$ наборам индексов (исключая пустой набор, для которого $k=0$), а запись $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ означает $i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. Обозначим

$$\Omega_S(i) = P_S(i) p_i. \quad (5)$$

$\Omega_S(i)$ назовём активностью элемента $\Xi_i^{(n)}$ в схеме S . Выделив линейную часть относительно p_i ($i = \overline{1, N}$), представим формулу (5) в виде

$$P_S = \sum_{i=1}^N \Omega_S(i) + \varphi_S, \quad (6)$$

где φ_S — нелинейная часть. Некоторыми несложными комбинаторными преобразованиями можно оценить φ_S : если $Np \leq 1$, где $p = \max p_i$, $i = \overline{1, N}$, то $|\varphi_S| \leq (Np)^2$. Таким образом,

$$\left| P_S - \sum_{i=1}^N \Omega_S(i) \right| \leq (Np)^2. \quad (7)$$

При достаточно малом значении правой части (7) можно воспользоваться приближенной формулой:

$$P_S \approx \sum_{i=1}^N \Omega_S(i). \quad (8)$$

Как видно, надежность схемы в целом существенным образом зависит от надежности её наиболее активных элементов, которые являются главными "источниками" ненадежности схемы. Предполагая, что для любого i ($1 \leq i \leq N$)

$$\sum_{i=1}^N P_S(i)(3p_i^2 - 2p_i^3) + (Np)^2 < \varepsilon, \quad (9)$$

$$P_S(i)(3p_i^2 - 2p_i^3) < P_S(j)p_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (10)$$

можно описать простой алгоритм получения верхней оценки числа элементов. Трехкратным дублированием и надежным "голосованием" выходов экземпляров этих элементов получается схема, работающая безотказно с вероятностью $1 - \varepsilon$.

3. Рассмотрим технику вычисления активностей и частот переключения состояний элементов. Поскольку в обоих случаях все трудности в основном сосредоточены в вычислениях нормы булевой функции, то мы будем рассматривать только технику вычисления частоты переключения. Здесь основным средством является язык строчного описания (записи) схемы из функциональных элементов, рассмотренный в [4].

Пусть схема S содержит k базисных элементов, которые обозначим через $1, 2, \dots, k$, а элемент i имеет n_i входов и при безотказной работе реализует функцию $g_i^{(n_i)}$ ($i = \overline{1, k}$). В записи схемы символы $i^{(n_i)}$ всюду заменим на $g_i^{(n_i)}$ ($i = \overline{1, k}$). К полученному выражению многократно, в любом порядке, до тех пор, пока их возможно применять, применим следующие две процедуры.

1. Отрезки вида $g_i^{(n_i)} u_1 \dots u_{n_i}$, где u_1, \dots, u_{n_i} — переменные или формулы, реализующие функции, заменить на $g_i^{(n_i)}(u_1, \dots, u_{n_i})$.

2. Отрезок вида $M_i^{(1)}u$, а также символы $M_i^{(0)}$ всюду заменить на u , где u - переменная или формула, реализующая функцию.

В результате получим формулу (функцию), которая реализуется подсхемой. Пользуясь формулой (2) и свойствами 2-5, 5' нормы, находим частоту переключения элемента, выход которого является выходом рассмотренной подсхемы.

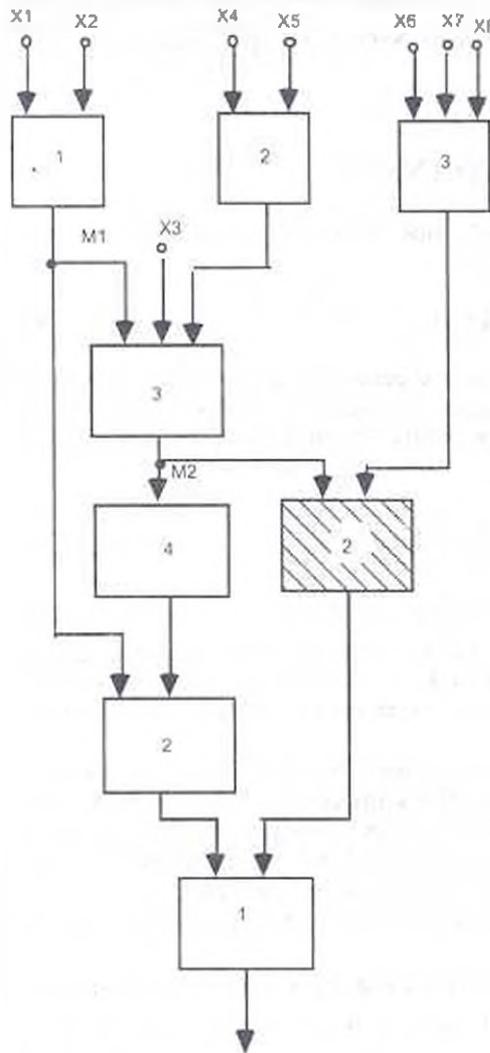


Рис.

Теперь для получения соответствующей функции многократно применим процедуру 1. Получим: $((x_1 x_2 \vee x_1) \oplus (x_4 \vee x_5)) \vee ((x_6 \vee x_7) \oplus x_8)$.

Обозначим эту функцию через $f(x_1, \dots, x_8)$. Она допускает следующую декомпозицию:

Пример. Рассмотрим схему с базисными элементами 1,2,3,4 (см. рис.), которые при их безотказной работе соответственно реализуют функции

$$g_1^{(2)}(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2,$$

$$g_2^{(2)}(y_1, y_2) = y_1 \vee y_2,$$

$$g_3^{(2)}(y_1, y_2, y_3) = (y_1 \vee y_2) \oplus y_3,$$

$$g_4^{(1)}(y) = \bar{y}.$$

Записью этой схемы является:

$$1^{(2)} 2^{(2)} M_1^{(1)} 1^{(2)} x_1 x_2 4^{(1)} M_2^{(1)} 3^{(2)} x_3$$

$$\times M_1^{(0)} x_1 2^{(2)} x_4 x_5 2^{(2)} M_2^{(0)} 3^{(3)} x_6 x_7 x_8.$$

Символы $1^{(2)}$, $2^{(2)}$, $3^{(2)}$, $4^{(1)}$ соответственно заменим на $g_1^{(2)}$, $g_2^{(2)}$,

$g_3^{(2)}$, $g_4^{(1)}$. Получим

$$g_1^{(2)} g_2^{(2)} M_1^{(1)} g_1^{(2)} x_1 x_2 g_4^{(1)} M_2^{(1)} g_3^{(2)} x_3$$

$$\times M_1^{(0)} x_1 g_2^{(2)} x_4 x_5 g_2^{(2)} M_2^{(0)} g_3^{(3)} x_6 x_7 x_8.$$

Из этого выражения выделим отрезок с весом -1, начало которого соответствует заштрихованному элементу 2. Этот отрезок будет $g_2^{(2)} M_1^{(0)} g_3^{(3)} x_6 x_7 x_8$. После удаления метки $M_1^{(0)}$ (применение процедуры 2) получим запись подсхемы, выход которой является выходом заштрихованного элемента:

$$g_2^{(2)} g_3^{(3)} g_1^{(2)} x_1 x_2 x_1 g_2^{(2)} x_4 x_5 g_3^{(3)} x_6 x_7 x_8.$$

$f = g(h_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), h_2(x_6, x_7, x_8))$, где $h_1 = (x_1 x_2 \vee x_1) \oplus (x_4 \vee x_5)$,
 $h_2 = (x_6 \vee x_7) \oplus x_8$. В свою очередь, h_1 и h_2 также допускают
 декомпозицию $h_1 = h'_1 \oplus h''_1$, $h_2 = h'_2 \oplus h''_2$, где $h'_1 = x_1 x_2 \vee x_3$,
 $h''_1 = x_4 \vee x_5$, $h'_2 = x_6 \vee x_7$. Находим норму функции f , принимая
 $p(x_1 = 1) = p(x_2 = 1) = \frac{1}{4}$, $p(x_3 = 1) = \frac{1}{2}$, $p(x_4 = 1) = \dots = p(x_8 = 1) = \frac{3}{4}$.

Для этого заранее находим нормы функций h'_1 , h''_1 , h'_2 , h_1 и h_2 :

$$\|h'_1\| = \|x_1 x_2 \vee x_3\| = \|x_1 x_2\| + \|x_3\| - \|x_1 x_2 x_3\| = \frac{17}{32}$$

$$\|h''_1\| = \|x_4\| + \|x_5\| - \|x_4 x_5\| = \frac{15}{16}$$

$$\|h_1\| = \|h'_1\| + \|h''_1\| - 2\|h'_1 h''_1\| = \frac{121}{256}$$

$$\|h'_2\| = \|x_6\| + \|x_7\| - \|x_6 x_7\| = \frac{15}{16}$$

$$\|h_2\| = \|h'_2\| + \|x_8\| - 2\|h'_2 x_8\| = \frac{9}{32}$$

Итак, $\|f\| = \|g(h_1, h_2)\| = \|h_1 \vee h_2\| = \|h_1\| + \|h_2\| - \|h_1 h_2\| = \frac{5087}{8192}$

Таким образом, частота переключения заштрихованного элемента (рис.) схемы равна

$$v = 2 \cdot \frac{5087}{8192} \left(1 - \frac{5087}{8192} \right) \approx 0.44$$

Результаты работы могут быть применены в области автоматизации проектирования дискретных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы: Сб. Ст. - М.: Изд-во ИЛ, 1956. - С. 68-139.
2. Бозоян Ш.Е. Построение надежных схем, реализующих конечный автомат, из ненадежных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1977. - № 2. - С. 100-108.
3. Бозоян Ш.Е. К построению надежных схем из ненадежных элементов // ДАН Арм ССР. - 1975. - Т. 50, № 2. - С. 70-75.
4. Бозоян Ш.Е. Язык описания функциональных схем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1978. - № 6. - С. 158-166.

ГИУА

16.10.1995