Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. XLIX, № 3, 1995, с. 136-140

УДК 539.3 МАШИНОСТРОЕНИЕ

Л.А. АГАЛОВЯН

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ТЕЛ

Ուսումնասիրված է բարակ մարմինների երեսային մակերևույթների վրա տրված եզրային պայմանների ազդեցությունը նրանց լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակների վրա: Որոշված են լարման և տենզորի տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկ կարգերը: Նշված են ստացված արդյունքների որոշ կիրառությունները:

Обсуждается влияние заданных на лицевых поверхностях граничных условий на характер напряженно-деформированного состояния тонких тел. Определены асимптотические порядки компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Указаны некоторые приложения полученных результатов.
Библиогр.: 9 назв.

The influence of given on boundary condition face surfaces on the character of stress-deformed states for thin bodies is discussed. Asymptotic orders of stress tensor and displacement vector components are discussed. Some applications of results obtained are given.
Ref. 9.

Проводится асимптотический анализ решения уравнений математической теории упругости для тонких тел в зависимости от краевых условий на лицевых поверхностях. Показана принципиальная зависимость асимптотических порядков величин компонентов тензора напряжений и вектора перемещения от типа краевых условий, определены эти порядки.

Указаны прикладные модели расчета тонкостенных тел, встречающихся в машиностроении, строительстве, приборостроении и других областях современной техники.

1. Тонкие тела типа балок, пластин и оболочек являются основными элементами конструкций, встречающихся в машиностроении, приборостроении, строительстве, космической технике и других областях современной техники. При расчете таких элементов важное место занимают вопросы точного моделирования их взаимодействия с другими телами и физическими полями. К настоящему времени достаточно полно исследован случай, когда на лицевых поверхностях пластин и оболочек заданы значения компонентов тензора напряжений (условия первой краевой задачи теории упругости). Этому вопросу посвящены многочисленные монографии на основе тех или иных аналитических методов или гипотез прикладного характера.

В системе безразмерных координат уравнения теории упругости, рассматриваемые в области, занимаемой тонким телом, составляют сингулярно возмущенную малым параметром систему. Подобный факт имеет место также почти во всех физических задачах. Согласно математической теории таких систем, решение складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев [1]. В прикладных теориях балок, пластин и оболочек обычно ограничиваются построением решения лишь внутренней задачи, для чего часто привлекается та или иная гипотеза прикладного характера, как, например, гипотезы плоских сечений, недеформируемых нормалей и др. При асимптотическом подходе решение внутренней задачи ищется в виде

$$Q = \varepsilon^{q_i + S} Q^{(S)}(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ S = \overline{0,\ N}\,. \tag{1}$$

где Q — любая из искомых величин; $\varepsilon = h / l$ — малый параметр; h — полутолщина; l — характерный тангенциальный размер тела; $\xi = x / l$, $\eta = y / l$, $\zeta = z / h$ — безразмерные координаты точки; q_i — характеризует интенсивность (порядок) данной величины; обозначение $S = \overline{0,\ N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу S происходит суммирование от нуля до числа приближений N. При правильном определении чисел q_i удается получить более простую рекуррентную систему для коэффициентов разложения $Q^{(S)}$. Установление значений q_i является наиболее трудным моментом в любой физической задаче.

Для изотропных и анизотропных пластинок в случае, когда на лицевых поверхностях $z = \pm h$ заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений, установлено [2, 3]:

$$q_i = -2 \ \text{— для } \sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_{xy},\ U,\ V;\ q_i = -3 \text{ - для } W; \tag{2}$$
$$q_i = -1 \text{ - для } \sigma_{xz},\ \sigma_{yz},\ q_i = 0 \text{ - для } \sigma_z,$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, $U = u / l$, $V = v / l$, $W = w / l$ - безразмерные компоненты вектора перемещения. Используя (1) и (2), решение трехмерной задачи теории упругости сводится к более простым двумерным задачам. При этом исходное приближение совпадает с классической теорией Кирхгофа-Лява для пластинок, основанной на гипотезе недеформируемых нормалей. Для балок-полос исходное приближение асимптотического представления соответствует классической теории растяжения-сжатия и изгиба балок Бернулли-Эйлера, основанной на гипотезе плоских сечений, а пограничный слой описывает Сен-Венановские краевые эффекты [4].

Пограничный слой во всех краевых задачах строится отдельно, поэтому соответствующее решение сопрягается с решением внутренней задачи посредством граничных условий на боковой поверхности. В случае первой краевой задачи пограничный слой через эти граничные условия непосредственно влияет на решение внутренней задачи, соответствующей приближениям $S \geq 1$, т.е. классическую теорию балок и пластин можно рассматривать как исходное приближение некоторого асимптотического итерационного процесса в смысле приведенных уравнений и граничных условий. Последующие приближения внутренней задачи и пограничных слоев в совокупности уточняют результаты по классической теории.

2. Существует множество прикладных проблем. Их изучение приводит к решению модельных задач для тонких тел, на лицевых поверхностях которых заданы отличные от первой краевой задачи условия. К этим проблемам относятся, например, вопросы взаимодействия фундамента

сооружения с его основанием, контактного взаимодействия жесткого тела с более податливым, отдельные вопросы сейсмологии и сейсмостойкого строительства и др. Отличительной особенностью всех этих задач является то, что им соответствуют отличные от (2) асимптотические порядки, а следовательно, и принципиально иные напряженно-деформированные состояния. Рассмотрим некоторые случаи. Если на лицевой поверхности $z = -h$ заданы кинематические условия

$$U = U^-(x, y), \; V = V^-(x, y), \; W = W^-(x, y), \tag{3}$$

а на поверхности $z = +h$ условия первой, второй или смешанных краевых задач теории упругости, то асимптотика искомых величин такова [5-7]:

$$q_i = -1 \text{ для напряжений, } q_i = 0 \text{ для перемещений.} \tag{4}$$

Если действуют также массовые силы $\overline{F}(F_x, F_y, F_z)$ и температурные поля $\theta = T(x,y,z) - T_0(x,y,z)$, то их вклад будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если $q_i = -2$ для массовых сил, $q_i = -1$ для θ, т.е. массовые силы должны иметь достаточно большую интенсивность. Обычно в расчетах конструкций ими пренебрегают.

Для этого класса задач, используя (1) и (4), решение трехмерной внутренней задачи сводится к итерационному процессу и, в отличие от первой краевой задачи, все величины полностью определяются из условий при $z = \pm h$. Пограничный слой снимает возникающую неувязку на боковой поверхности. Это физически объяснимо: если тонкое тело нагружено поверхностными силами, то оно вообще не будет уравновешенным как твердое тело, во втором же случае оно самоуравновешивается. Отсюда можно сделать вывод, что число приведенных уравнений во внутренней задаче должно совпадать с количеством степеней свобод соответствующего твердого тела, что математически также подтверждается. Для иллюстрации сказанного рассмотрим еще одну краевую задачу. Пусть при $z = +h$ заданы условия:

$$\sigma_{xz} = \sigma^+_{xz}(x,y), \; \sigma_{yz} = \sigma^+_{yz}(x,y), \; \sigma_z = \varepsilon^{-1}\sigma^+_z(x,y), \tag{5}$$

а при $z = -h$ - условия:

$$\sigma_{xz} = \sigma^-_{xz}(x,y), \; \sigma_{yz} = \sigma^-_{yz}(x,y), \; w = \varepsilon^{-1}w^-(x;y). \tag{6}$$

Условия (5) и (6) отличаются от соответствующих условий первой краевой задачи лишь тем, что в (6) последнее условие первой краевой задачи для σ_z заменено условием для w. Однако это приводит к тому, что взамен асимптотики (2) устанавливается совершенно иная асимптотика [8]:

$$q_i = -1 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, U, V, W, \tag{7}$$

$$q_i = 0 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}.$$

Характеры напряженно-деформированных состояний также существенно отличаются. Например, в случае условий первой краевой задачи в задаче изгиба главенствующую роль играет уравнение изгиба Софи Жермень относительно прогиба W, при условиях же (5), (6) относительно W вообще не получается уравнение. При сведении трехмерной задачи к двумерной получается система из двух уравнений в частных производных относительно тангенциальных компонентов U, V вектора перемещения. При условиях (5), (6) тонкое тело, рассматриваемое как твердое, имеет две степени свободы в тангенциальной плоскости, отсюда и система из двух уравнений.

Асимптотика (1), (4) справедлива и для соответствующих краевых задач слоистых тонких тел. В качестве приложения отметим решения для слоистых оснований фундаментов по модели сжимаемого слоя, позволившие выявить рамки применимости известной гипотезы Винклера и получить компактные формулы для коэффициента постели слоистых и неоднородных сред [6, 7]. Для ортотропного основания толщины H коэффициентом постели Винклера служит

$$K = \frac{1}{A_{33}H} = \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})E_3}{H(1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{23}\nu_{32}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31})}, \qquad (8)$$

где E_3 — модуль Юнга в направлении oz, а ν_{ik} — коэффициент Пуассона. Для слоистых оснований с толщинами слоев h_i коэффициентом постели служит

$$K_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} h_i A_{33}^{(i)}}, \qquad (9)$$

а для неоднородного основания толщины H:

$$K = \frac{1}{\int_0^H A_{33}(z)dz}. \qquad (10)$$

Особенно чувствительны к условиям на лицевых поверхностях частоты собственных колебаний. Покажем это на примере для ортотропной полосы $\Omega = \{(x,y): x \in [0,l], |y| \le h, h << l\}$. Рассмотрим собственные колебания полосы (фундамента) при двух группах граничных условий:

$$\text{а) } \sigma_{xy}(h) = \sigma_y(h) = 0,\ U(-h) = V(-h) = 0;$$

$$\text{б) } U(\pm h) = 0,\ V(\pm h) = 0.$$

Условиями $\sigma_{xy}(h) = U(-h) = 0$ в полосе порождаются собственные колебания с частотами [9]:

$$\omega_n = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{12}}{S}}(2n+1),\ n = 0,1,2,\cdots, \qquad (11)$$

где G_{12} — модуль сдвига, $C_s = \sqrt{G_{12}/S}$ — хорошо известная в сейсмологии скорость распространения сдвиговой волны в бесконечной среде. Если заменить $\sigma_{xy}(h) = 0$ условием $U(h) = 0$, то условиями $U(h) = U(-h) = 0$ в полосе (фунадаменте) порождаются собственные колебания уже в два раза с большими первыми частотами

$$\overline{\omega}_n = \frac{\pi}{2h}\sqrt{G_{12}/\rho},\ n = 1,2,\cdots. \qquad (12)$$

Условиям $\sigma_y(h) = V(-h) = 0$ соответствуют частоты

$$\omega_n^* = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{E_2}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}}(2n+1),\ n = 0,1,\cdots, \qquad (13)$$

а условиям $V(\pm h) = 0$ — частоты

$$\overline{\omega}_{*}^{*} = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{E_2}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{14}$$

где E_2 — модуль Юнга в поперечном направлении. $C_p = \sqrt{E_2 / \rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ - хорошо известная скорость распространения продольных волн в пластине.

Резюмируя вышеизложенное, можно утверждать, что характер напряженно-деформированного состояния в тонком теле весьма чувствителен к условиям на лицевых поверхностях, что должно быть учтено при практических расчетах конструктивных элементов

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений - М.: Наука, 1973. - 272 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек - М.: Наука, 1976. - 512 с.
3. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин // Изв. Ан СССР. МТТ. - 1966. - № 6. - С. 116-121.
4. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы // Изв. Ан Армении. Механика. - 1977. - Т. 30, № 5. С. 48-62.
5. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Механика: Межвуз. сборник научн. тр. /ЕГУ, 1982. Вып. 2. - С. 7-12.
6. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера // Тр. XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. - Таллин, 1983. - Т. 1. - С. 13-18.
7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. - 1986. - Т. 50, вып. 2. - С. 271-278.
8. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. АН Армении. Механика. - 1993. - Т. 46, № 3-4. - С. 3-11.
9. Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы // Сб. юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. - Гюмри, 1994. - С. 23-26.

И-т механики НАН Армении

15.XI.1996

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН). т. XLIX, № 3, 1995, с. 140-145

УДК 539.3

МАШИНОСТРОЕНИЕ

М.А. ЗАДОЯН

О МЕСТНОЙ ПРОЧНОСТИ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Ուսումնասիրված է աստիճանային օրենքով ամրապնդվող, համասեռ նյութից պատրաստված և ներս ընկած անկյունային փորվածքով գլանային ձողի ոլորումը: Ենթադրվում է, որ հայտնի է համապատասխան խնդրի «լրիվ» լուծումը՝ առանց լարման կուտակումների հաշվառման: Օգտագործելով այդ լուծումը և անկյունային կետի շրջակայքի համար տեղական լուծումը, ինչպես