ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжение в составных упругих телах. - Ереван: Изд. АН АрмССР. 1987. - 338 с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука. 1992. - 384 с.
3. Партон В.З. Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. - М.: Наука. 1985. - 504 с.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. -М.: Гостехиздат. 1960. - 456 с.

И-т механики НАН РА 15.X.1995

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН). т. XLIX. № 3. 1995. с. 145-150

УДК 539.3 МАШИНОСТРОЕНИЕ

В.С. ТОНОЯН. С.А. МЕЛКУМЯН

КОСОСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Դիտարկված է օրթոտրոպ կիսահարթության համար շեղ համաչափ կոնտակտային խնդիր, երբ կիսահարթությունը թուլացված է ուղղահայաց կիսաանվերջ ճեղքով: Կիսահարթության եզրի վերջավոր մասում կիրառված է ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված կոշտ դրոշմ: Պարզության համար ընդունված է, որ ճեղքի եզրերն ազատ են արտաքին ազդեցություններից: Խնդրի լուծումը փնտրված է Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով: Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը սկզբից բերվել է զույգ ինտեգրալ հավասարման, իսկ այնուհետև Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Ցույց է տրված վերջինիս լուծելիությունը: Ստացված են դրոշմի տակ նորմալ լարման և ճեղքից դուրս շոշափող լարման համար անջատված եզակիությամբ բանաձևեր:

Рассматривается кососимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена полубесконечным вертикальным разрезом. На конечном участке границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенной относительно оси разреза. Для простоты принимается, что берега разреза свободны от внешних воздействий. Решение задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сначала парного интегрального уравнения, а затем интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические выражения для нормального напряжения под штампом и касательного напряжения вне разреза с выделенной корневой особенностью.

Библиогр.: 6 назв.

An oblique symmetric contact problem for orthotropic semi-plane is considered when the semi-plane is weakened by a semi-infinite vertical cut. On the finite section of the bound a tough die with an arbitrary smooth form base symmetrically spaced relative to the cut is applied. It is simply supposed that the cut edges are free from external effects. The solution of the problem is presented in the form of Fourier integral sum. The determination of unknown integration functions is taken first to the solution of a pair of integral equaition, then to the solution of Fredholm equation of the second kind. Last equation solubility is proved. Analytical expressions for normal stress under die and tangential stress outside the cut with a distinguished root feature are obtained.

Ref. 6.

Рассмотрим плоскую кососимметричную контактную задачу для упругой ортотропной полуплоскости $(x \geq 0)$, которая на конечном расстоянии от границы имеет вертикальный полубесконечный разрез $(a \leq x \leq \infty)$. На конечном участке границы $(-b \leq z \leq b)$ полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза $(z = 0)$. Предположим, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Рассмотрим плоское деформированное состояние. Так как задача кососимметрична относительно оси $z = 0$, то можно ограничиться рассмотрением только области квадранта $(0 \leq x \leq \infty,\ 0 \leq z < \infty)$. Симметричный случай указанной задачи приведен в [1].

Поставленная задача математически сводится к решению уравнений Ламе в перемещениях со следующими граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xz}(0,z) = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad \sigma_z(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty;\\
&U_x(0,z) = f_1(z), \quad 0 < z \leq b; \quad \sigma_x(0,z) = f_2(z), \quad b < z < \infty; \qquad (1)\\
&U_x(x,0) = 0, \quad 0 < x \leq a; \quad \tau_{xz}(x,0) = 0, \quad a < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Решение задачи ищем в виде сумм интегралов Фурье:

$$
\begin{aligned}
U_x(x,z) &= \frac{1}{C_{11}}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{C_{11}}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\sin\beta z\,d\beta,\\
U_z(x,z) &= \frac{1}{C_{44}}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha,z)\cos\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{C_{44}}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,x)\cos\beta z\,d\beta.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где

$$
\begin{aligned}
\overline{U}(\alpha,z) &= \sum_{k=1}^{2} \Delta_1(t_k)A_k(\alpha)e^{-m_k z};\\
\overline{U}(\beta,x) &= \sum_{k=1}^{2} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2}B_k(\beta)e^{-\beta x/t_k};\\
\overline{W}(\alpha,z) &= \sum_{k=1}^{2} \Delta_2(t_k)A_k(\alpha)e^{-m_k z};\\
\overline{W}(\beta,z) &= \sum_{k=1}^{2} \Delta_2(t_k)B_k(\beta)e^{-\beta x/t_k}.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Здесь $A_k(\alpha)$ и $B_k(\beta)$ — неизвестные функции интегрирования, которые нужно определить из условий (1). Плотности, входящие в (3), определяются по формулам

$$
\Delta_1(t_k) = \left(\frac{C_{13}}{C_{44}} + 1\right)t_k, \quad \Delta_2(t_k) = 1 - \frac{C_{44}}{C_{11}}t_k^2, \qquad (4)
$$

а t_k — из биквадратного уравнения

$$
\frac{C_{33}}{C_{11}}t^4 + \left(\frac{C_{13}^2}{C_{44}C_{11}} + 2\frac{C_{13}}{C_{11}} - \frac{C_{13}}{C_{44}}\right)t^2 + 1 = 0. \qquad (5)
$$

где C_{11}, C_{13}, C_{33}, и C_{44} — коэффициенты упругости ортотропного материала.

Используя основные соотношения теории упругости для исследуемой среды [2] и выражений (2), (3), можно все компоненты тензора напряжений выразить через $A_k(\alpha)$ и $B_k(\beta)$:

$$\sigma_x(x,z)=\int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_x(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha-\int_0^\infty \beta^2\overline{\sigma}_x(\beta,x)\sin\beta z d\beta;$$

$$\sigma_z(x,z)=\int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_z(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha-\int_0^\infty \beta^2\overline{\sigma}_z(\beta,x)\sin\beta z d\beta; \qquad (6)$$

$$\tau_{zx}(x,z)=-\int_0^\infty \alpha^2\overline{\tau}_{zx}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha+\int_0^\infty \beta^2\overline{\tau}_{zx}(\beta,x)\cos\beta z d\beta.$$

где

$$\overline{\sigma}_x(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{2}[\Delta_1(t_k)-\frac{C_{13}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)t_k]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z},$$

$$\overline{\sigma}_x(\beta,x)=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^3}+\frac{C_{13}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)\right]B_k(\beta)e^{-\beta x/t_k};$$

$$\overline{\sigma}_z(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{C_{13}}{C_{11}}\Delta_1(t_k)-\frac{C_{33}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)t_k\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z};$$

$$\overline{\sigma}_z(\beta,x)=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{C_{13}}{C_{11}}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^3}+\frac{C_{33}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)\right]B_k(\beta)e^{-\beta x/t_k};$$

$$\overline{\tau}_{zx}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{C_{44}}{C_{11}}\Delta_1(t_k)t_k+\Delta_2(t_k)\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}; \qquad (7)$$

$$\overline{\tau}_{zx}(\beta,x)=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{C_{44}}{C_{11}}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2}-\frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}\right]B_k(\beta)e^{-\beta x/t_k}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем [3]:

$$A_k(\alpha)=a_kA_1(\alpha),\ \ B_k(\beta)=b_kB_1(\beta)\ , \qquad (8)$$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \beta B_1(\beta)\sin\beta z d\beta=\frac{C_{11}}{n_{11}}f_1(z),\ \ 0<z\le b,\\ \displaystyle\int_0^\infty \beta^2B_1(\beta)\sin\beta z d\beta=-\frac{1}{n_{12}}f_2(z)+\\ \displaystyle+\frac{1}{n_{12}}\sum_{k=1}^{2}a_k\int_0^\infty \alpha^2A_1(\alpha)e^{-\alpha t_k z}d\alpha,\ \ b<z<\infty,\end{cases} \qquad (9)$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha = 0, \quad 0 < x \le a, \\
\int\limits_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha = \dfrac{1}{m_{12}}\sum\limits_{j=1}^{2} b_j^* \int\limits_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) e^{-\beta x t_j}\,d\beta, \quad a < x < \infty.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Здесь

$$
a_1 = 1, \; a_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \; a_{1k} = \frac{C_{13}}{C_{11}}\Delta_1(t_k) - \frac{C_{33}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)t_k;
$$

$$
b_1 = 1, \; b_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}}, \; b_{1k} = \frac{C_{44}}{C_{11}}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} - \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k};
$$

$$
n_{11} = \sum_{k=1}^{2}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2}b_k, \; n_{12} = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k} + \frac{C_{13}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)\right]b_k;
$$

$$
m_{12} = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{C_{44}}{C_{11}}\Delta_1(t_k)\cdot t_k + \Delta_2(t_k)\right]a_k;
$$

$$
a_k^* = \left[\Delta_1(t_k) - \frac{C_{13}}{C_{44}}\Delta_2(t_k)t_k\right]a_k;
\tag{11}
$$

$$
b_j^* = \left[\frac{C_{44}}{C_{11}}\frac{\Delta_1(t_j)}{t_j^2} - \frac{\Delta_2(t_j)}{t_j}\right]b_j.
$$

Подобные "парные" уравнения (8) и (9) рассматривались в [4-6]. Используя результаты [4, 5], из (8) и (10) получаем

$$
\begin{cases}
B_1(\beta) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\beta}\int\limits_0^b \varphi_1(r)Z_0(\beta r)dr + \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty r\varphi_2(r)Z_0(\beta r)dr + \\
\qquad + \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\beta}\int\limits_b^\infty rF(r)Z_0(\beta r)dr, \\
A_1(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\alpha}\int\limits_a^\infty t\psi(t)Z_0(\alpha t)dt.
\end{cases}
\tag{12}
$$

где $\varphi_1(r) = \dfrac{C_{11}}{n_{11}}\dfrac{d}{dr}\int\limits_0^r \dfrac{zf_1(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}}dz$, $\varphi_2(r) = -\dfrac{1}{n_{12}}\int\limits_r^\infty \dfrac{f_2(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}}dz$,

$$
F(r) = \frac{1}{n_{12}}\sum_{k=1}^{2} a_k^* \int\limits_0^\infty \alpha^2 K_0(\alpha t_k r)A_1(\alpha)d\alpha,
$$

$$
\psi(t) = \frac{1}{m_{12}}\sum_{j=1}^{2} b_j^* \int\limits_0^\infty \beta^2 K_0(\beta t_j t)B_1(\beta)d\beta,
\tag{13}
$$

$Z_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом. $K_\nu(z)$ — функция Макдональда.

Исключая $A_1(\alpha)$ из соотношений (12) и (13), для определения функции $F(r)$ получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$F(y) = \Omega(y) + \int_b^\infty F(r)K(r,y)dr \,. \tag{14}$$

, где

$$\Omega(y) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n_{12}} \cdot \frac{1}{m_{12}} \sum_{k=1}^{2} a_k^* \sum_{j=1}^{2} b_j^* \cdot$$

$$\int_a^\infty \frac{t}{t_k^2 y^2 + t^2} \left[\int_0^b \frac{\varphi_1(r)}{t^2 t_j^2 + r^2} dr + \int_b^\infty \frac{r\varphi_2(r)}{t^2 t_j^2 + r^2} dr \right] dt, \tag{15}$$

$$K(r,y) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{r}{n_{12} m_{12}} \sum_{k=1}^{2} a_k^* \sum_{j=1}^{2} b_j^* \int_a^\infty \frac{tdt}{(t^2 t_j^2 + r^2)(t_k^2 y^2 + t^2)} .$$

Используя результаты [4, 5], доказывем разрешимость уравнения (14). Решая интегральное уравнение (14) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $F(r)$. Далее по формулам (8), (12), (13) последовательно определяем все искомые функции.

Напряжения и перемещения определяются по известным формулам (2)-(4), (6) и (7) в любой точке полуплоскости. В частности, нормальные напряжения под штампом и касательные напряжения вне разреза имеют следующий вид:

$$\sigma_x(0,z) = -\frac{2}{\pi} n_{12} z \left[\frac{\varphi_1(b)}{b\sqrt{b^2 - z^2}} + \frac{\varphi_2(b)}{\sqrt{b^2 - z^2}} + \frac{F(b)}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right] +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{z}{n_{12} \cdot m_{12}} \sum_{k=1}^{2} a_k^* t_k \sum_{j=1}^{2} b_j^* \int_a^\infty \frac{t}{(t_k^2 z^2 + t^2)^{3/2}} \left[\int_0^b \frac{\varphi_1(r)}{t^2 t_j^2 + r^2} dr + \right.$$

$$\left. + \int_b^\infty \frac{r\varphi_2(r)}{t^2 t_j^2 + r^2} dr + \int_b^\infty \frac{rF(r)}{t^2 t_j^2 + r^2} dr \right] dt + \tag{16}$$

$$+ \frac{2}{\pi} n_{12} \cdot z \left[\int_a^b \frac{\varphi_1'(r) r - \varphi_1(r)}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}} dr + \int_b^\infty \frac{\varphi_2'(r) + F'(r)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr \right], \; 0 < z < b.$$

$$\tau_{xz}(x,0) = -\frac{2}{\pi} m_{12} x \frac{\psi(a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} m_{12} x \int_a^{\infty} \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt +$$

$$+\frac{2}{\pi} x \sum_{k=1}^{2} \frac{b_k^*}{t_k} \left[\int_0^b \frac{\varphi_1(r)}{\left(\frac{x^2}{t_k^2} + r^2\right)^{3/2}} dr + \int_b^{\infty} \frac{r[\varphi_2(r) + F^a(r)]}{\left(\frac{x^2}{t_k^2} + r^2\right)^{3/2}} dr \right], \quad 0 < x < a.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноян В.С., Мелкумян С.А. Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом // Симпозиум: Современные проблемы механики контактных взаимодействий. 22-25 ноября, 1992 г., Ереван.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. - М.: Мир, 1982. - 334 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. - 2108 с.
4. Мелкумян С.А. Контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом // ДАН АрмССР. - 1972. - № 2. - С. 82-93.
5. Гоноян В.С., Мелкумян С.А. Контактная задача для полуплоскости с вертикальным разрезом // ДАН АрмССР. - Т. 1, 1970. - № 3. С. 144-149.
6. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977. - 220 с.

И-т механики НАН РА

15.X.1995

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. XLIX, № 3, 1995, с. 150-156

УДК 539.3:534.1

МАШИНОСТРОЕНИЕ

А.М. САРГСЯН, А.С. ХАЧИКЯН

ВЛИЯНИЕ СВЯЗАННОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕДЕНИЕ ИХ ХАРАКТЕРИСТИК В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ

Էլեկտրաառաձգականության գծային տեսության դրվածքով ուսումնասիրված է կտոր առ կտոր համասեռ սեպի տեսք ունեցող լայնական կտրվածքով պրիզմայաձև մարմնի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը:

Ցույց է տրված, որ էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի կապակցվածությունն առաձգական լարումների վրա ունի որակական ազդեցություն բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում:

В постановке линейной теории электроупругости изучено напряженно-деформированное состояние призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина. На гранях призматического тела заданы перемещения и электростатические потенциалы.