

$$h_{21\omega} = \frac{D_E}{D_p} \frac{\exp\left[-\frac{V_1}{kT} \ln\left(\frac{Q_p}{N_G \sqrt{\pi D_p t_p}}\right)\right]}{\sqrt{1 - V_1/(kT)}} \times$$

$$\times \left\{ Q_p \operatorname{erf}\left[\frac{x_{j2} \sqrt{1 - V_1/(kT)}}{2\sqrt{D_p t_p}}\right] - Q_{Gn} \operatorname{erf}\left[\frac{x_{j2} \sqrt{1 - V_1/(kT)}}{2\sqrt{D_{Gn} t_{Gn}}}\right] \right\} \quad (12)$$

$$\times \left\{ Q_p \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{jk}}{2\sqrt{D_p t_p}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_{j2}}{2\sqrt{D_p t_p}}\right) \right] - Q_{Gn} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{jk}}{2\sqrt{D_{Gn} t_{Gn}}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_{j2}}{2\sqrt{D_{Gn} t_{Gn}}}\right) \right] \right\}$$

Согласно формуле (12), рассчитывается $h_{21\omega}$ в зависимости от x_{j2} и x_{jk} при фиксированной толщине активной базы $x_{jk} - x_{j2} = W_{BA}$. Полученные значения представлены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян А.А., Авагян Р.В., Малышева Л.И. Исследование влияния глубины залегания эмиттерного перехода на коэффициент инжекции эмиттера силовых транзисторов серии ТК // Технология быстродействующих силовых полупроводниковых приборов: Сб. науч. ст. - Таллин: Валгус, 1984. - С. 112-116.
2. Авагян Р.В., Варданян А.А., Киракосян Г.Г., Шаболян А.С. Силовые твердотельные транзисторные ключи с многокаскадным усилением // Изв. АН АрмССР. Сер. ТН. - 1990. - Т. 43, № 5. - С. 220 - 225.
3. Киракосян Г.Г., Макарян Г.А., Шаболян А.С. Определение условий надежной работы составного транзистора в режиме насыщения // Изв. НАН Армении. Сер. ТН - 1994. - Т. 37, № 1-2. - С. 49-52.
4. Блихер А. Физика силовых биполярных и полевых транзисторов. - М.: Энергоатомиздат, 1986. - 265 с.
5. Тугов Н.М., Глсбов В.А., Чарыков Н.А. Полупроводниковые приборы. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 387 с.

НПП 'Транзистор'

14.05.1996

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. L, № 1, 1997, с. 40 - 45.

УДК 681.325.5

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Х.В. КЕРОПЯН, Э.А. КАЗАРЯН, Т.Ю. БАРОЯН

СТАЦИОНАРНОЕ УКРУПНЕНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ղեկավարվող կիսամարկովյան գործընթացի լավարկման խնդրի չափի փոքրացման համար առաջարկվում է օգտագործել քարդ հստակագրերի հաստատուն խոշորացման մեթոդը: Չեղկերպվում են լեմմաներ, որոնք հաստատում են սկզբնական և խոշորացված դիսկոնտինյուական կիսամարկովյան գործընթացների՝ միավոր ժամանակում միջին հաստատուն շահույթների և ղեկավարման լավարկման ռազմավարության հավասարությունը:

Предлагается использовать методы стационарного фазового укрупнения сложных систем для уменьшения размерности задач оптимизации управляемых полумарковских процессов. Формулируются леммы, утверждающие равенство средних стационарных доходов за единицу времени и оптимальных стратегий управления для исходного и укрупненного управляемых полумарковских процессов.

Библиогр.: 6 назв.

A stationary phase enlargement method of complex systems is proposed to decrease the dimensionality of controlled semimarkoff processes optimization tasks. Some lemmas affirming the equality between average stationary returns per unit of time and optimal control strategies for initial and enlarged controlled semimarkoff processes are formulated.

Ref. 6.

Модели управляемых полумарковских процессов (УПМП) нашли широкое применение в задачах надежности, технического обслуживания, структурной и параметрической оптимизации сетей ЭВМ и систем передачи данных [1, 2].

Особенностью задач оптимизации систем данного класса является большая размерность моделирующего функционирования исследуемой системы УПМП и соответствующей задачи математического программирования. Для решения проблемы больших размерностей задач оптимизации в настоящее время разработаны различные методы точного и приближенного агрегирования, декомпозиции и укрупнения [1-5]. В предлагаемой работе для задач оптимизации УПМП используются разработанные в [2, 5] алгоритмы и методы точного (стационарного) фазового укрупнения сложных систем. Перейдем к формулированию задачи.

Пусть $x(t, f) = (E, F, P^f(t), R^f)$ — эргодичный УПМП, определенный на конечном множестве состояний E , $E = \{1, n\}$; F — конечное множество стратегий управления: $F = \{f\}$; $F = \bigcup_{i \in E} F_i$; $F_i = \{f_1^i, \dots, f_{k_i}^i\}$, F_i — множество, а k_i — количество управлений в i -ом состоянии УПМП; $P^f(t)$ — полумарковская матрица УПМП: $P^f(t) = \|P_{ij}^f(t)\|$ при f стратегии управления; R^f — вектор доходов за единицу времени пребывания УПМП в состояниях E при f стратегии управления: $R^f = (r_i^f; i \in E)$.

В качестве целевой функции оптимизации $x(t, f)$ используем средний стационарный доход за единицу времени, получаемый процессом при f стратегии управления g^f , $f \in F$. Тогда, согласно [3], задача оптимизации $x(t, f)$ может быть сформулирована следующим образом:

$$\max_{f \in F} \left(g^f = \sum_{i \in E} \eta_i^f r_i^f \rho_i^f / \sum_{i \in E} \eta_i^f \rho_i^f \right), \quad \rho^f = \rho^f P^f, \quad \sum_{i \in E} \rho_i^f = 1, \quad \rho_i^f \geq 0 \quad i \in E, \quad (1)$$

где η_i^f — среднее время пребывания $x^f(t, f)$ в i -ом состоянии $i \in E$, равное

$$\eta_i^f = \sum_{j \in E} \int_0^\infty t dP_{ji}^f(t); \quad P^f — матрица переходных вероятностей, вложенная в$$

$x(t, f)$ цепи Маркова: $P = \lim_{t \rightarrow \infty} P^t(1)$; $P^t = \|P_{ij}^t\|$; ρ^t — вектор стационарного распределения, вложенный в $x(t, f)$ цепи Маркова: $\rho^t = (\rho_i^t; i \in E)$

Основная трудность решения задачи (1) обусловлена большой размерностью P^t . Для уменьшения размерности задачи (1) воспользуемся алгоритмами точного фазового укрупнения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [2, 5]. Вначале рассмотрим алгоритм укрупнения однородных СЛАУ. Пусть задана СЛАУ

$$\rho = \rho P,$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ — левый собственный вектор матрицы P :

$$0 \leq \rho_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \rho_i = 1;$$

$P = \|P_{ij}\|$ — стохастическая матрица с элементами $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad 0 \leq P_{ij} \leq 1, \quad i, j = \overline{1, n}$.

Пусть n переменных разбиты на m групп, при этом в первую группу входят $\overline{1, n_1}$ переменные, во вторую — $n_1 + 1, n_2$ и т.д., в m -ю группу — $n_{m-1} + 1, n_m$. Для построения укрупненной СЛАУ матрицы укрупнения C и C^{-1} определяются следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{P}_{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\rho}_{(m)} \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} I_{(n_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{(n_2)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{(n_m)} \end{pmatrix},$$

где $\bar{\rho}_{(i)}$ и $I_{(n_i)}$ — соответственно левые и правые собственные векторы i -й "разреженной" системы с матрицей $\bar{P}_{(i)}$, $i = \overline{1, m}$:

$$\bar{\rho}_{(i)} = \bar{P}_{(i)}^{-1}, \quad I_{(n_i)} = \bar{P}_{(i)} I_{(n_i)},$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{\rho}_{(i)} = 1, \quad 0 \leq \bar{\rho}_{(i)} \leq 1, \quad I_{(n_i)} = 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = n_{i-1} + 1, n_i.$$

$\bar{P}_{(i)}$ матрицы определяются из P с помощью обобщенного алгоритма Гаусса [6]. В частности, при $m=2$ для $\bar{P}_{(1)}$ и $\bar{P}_{(2)}$ имеем

$$\bar{P}_{(1)} = P_{11} + P_{12}(1 - P_{22})^{-1}P_{21}, \quad \bar{P}_{(2)} = P_{22} + P_{21}(1 - P_{11})^{-1}P_{12},$$

где P_{ij} , $i, j = \overline{1, 2}$ — соответствующие подматрицы P . Укрупненная СЛАУ определяется в виде

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} \bar{P}, \quad \sum_{i=1}^m \bar{\rho}_i = 1, \quad 0 \leq \bar{\rho}_i \leq 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad \bar{P} = C P C^{-1}.$$

Для решения "разреженной", укрупненной и первоначальной СЛАУ справедливы соотношения

$$\hat{\rho}_i = \sum_{j=\overline{a_{i-1}+1}}^n \rho_j, \quad \bar{\rho}_{ij} = \rho_j / \hat{\rho}_i, \quad \rho_i = \hat{\rho}_i \bar{\rho}_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{n_{i-1}+1}, n_i.$$

Рассмотренный алгоритм можно использовать и для укрупнения неоднородных СЛАУ. Пусть задана СЛАУ:

$$x = xA + y, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $0 \leq x_i$, $0 \leq y_i$, $i = \overline{1, n}$, а элементы матрицы $A = \|a_{ij}\|$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Для укрупнения (2) аналогично [2] построим вспомогательную однородную СЛАУ

$$\alpha = \alpha P; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

где P — стохастическая матрица с элементами

$$P_{ij} = a_{ij} + r_i t_j, \quad r_i = y_i / \sum_{j=1}^n y_j, \quad t_j = 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Для решений (2) и (3) справедливо соотношение $x_i = \alpha_i x$, $i = \overline{1, n}$, где

$$x = \sum_{j=1}^n y_j / \sum_{j=1}^n \alpha_j t_j.$$

Для укрупнения (2) на m групп воспользуемся рассмотренным для однородных СЛАУ алгоритмом укрупнения, откуда для решения (2) получаем

$$x_i = x \alpha_i = x \hat{\alpha}_i \bar{\alpha}_{ij} = \hat{x}_i \bar{x}_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{n_{i-1}+1}, n_i,$$

где $\hat{x}_i = x \hat{\alpha}_i = x \sum_{j=\overline{n_{i-1}+1}}^n \alpha_j = \sum_{j=\overline{n_{i-1}+1}}^n x \alpha_j$, $\bar{x}_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} = x / \hat{x}_i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{n_{i-1}+1}, n_i$.

Из анализа полученных соотношений следует, что укрупнение (3) эквивалентно укрупнению (2) с теми же матрицами C и C^* . Для построения стационарно укрупненного УМПП $x(t, \alpha) = (\bar{E}, \bar{F}, \bar{R}^a, \bar{P}^a(t))$ предположим, что множество состояний $x(t, f) \in E$ расщеплено на m ($m < n$) непересекающихся подмножеств E_i , $i = \overline{1, m}$, $\bigcup_{i=1}^m E_i = E$.

Тогда $\bar{E}$ определяется укрупнением E_i , $i = \overline{1, m}$ в одно состояние i , $i \in \bar{E}$; $\bar{E} = \{1, m\}$. Множество стратегии $\bar{F} = \{\alpha\}$ определяется следующим образом: $\bar{F} \bigcup_{i \in \bar{E}} F_i$, $\bar{F} = \bigcup_{i \in \bar{E}} F_i$, $i \in \bar{E}$, $|\bar{F}| = |\bar{F}|$. Отметим, что каждой стратегии α , $\alpha \in \bar{F}$ однозначно соответствует стратегия Γ из $\bar{F}$.

Для построения вектора $\hat{R}^*$ и матрицы $\hat{P}^*(t)$ определим соответствующие матрицы укрупнения C^α и $C^{-\alpha}$:

$$C^\alpha = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_{(1)}^\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_{(2)}^\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\rho}_{(m)}^\alpha \end{pmatrix}; \quad C^{-\alpha} = \begin{pmatrix} I_{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{(m)} \end{pmatrix}$$

где $\bar{\rho}_{(i)}^\alpha$ и $I_{(i)}$ — соответственно левые и правые собственные векторы, построенные на основе P^i на подмножествах E_i , $i \in \hat{E}$ "разреженных" матриц $P_{\alpha i}^\alpha$, $i \in \hat{E}$:

$$\bar{\rho}_{(i)}^\alpha = \bar{\rho}_0^\alpha P_{\alpha i}^\alpha; \quad \sum_{i \in \hat{E}} \bar{\rho}_{(i)}^\alpha = 1, \quad i \in \hat{E}; \quad I_{(j)} = P_{(j)}^\alpha I_{(j)}, \quad I_{(j)} = 1, \quad j \in E_i, \quad i \in \hat{E}.$$

Тогда $\hat{R}^*$ и $\hat{P}^*(t)$ определяются в виде

$$\hat{R}^* = C^\alpha R^1; \quad \hat{P}^*(t) = C^\alpha P^1(t) C^{-\alpha}.$$

Задача оптимизации $\hat{x}(t, \alpha)$ формулируется аналогично (1) следующим образом:

$$\max_{\alpha \in I} \left(\hat{g}^\alpha = \frac{\sum_{i \in \hat{E}} \hat{\eta}_i^\alpha \hat{r}_i^\alpha \hat{\rho}_i^\alpha}{\sum_{i \in \hat{E}} \hat{\eta}_i^\alpha \hat{\rho}_i^\alpha} \right), \quad (4)$$

$$\hat{\rho}^\alpha = \hat{\rho}^\alpha P^\alpha; \quad \sum_{i \in \hat{E}} \hat{\rho}_i^\alpha = 1, \quad \hat{\rho}_i^\alpha \geq 0, \quad i \in \hat{E}.$$

где

$$\hat{\eta}_i^\alpha = \sum_{j \in E} \int_0^t \text{td} P_{ji}^\alpha(t); \quad \hat{P}^\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}^\alpha(t); \quad \hat{\rho}^0 = C^\alpha P^1 C^{-\alpha}.$$

Для рассматриваемых УПМП $\hat{x}(t, \alpha)$ и $x(t, f)$ справедливы нижеследующие леммы.

Лемма 1. Средние стационарные доходы для исходного $x(t, f)$ и укрупненного $\hat{x}(t, \alpha)$ УПМП за единицу времени при условии $f = \alpha$ равны $\hat{g}^1 = g^1$.

Доказательство:

$$g^1 = \sum_{i \in E} \eta_i^1 r_i^1 / \sum_{i \in E} \eta_i^1 \rho_i^1 = \sum_{i \in E} d_i^1 r_i^1 = \sum_{j \in E} \sum_{i \in E_i} \hat{d}_i^1 \bar{d}_i^1 r_i^1 = \sum_{j \in E} \hat{d}_j^1 \hat{r}_j^1 = \hat{g}^1,$$

где d_i^1 , d_i^1 , $\bar{d}_i^1$ — векторы стационарных распределений исходного, укрупненного и j -го "разреженного" УПМП:

$$d_i^1 = \frac{\rho_i^1 \eta_i^1}{\sum_{j \in E} \rho_j^1 \eta_j^1} = \frac{\bar{\rho}_i^1 \bar{\rho}_i^1 \eta_i^1}{\sum_{j \in E} \sum_{i \in E_j} \bar{\rho}_i^1 \eta_i^1} = \frac{\bar{\rho}_i^1 \eta_i^1}{\sum_{j \in E} \bar{\rho}_j^1 \eta_j^1} \cdot \frac{\bar{\rho}_i^1 \eta_i^1}{\eta_i^1} = \bar{d}_i^1 \bar{d}_i^1 \quad \text{при } i \in E_i, \quad j \in \hat{E}.$$

где

$$p_i = p_i' \bar{p}_j \text{ при } i \in E_1, j \in \hat{E}, \bar{p}_j = \sum_{i \in E_1} p_i' \eta_i', j \in \hat{E}.$$

Лемма 2. Если $\alpha^* \in \bar{F}$ — оптимальная стационарная стратегия для укрупненного УМПП $\bar{x}(t, \alpha)$, то она оптимальна и для исходного УМПП $x(t, f)$. Доказательство леммы аналогично приведенному в [2] результату для цепей Маркова.

Таким образом, задача оптимизации $x(t, f)$ (1) размерности n сведена к аналогичной задаче оптимизации $\bar{x}(t, \alpha)$ (2) меньшей (желаемой) размерности m ($m < n$). Основная сложность при построении $\bar{x}(t, \alpha)$ обусловлена процедурой определения матриц укрупнения S и S^{-1} . Соответствующие рекомендации по их построению для различного класса систем представлены в [2, 5]. Заметим, что при $\eta_i' = 1, i \in E$ из представленных результатов можно получить результаты, приведенные в [2] для управляемых цепей Маркова.

Предложенная выше методика была применена для оптимизации структуры локальной десятиузловой сети с потоком из 15 задач. Сравнение результатов оптимизации первоначальной и укрупненной до двух узлов сети показало выигрыш времени в 3,7 раз при одинаковых величинах критерия оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Надежность и эффективность в технике. Справочник / Под ред. Б.В. Гнеденко. - М.: Машиностроение, - Т. 2, 1987. - 267 с.
2. Керопян Х.В., Керопян С.А., Асратян М.А. Декомпозиция и укрупнение сетей массового обслуживания. - Деп. в Арм. НИИНИТН 41 Ар. - 89, Деп. 1989. - 80 с.
3. Мавян Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решения. - М., 1977. - 223 с.
4. Бабаджанян А.А. Методы агрегирования. - Препринт ВЦ АН АрмССР. 82-3. - Ереван, 1982. - 42 с.
5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. - Киев: Наукова думка, 1982. - 376 с.
6. Гавтмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 550 с.

ГИУА

10.10.1995