

$$\bar{\omega}_n^* = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{E_2}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где E_2 — модуль Юнга в поперечном направлении, $C_p = \sqrt{E_2 / \rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ — хорошо известная скорость распространения продольных волн в пластине.

Резюмируя вышеизложенное, можно утверждать, что характер напряженно-деформированного состояния в тонком теле весьма чувствителен к условиям на лицевых поверхностях, что должно быть учтено при практических расчетах конструктивных элементов

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бугузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений - М.: Наука, 1973. - 272 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
3. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. - 1966. - № 6. - С. 116-121.
4. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия пограничного с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы // Изв. АН Армении. Механика. - 1977. - Т. 30, № 5. С. 48-62.
5. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Механика: Межвуз. сборник научн. тр. / ЕГУ, 1982. Вып. 2. - С. 7-12.
6. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера // Тр. XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. - Таллин, 1983. - Т. 1. - С. 13-18.
7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. - 1986. - Т. 50, вып. 2. - С. 271-278.
8. Агаловян Л.А., Товмасыан А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. АН Армении. Механика. - 1993. - Т. 46, № 3-4. - С. 3-11.
9. Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы // Сб. юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. - Гюмри, 1994. - С. 23-26.

И-т механики НАН Армении

15.XI.1996

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН). т. XLIX, № 3, 1995, с. 140-145

УДК 539.3

МАШИНОСТРОЕНИЕ

М.А. ЗАДОЯН

О МЕСТНОЙ ПРОЧНОСТИ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Ուսումնասիրված է աստիճանային օրենքով ամրապնդվող, համասեռ նյութից պատրաստված և ներս ընկած անկյունային փորվածքով զանալայն ձողի ոլորումը: Ենթադրվում է, որ հայտնի է համապատասխան խնդրի «լրիվ» լուծումը՝ առանց լարման կուտակումների հաշվառման: Օգտագործելով այդ լուծումը և անկյունային կետի շրջակայքի համար տեղական լուծումը, ինչպես

նաև շինարարական մեխանիկայում հայտնի հատվածքների մեթոդը, ձևակերպվում է լարման կոտակումներով անկումային կետի համար ամրության պայմանը:

Рассматривается кручение цилиндрического стержня из однородного упрочняющегося по степенному закону материала, имеющего входящую угловую выточку. Полагается, что известно решение соответствующей задачи в целом, без учета концентрации напряжений, вызванной выточкой. Используя это решение в целом и местное решение для окрестности угловой точки, а также известное в строительной механике сечений, формулируется условие прочности для рассматриваемого края с концентрационным напряженным состоянием.

Ил. 1. Библиогр.: 4 назв.

Cylindric rod torsion of homogeneous reinforcing material by step-by-step law having input nodal neck is considered. It is supposed that the solution of the corresponding problem is known on the whole, ignoring stress concentration caused by the neck. Using this solution as a whole and local solution for the vicinity of a nodal point as well as the known in structural mechanics method of sections, the strength condition for the considered boundary with concentration stress state is formed.

Ил. 1. Ref.4.

Исследование явления малонапряженности [1] на крае контактной поверхности составных тел позволяет при надлежащем выборе физических и геометрических параметров обеспечить надежную прочность данного соединения. Однако при фиксированных значениях указанных параметров могут не удовлетворяться условия малонапряженности, и на этом крае возникнет объемное напряженное состояние. Таким образом, появляется проблема формулировки условия прочности при наличии концентрации напряжений.

Предварительно для развития указанной идеи рассматривалось кручение цилиндрического стержня из однородного, упрочняющегося по степенному закону материала, имеющего входящую выточку. Полагая, что решение соответствующей задачи известно в целом, без учета концентрации напряжений, вызванной выточкой.

Используя это решение, а также местное решение для окрестности угловой точки, необходимо сформулировать условие прочности для рассматриваемого края с концентрационным напряженным состоянием.

1. Пусть цилиндрический стержень с произвольным поперечным сечением, материал которого упрочняется по степенному закону, имеет вид

$$\sigma_0 = k \varepsilon_0^m,$$

где σ_0 и ε_0 — интенсивности напряжений и деформаций, k и m — механические параметры материала, имеющего угловой симметричный входящий вырез, который скручивается крутящими моментами M , приложенными на торцевых сечениях.

Принимаем, что решение задачи кручения для данного поперечного сечения, но без выреза, известно в полярной системе координат ρ, φ (см. рис.) Указанное решение (компоненты напряжения $T_{rr}(\rho, \varphi)$, $T_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)$, перемещение $W(\rho, \varphi)$) назовем номинальным.

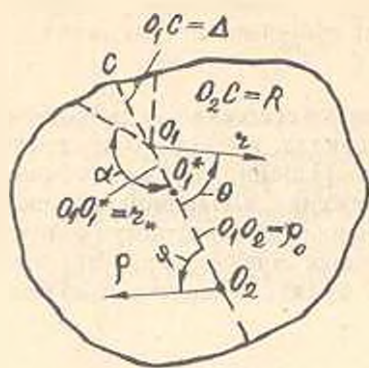


Рис.

В окрестности угловой точки полагаем, что реализуется деформация продольного сдвига. В полярной системе координат $r\theta$ это решение можно представить в следующем виде [2]:

$$\tau_{rz} = \lambda k r^{(\lambda-1)m} f'x, \quad \tau_{\theta z} = k r^{(\lambda-1)m} f'x,$$

$$w = r^\lambda f, \quad x = (\sqrt{f'^2 + \lambda^2 f^2})^{m-1}.$$

Здесь

$$f = A \exp\left(-\int_0^\alpha \varphi d\theta\right), \quad A = f(\alpha).$$

Функция $\varphi(\theta)$ определяется из зависимости

$$\arctg \frac{\Psi}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{\Psi}{\omega} = \alpha - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \lambda,$$

$$\omega = \sqrt{\lambda(\lambda + n - 1)}, \quad n = 1/m,$$

$$\lambda = \frac{m}{1+m} \quad \text{при } \alpha = \pi.$$

$$\lambda = \frac{2 + (1-2\nu)[(n-1)(1-2\nu) - \sqrt{4n + (n-1)^2(1-2\nu)^2}]}{8\nu(1-\nu)}.$$

при $1/2 < \nu < 1$, причем $\nu = \alpha/\pi$. Согласно приведенным в [2] формулам имеем $f(0) = 0$.

2. Вводя обозначения

$$N = k f'(0) / |f'(0)|^{m-1}, \quad F(\theta) = \frac{f'(\theta)x(\theta)}{f'(0)x(0)},$$

для компонентов напряжений будем иметь

$$\tau_{\theta z} = N r^{(\lambda-1)m} F(\theta), \quad \tau_{rz} = \lambda \frac{f}{f'} \tau_{\theta z}. \quad (1)$$

В окрестности угловой точки имеем

$$N = \tau_{\theta z}(r, 0) r^{(1-\lambda)m}.$$

Постоянная N , подлежащая определению, аналогична коэффициенту интенсивности напряжения в выражениях напряжения в вершинах трещин. Нетрудно заметить, что для интересующего нас интервала полуугла выреза, т.е. при $\pi/2 < \alpha \leq \pi$, имеем

$$\frac{1}{n+1} \leq \lambda < 1.$$

Используем известный в строительной механике метод сечений [3]. Мысленно проведем по плоскости $\theta = 0$ ($\varphi = 0$) сечение и отбросим одну из частей стержня. Рассмотрим равновесие действующих сил по продольному направлению для случаев стержней без выреза и с вырезом. Проектируя касательные силы по продольному направлению и приравнявая сумму номинальных сил, действующих в интервале Δ целого стержня, к сумме

концентрационных сил, действующих в интервале $0 \leq r \leq r_*$ в стержне с вырезом, находим

$$\int_{R-\Delta}^R T_{\varphi z}(\rho, 0) d\rho = \int_0^{r_*} \tau_{\theta z}(r, 0) dr. \quad (2)$$

Далее на неизвестном расстоянии $r = r_*$ от угловой точки приравниваем местное напряжение и номинальное

$$\tau_{\theta z}(r_*, 0) = T_{\varphi z}(\rho_0, 0). \quad (3)$$

Следуя (3), принимаем номинальное значение напряжения в точке $(\rho_0, 0)$ вместо точки $(\rho_0 - r_*, 0)$. Это объясняется учетом некоторого значения асимптотики местного напряжения $\tau_{\theta z}$ по сравнению с точным его значением.

Условия (2) и (3) в принципе определяют неизвестные постоянные r_* и N . Совместно решая (1) - (3), находим

$$r_* = [1 + (\lambda - 1)m] \int_{R-\Delta}^R H(\rho) d\rho, \quad H(\rho) = \frac{T_{\varphi z}(\rho, 0)}{T_{\varphi z}(\rho_0, 0)}, \quad (4)$$

$$N = \tau \left\{ [1 + (\lambda - 1)m] \int_{R-\Delta}^R H(\rho) d\rho \right\}^{(1-\lambda)m}$$

Здесь $H(\rho)$ — известная функция ρ , не зависящая от внешнего момента M , а τ — значение номинального напряжения $T_{\theta z}(\rho_0, 0)$. Значение τ , при котором указанная точка переходит в состояние временного сопротивления или разрушения, обозначим через τ_* . Тогда критическое значение N имеет вид

$$N_* = \tau_* \left\{ [1 + (\lambda - 1)m] \int_{\rho_0}^R H(\rho) d\rho \right\}^{(1-\lambda)m}$$

Соответствующее критическое напряжение $\tau_{\theta z}$ в окрестности угловой точки можно представить в виде

$$\tau_{\theta z}^*(r, \theta) = N_* r^{(\lambda-1)m} F(\theta).$$

3. В случае кругового поперечного сечения с ослабленным вырезом имеем номинальное напряжение [4]:

$$T_{\varphi z} = \frac{(3+m)M}{2\pi\rho_0^{3+m}} \rho^m, \quad T_{\rho z} = 0.$$

Тогда

$$T_{\varphi z}(\rho_0) = \tau = \frac{(3+m)M}{2\pi\rho_0^3}, \quad H = \rho^m / \rho_0^m.$$

Интегрированием из (4) находим

$$N = \Delta^{(1-\lambda)m} \Phi. \quad (5)$$

где

$$\Phi = \Phi(\xi, \delta, m) = \tau \left\{ \frac{[1 + (\lambda - 1)m](1 - m\delta/2)}{1 - m\delta} \right\}^{(1-\lambda)m}$$

Здесь введены обозначения $\xi = \lambda - \pi/2$, $\delta = \Delta/R$ и использованы значения биномиальных разложений. Напряжение $\tau_{\theta z}$ в окрестности рассматриваемой точки имеет вид

$$\tau_{\theta z} = \Phi(\Delta/r)^{(1-\lambda)m} F(\theta).$$

Обозначая через M , критическое значение момента, при котором происходит разрушение на указанном крае угловой точки, для соответствующего номинального напряжения, имеем

$$\tau_* = (3 + m)M_* / [2\pi R^3(1 - \delta)^3].$$

Тогда критическое значение N , при котором исчерпывается прочность скручиваемого стержня из (5), будет

$$N_* = \Delta^{(1-\lambda)m} \Phi_*,$$

где

$$\Phi_* = \tau_* \left\{ \frac{[1 + (\lambda - 1)m](1 - m\delta/2)}{1 - m\delta} \right\}^{(1-\lambda)m} \quad (6)$$

В пространстве параметров Φ_* , ξ , δ , m полученное уравнение можно интерпретировать как гиперповерхность разрушения. При фиксированных значениях параметров $\delta = \delta_0$, $m = m_0$ уравнение $\Phi_* = \Phi_*(\xi, \delta_0, m_0)$ определяет предельную кривую разрушения, разделяющую зону прочности (ниже кривой) от зоны разрушения (выше кривой). В случае трещины (щели), т.е. при $\xi = \pi/2$, имеем [2]:

$$1 - \lambda = 1/(m + 1).$$

Тогда

$$\Phi_* = \tau_* \left[\frac{1 - m\delta/2}{(m + 1)(1 - m\delta)} \right]^{\frac{m}{m+1}}$$

Для линейно-упругого материала, принимая в (6) $m = 1$, находим

$$\Phi_* = \tau_* \left[\frac{\lambda(1 - \delta/2)}{1 - \delta} \right]^{1-\lambda}, \quad \lambda = \frac{\pi}{\pi + 2\xi}.$$

Полученное уравнение определяет предельную кривую разрушения для линейно-упругого скручиваемого цилиндрического стержня с круговым поперечным сечением с симметричным относительно радиуса вырезом глубиной Δ , центральным углом $2(\pi - \alpha)$ и параметром δ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжение в составных упругих телах. - Ереван: Изд. АН АрмССР, 1987. - 338 с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992. - 384 с.
3. Партон В.З. Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. - М.: Наука, 1985. - 504 с.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. - М.: Гостехиздат, 1960. - 456 с.

И-г механики НАН РА

15.X.1995

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. XLIX, № 3, 1995, с. 145-150

УДК 539.3

МАШИНОСТРОЕНИЕ

В.С. ТОНОЯН, С.А. МЕЛКУМЯН

КОСОСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Рассматривается кососимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости, ослабленной полубесконечным вертикальным разрезом. На конечном участке границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенной относительно оси разреза. Для простоты принимается, что берега разреза свободны от внешних воздействий. Решение задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сначала парного интегрального уравнения, а затем интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические выражения для нормального напряжения под штампом и касательного напряжения вне разреза с выделенной корневой особенностью.

Рассматривается кососимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости, ослабленной полубесконечным вертикальным разрезом. На конечном участке границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенной относительно оси разреза. Для простоты принимается, что берега разреза свободны от внешних воздействий. Решение задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сначала парного интегрального уравнения, а затем интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические выражения для нормального напряжения под штампом и касательного напряжения вне разреза с выделенной корневой особенностью.

Библиогр.: 6 назв.

An oblique symmetric contact problem for orthotropic semi-plane is considered when the semi-plane is weakened by a semi-infinite vertical cut. On the finite section of the bound a tough die with an arbitrary smooth form base symmetrically spaced relative to the cut is applied. It is simply supposed that the cut edges are free from external effects. The solution of the problem is presented in the form of Fourier integral sum. The determination of unknown integration functions is taken first to the solution of a pair of integral equation, then to the solution of Fredholm equation of the second kind. Last equation solubility is proved. Analytical expressions for normal stress under die and tangential stress outside the cut with a distinguished root feature are obtained.

Ref. 6.