Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. XLIX. № 1, 1996. с. 23-27

УДК 621.396.671 ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

М.А. АРАМЯН

РАСЧЕТ УСРЕДНЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕМЫ ГРИНА

Արտահայտելով մեկուսիչ մարմնի էներգիան իր դիպոլային մոմենտով և կիրառելով վերջինիս բնորոշումը, կապ է հաստատվել ներառման դիպոլային մոմենտի և նրա բևեռացված լիցքերի միջև: Կիրառելով Գրինի թեորեմը, կապ է գտնվել ներառման մակերևույթի վրայի պոտենցիալի և միջավայրի պարամետրերի միջև: Նույնատիպ հաշվարկներ կատարվել են նաև մոդելի համար: Իրական համակարգի և մոդելի ծավալների ներսի տրված կետերի պոտենցիալների հավասարության պայմանից հնարավոր է եղել հաշվել դիսպերս համակարգի դիէլեկտրիկական թափանցելիության միջին արժեքը:

Выражая энергию диэлектрического тела через ее дипольный момент и используя определение последнего, выявлена связь между дипольным моментом включений и их поляризованными зарядами. На основании теоремы Грина получена связь между потенциалом на поверхности включении и параметрами среды. Аналогичные вычисления произведены и для модели. Из условия равенства потенциалов заданных точек внутри объема на модели и реальной среды удается вычислить среднее значение проницаемости дисперсной системы.

Библиогр.: 8 назв.

Expressing the dielectric body energy through its dipole moment and using the characteristics of the moment a connection between dipole moment of inclusions and their polarized charges has been revealed. The connection between the potential on the surface of the inclusions and parameters of the medium has been obtained on the basis of Green's theorem. Analogous calculations have been produced for the model as well. From the condition of the potential equation for given points inside the volume of the model and real medium it became possible to calculate the average value of the dispersion system permeability.

Ref. 8.

Известно, что неоднородные системы имеют широкое применение в разных областях, поэтому важными задачами являются расчет потенциальных полей в таких средах и вычисление их усредненных параметров [1-3]. Из-за сложности структуры этих систем указанные задачи решены приближенными методами, в связи с этим появляются новые исследования в этой области [4-6].

В данной статье поставлена новая задача - рассчитать поля и вычислить эффективные параметры неоднородных систем путем вычисления зарядов, накапливающихся на границе раздела дисперсной фазы и дисперсионной среды. Эта задача решается аналитически с использованием теоремы Грина.

Предположим, что в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε объемные заряды ρ расположены в конечной области пространства, как это имеет место в реальных системах. Выделим объем V_0, регулярная поверхность S_0 которого все пространство делит на две области - внутреннюю V_0 и внешнюю V_1. Если внешнее электрическое поле с напряженностью $\bar{E}_0$ однородное, то теорема Грина применима не только к V_0, но и к внешней области V_1 [7].

Предположим, что заданная точка $M(x', y', z')$ находится внутри области V_1, внутренняя поверхность которой равна S_0, а внешняя - S_1 стремится к бесконечности. Согласно теореме Грина, интеграл по поверхности S_1 стремится к нулю, а потенциал в заданной точке равен [7]:

$$\varphi(x', y' z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V_1} \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS. \qquad (1)$$

Первый член этого уравнения представляет собой потенциал от зарядов ρ, находящихся внутри объема V_1, а поверхностные интегралы учитывают все заряды вне объема (то есть внутри объема V_0). Однако второй член этого уравнения эквивалентен также потенциалу простого электрического слоя зарядов, распределенных по поверхности с плотностью

$$\tau = \varepsilon \partial\varphi / \partial n, \qquad (2)$$

а третий член - потенциалу двойного электрического поля на поверхности S_0 с плотностью дипольных моментов

$$p_e = \varepsilon\varphi \qquad (3)$$

При этом поверхностный дипольный момент p_e двойного слоя есть вектор, который равен пределу

$$\bar{p}_e = \bar{n}_0 \lim_{\ell_e \to 0,\, \sigma \to \infty} (\sigma \ell_e), \qquad (4)$$

где ℓ_e – бесконечно малая толщина двойного слоя, $\bar{n}_0$ – единичный вектор положительной нормали в точках на поверхности S_0, направленный из V_1.

Исходя из этого, доказывается, что заряды, находящиеся внутри поверхности S_0 (внутри V_0), могут быть заменены эквивалентными простым и двойным слоями, плотность которых определяется по (2) и (3), без каких-либо изменений потенциалов во внутренних точках области V_1. В это же время потенциалы в точках области V_0 будут определяться только по приложенному внешнему полю $\bar{E}_0$. Используем эти данные для решения следующей задачи.

Предположим, что в дисперсионной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 1$ размещены дисперсные фазы (включения) с ДП ε_2 и объемами V_2. Пусть они занимают ограниченную область пространства, что имеет место в реальных дисперсных системах (смесях). Из области выделим физически бесконечно малый объем V_0, вмещающий в себя n включении. Вся система находится под воздействием внешнего однородного поля с напряженностью $\bar{E}_0$. В этом случае в пространстве будут расположены поляризованные заряды включении с объемной плотностью ρ_2. Если рассмотренная точка находится в области V_1, то используя теорему Грина, будем иметь

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{\rho_2}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}dS -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\varphi_2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + \varphi_{E_0}, \tag{5}$$

где второй член уравнения эквивалентен потенциалу зарядов простого электрического слоя на поверхности S_0 и равен поляризованному заряду, находящемуся внутри области V_0 с n включениями, а третий член - потенциалу двойного электрического слоя тех же включений. Эти два члена уравнения (5) выразим через соотношения (2) - (3), учитывая, что теперь граничные условия диэлектрик-диэлектрик определяются на границе раздела неоднородностей.

С использованием теоремы векторного поля для энергии на поляризацию находящихся в области V_0 n включений получена формула [5, 6]:

$$W_2 = (1/2)\varepsilon_0(1-\varepsilon_2)\bar{E}_0\sum_{i=1}^{n}\int_{V_{2i}}\vec{E}_{2i}dv, \tag{6}$$

где $\bar{E}_{2i}$ – напряженность электрического поля внутри i-й частицы, V_{2i} – его объем. Эта же энергия равна [8]

$$W_2 = -(1/2)\sum_{i=1}^{n}\bar{E}_0\bar{p}_{2i}, \tag{7}$$

где $\bar{p}_{2i}$ – дипольный момент i-го включения. Приравнивая (6) и (7), имеем

$$\bar{p}_{2i} = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\int_{V_{2i}}\bar{E}_{2i}dV. \tag{8}$$

Но по определению [9]:

$$\bar{p}_{2i} = \int_{V_{2i}}\bar{\rho}_{2i}\bar{r}dV. \tag{9}$$

Имея $\bar{E}_{2i} = -\mathrm{grad}\varphi_{2i}$, $\bar{\rho}_{2i} = -\mathrm{grad}\sigma_{2i}$, совместно решая (8)-(9) и применяя теорему о градиенте для поверхностей плотности связанных зарядов, получим

$$\sigma_{2i} = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\partial\varphi_{2i}/\partial\bar{r}, \tag{10}$$

где $\partial\varphi_{2i}/\partial\bar{r}$ – значение производной потенциала на поверхности i-го включения. Так как в области V_0 имеются n частиц, то перенесенный на поверхность S_0 заряд простого электрического слоя будет равен

$$Q_2' = \sum_{i=1}^{n}S_{2i}\sigma_{2i} = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\sum_{i=1}^{n}S_{2i}\partial\varphi_{2i}/\partial\bar{r}. \tag{11}$$

В реальных дисперсных системах двойной электрический слой имеет конечную толщину ℓ_c и определенную конечную проводимость σ_{2i}.

Теперь из (8) и (9) для плотности дипольного момента двойного электрического слоя i-го включения будем иметь

$$\bar{p}_{a} = -\varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\oint \varphi_{2i} d\bar{S} = -\oint \sigma_{a} r d\bar{S} = -\oint_{S_2} \sigma_{a} \ell_{2i} d\bar{S}. \quad (12)$$

откуда

$$\sigma_{a} = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\varphi_{2i} / \ell_{2i}, \quad (13)$$

где φ_{2i} — значение потенциала на поверхности включений. Следовательно, перенесенный на поверхность S_0 заряд двойного электрического слоя будет равен

$$Q_2'' = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\sum_{i=1}^{n} S_{2i}\varphi_{2i} / \ell_{2i}. \quad (14)$$

Производя в физически бесконечно малом объеме V_0 усреднение, из реальной дисперсной системы получаем эквивалентную ей модель, в которой область V_0 превращается в однородную среду с ДП ε, что и является усредненным значением проницаемости дисперсной системы [5, 6]. При этом вне области V_0 потенциал в заданной точке M не изменяется. Выполняя аналогичные расчеты для модели, отличающейся от реальной среды только средой в области V_0, вместо (11) и (14) имеем

$$Q' = S_0\sigma' = S_0\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\partial\varphi / \partial\bar{r}, \quad (15)$$

$$Q'' = S_0\sigma'' = S_0\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\varphi / \ell_c, \quad (16)$$

где $\partial\varphi / \partial\bar{r}$ — производная потенциала на поверхности S_0, φ — значение потенциала на той же поверхности. Так как в реальной среде и в ее модели потенциал в заданных точках $M(x', y', z')$ по теореме Грина не изменяется, то приравнивание (5) к потенциалу точки $M(x', y', z')$ модели дает

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\varphi_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \quad (17)$$

Согласно условиям (1)-(4), соотношение (17) эквивалентно равенству

$$Q_2' - Q_2'' = Q' - Q'' \quad (18)$$

Учитывая (11), (14)-(16), последнее уравнение принимает вид

$$\varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\left[\sum_{i=1}^{n} S_{2i}\left(\frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial\bar{r}} - \varphi_{2i} / \ell_{2i}\right)\right] = \varepsilon_0 S_0(\varepsilon - 1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{r}} - \varphi / \ell_c\right). \quad (19)$$

Таким образом, усредненное значение ДП неоднородной среды ε можем вычислить из (19), если известны формы дисперсных фаз.

Предположим, включения представляют собой сферические частицы одинаковых размеров. Тогда область V_0 также имеет форму сферы [5, 6]. В теории Максвелл-Вагнеровской поляризации не учитывается влияние двойного электрического слоя и потенциал внутри сферических тел в модели Вагнера (при $\varepsilon_1 = 1$) равен [2]

$$\varphi_{2i} = \varphi_2 = -3E_0 r\cos\theta/(\varepsilon_2 + 2), \quad \varphi = 3E_0 r\cos\theta/(\varepsilon + 2). \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получаем формулу Максвелла-Вагнера (при $\varepsilon_1 \neq 1$):

$$\varepsilon=\varepsilon_1[\varepsilon_2+2\varepsilon_1+2f_2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)]/[\varepsilon_2+2\varepsilon_1-f_2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)], \qquad (21)$$

где $f_2=nV_2/V_0$ – объемная доля включений.

Полученное соотношение (19) позволяет рассчитать ε смесей с другими формами включений с учетом взаимодействия частиц и двойного электрического слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нетушил А.В.** Модели электрических полей в гетерогенных средах нерегулярных структур //Электричество. - 1975. - № 10. - С. 1-8.
2. **Духин С.С., Шилов В.Н.** Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах. - Киев: Наук. думка, 1972. - 205 с.
3. **Карапетян М.А.** Исследование электрического поля в неоднородной среде. - Ереван: Луйс, 1990.-216 с.
4. **Арамян М.А.** К расчету обобщенной проводимости неоднородных систем //ИФЖ.- 1988. Т. 55, №1. - С. 143-144.
5. **Арамян М.А.** Расчет поля в кубической пространственной системе сферических частиц, помещенных во внешнее однородное поле // Теоретическая электротехника. 1990. - № 12. - С. 107-118.
6. **Арамян М.А.** Уточнение в теории расчета диэлектрической проницаемости Максвелла-Вагнера // Коллоидный журнал. - 1992.- Т. 54, № 5. - С. 24-33.
7. **Стрэттон Дж.А.** Теория электромагнетизма. -М.: - Л.: Гостехиздат, 1948. - 540 с.
8. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. -М.; -Л.: Гостехиздат, 1966. – с.

ГИУА 9. 06. 1994

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. XLIX, № 1, 1996, с. 27-32.

УДК 621.382.026

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Г.Г. КИРАКОСЯН, Г.А. МАКАРЯН, А.С. ШАБОЯН

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ОТ НАПРЯЖЕНИЯ НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ СИЛОВЫХ ТРАНЗИСТОРОВ

Կոլեկտորային հոսանքի ողջ տիրույթի համար տեսականորեն և փորձնականորեն հետազոտված է կոլեկտորային հոսանքի ուժեղացման գործակցի առնչությունը կոլեկտոր-էմիտեր հագեցման լարումից: Հաստատված է, որ կոլեկտորային հոսանքի փոքր և միջին արժեքների դեպքում այդ առնչությունն ունի ուժեղ բնույթ, իսկ մեծ հոսանքների դեպքում այն թուլանում է: Ցույց է տրված, որ այդ առնչության տեսական կորերը լավ համընկնում են փորձնական կորերի հետ:

Теоретически и экспериментально исследована зависимость коэффициента усиления (КУ) от напряжения насыщения коллектор-эмиттер силового транзистора во всем диапазоне коллекторного тока. Установлено, что при средних и малых значениях коллекторного тока зависимость коэффициента усиления от напряжения насыщения коллектор-эмиттер имеет сильный характер, а при больших токах -