

УДК 620.088.32

С. Г. КЮРЕГЯН

ОЦЕНКИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ

Получены оценки методической погрешности для класса косвенных измерений, когда результат в виде интеграла от произведения стационарных случайных параметров заменяется произведением их средних значений.

Библиогр.: 3 назв.

Ստացված են մեթոդական սխալի գնահատականները անուղղակի չափումների այն դասի համար, երբ արդյունքը որևէ արտահայտվում է ստացիոնար պարամետրերի արտադրյալի բնույթի տեսքով, փոխարինվում է նրանց միջին արժեքների արտադրյալով:

Рассмотрим встречающийся в измерительной технике случай, когда теоретическое значение результатов R_T определяется по следующей интегральной зависимости:

$$R_T = \int_{Q(T)} x(t) dq, \quad (1)$$

где $x(t)$, $q(t)$ — изменяющиеся во времени t физические параметры, $Q(T)$ — область определения параметра q за время T .

Если изменение параметра q выразить через другой доступный для измерения параметр $y(t)$:

$$dq = \lambda y(t) dt,$$

то зависимость (1) можно представить в виде

$$R_T = \lambda \int_0^T x(t) y(t) dt, \quad (2)$$

где λ — постоянный коэффициент (параметр), устанавливающий взаимосвязь между dq и y .

Представленными соотношениями (1) и (2) определяются, например, работа силы по перемещению тела (x — сила, dq — элементарное перемещение, y — скорость тела), энергия энергоустановок (x — напряжение, dq — изменение заряда, y — сила тока) или масса транспортируемого вещества (x — плотность вещества в элементарном объеме dq , y — скорость потока вещества) и т. д.

В практике косвенных измерений часто пользуются средними за время T параметрами:

$$x_p = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad y_p = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad q = T y_{cp}.$$

Причем, результат определяют как их произведение:

$$R = x_{cp} Q = \lambda T x_{cp} y_{cp}, \quad (3)$$

допуская при этом методическую погрешность: $\Delta R = R_T - R$.

Если какая-либо из переменных $x(t)$ или $y(t)$ постоянна на протяжении времени T , то методическая погрешность в этом случае отсутствует, так как теоретический результат (1) и (2) совпадает с практическим (3).

Примем, что $x(t)$ и $y(t)$ — стационарные случайные функции, которые представим на временном интервале $0 \leq t \leq T$ в виде

$$x(t) = x_{cp} [1 + \delta x(t)], \quad y(t) = y_{cp} [1 + \delta y(t)], \quad (4)$$

где $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ — относительные отклонения параметров от их средних значений, представляющие собой центрированные стационарные функции.

С учетом (2) — (4) запишем выражение относительной погрешности δR результата одной реализации измерения в виде

$$\delta R = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt, \quad (5)$$

где $w(t) = \delta x(t) \delta y(t)$ — стационарная случайная функция.

Для оценки методической погрешности зафиксируем время T и определим математическое ожидание (м. о.) m_R и среднеквадратичное отклонение (с. к. о.) σ_R выражения (5) для множества реализаций, учитывая стационарность случайных функций:

$$m_R = M\{\delta R\} = \frac{1}{T} \int_0^T M\{w(t)\} dt = M\{\delta x \delta y\}, \quad (6)$$

$$\sigma_R = \left[M \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt \right)^2 \right\} - m_R^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M\{\delta x^2(t) \delta y^2(t)\} dt^2 - m_R^2 \right]^{1/2}.$$

В случае независимости случайных параметров $x(t)$ и $y(t)$ м. о. $m_R = 0$, а с. к. о. $\sigma_R = \delta_x \delta_y$, где δ_x, δ_y — с. к. о. случайных функций $x(t)$ и $y(t)$. Если же указанные параметры зависимы и один из них (например, $y(t)$) определяется под воздействием независимых друг от друга шумов z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то существующую связь параметров можно описать с помощью неявной функции:

$$f(x(t), y(t), z_1(t), \dots, z_n(t)) = 0.$$

Переходя к малым приращениям путем разложения функции f в ряд Тейлора в окрестности средних значений параметров и ограничиваясь линейными членами разложения, определим относительное отклонение функции $y(t)$:

$$\delta y(t) = a \delta x(t) + \sum_{i=1}^n b_i \delta z_i(t), \quad (7)$$

где $a = -(\partial f / \partial x)_0 / (\partial f / \partial y)_0$, $b_i = -(\partial f / \partial z_i)_0 / (\partial f / \partial y)_0$, $\delta z_i(t)$ — относительное отклонение от среднего значения i -го шума, а индекс «0» означает, что частные производные вычисляются для средних значений параметров.

Принимая во внимание, что $\delta x(t)$, $\delta z_1(t)$, $\delta z_2(t)$ — независимые центрированные случайные функции, после необходимых преобразований [1] определим из (6) с учетом (7) м. о. и с. к. о. методической погрешности измерения:

$$m_R = \sigma^2_{\epsilon_1}, \quad \sigma_R = \sigma_{\epsilon_1} \left| (\epsilon_x - 1) a^2 \sigma_1^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_{z_i}^2 \right|^{1/2}, \quad (8)$$

где δz_i — с. к. о. случайной функции $z_i(t)$, ϵ_x — эксцесс случайной функции $x(t)$, значение которого зависит от вида распределения плотности вероятности.

Первое выражение (8) совпадает с известным значением м. о. двух линейно зависимых случайных функций. Зная доверительные значения отклонений δx и δz_i , можно вычислить δx , δz_i из выражений:

$$x_1 = \delta x / k_x, \quad z_{i1} = \delta z_i / k_{z_i},$$

где k_x , k_{z_i} — квантильные коэффициенты, зависящие от значения доверительной вероятности и закона распределения плотности вероятности.

Для иллюстрации процедуры вычисления оценок методической погрешности рассмотрим пример косвенного измерения в течение времени T массы M жидкости на выходе трубопровода, питаемой гидронасосом с приводным асинхронным двигателем. По существу, рассматривается задача оценки методической погрешности объемно-массового динамического метода измерения массы жидкости [2]. В данном примере за $x(t)$ примем плотность $\rho(t)$ жидкости, за $y(t)$ — среднюю по сечению λ трубопровода скорость $v(t)$ потока жидкости, а за $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — соответственно напряжение U и угловую частоту ω_1 сети, питающей асинхронный двигатель. Выберем интервал времени T настолько большим, чтобы можно было пренебречь изменениями скорости потока в период пуска и отключения электродвигателя.

Для определения коэффициентов a и b_i запишем основные функциональные зависимости между принятыми параметрами:

— механическая мощность на валу электродвигателя P прямо пропорциональна плоскости q магнетомой жидкости [3]: $P = C_1 q$;

— механическая характеристика асинхронного двигателя на рабочем участке принимается линейной: $M_{\text{дв}} = c_2 U^2 s$;

— средняя по сечению трубопровода скорость v потока принимается пропорциональной угловой частоте ω_2 вращения ротора насоса: $v = c_3 \omega_2$, где c_1 , c_2 и c_3 — коэффициенты пропорциональности; $M_{\text{дв}}$, s — вращающий момент и скольжение асинхронного двигателя: $s = 1 - \omega_2 / \omega_1$. Составим функциональную зависимость между параметрами q , v , U и ω_1 , учитывая, что $P = \omega_2 M_{\text{дв}}$:

$$\frac{c_1}{c_2} U^2 v \left(1 - \frac{v}{c_3 \omega_1} \right) - c_4 v = 0,$$

и перейдем к их приращениям:

$$\delta v = a \delta q + b_U \delta U + b_{\omega_1} \delta \omega_1,$$

где коэффициенты, выраженные через скольжение ($s = 0.03$), равны соответственно:

$$a = -s(1 - 2s), \quad b_U = 2s(1 - 2s), \quad b_{\omega_1} = (1 - s)(1 - 2s).$$

Отклонения напряжения и частоты питающей сети допускаются в пределах ± 10 и $\pm 1\%$ соответственно, т. е. $\delta U_1 = \pm 0.1$, $\delta \omega_1 = \pm 0.01$.

Примем допустимое отклонение плотности жидкости равным $\delta\rho_g = \pm 0,1$.

Для доверительной вероятности 0,95 и нормального закона распределения случайных параметров ($\epsilon_x=3$, $k_x=k_r=1,96$) м. о. и с. к. о. методической погрешности согласно (8) равны: $m_x = -8,33 \cdot 10^{-4}$, $\delta_m = 3,37 \cdot 10^{-4}$. В случае равномерного распределения параметров ($\epsilon_x=1,8$, $k_x=k_r=1,65$) получим соответственно: $m_x = -1,17 \cdot 10^{-4}$, $\delta_m = 4,58 \cdot 10^{-4}$.

Из рассмотренного примера следует, что методическая погрешность объемно-массового динамического метода измерения массы жидкости ничтожно мала и ее можно не учитывать в расчетах.

В качестве второго примера рассмотрим измерение механической работы A , производимой стационарной движущей силой $F(t)$ по перемещению массой $m=5000$ г в течение времени T со средней скоростью $V_{cp}=60$ км/ч. Отдельные участки пути имеют уклоны (под углом α) относительно горизонтали, точный учет которых затруднен, однако известно, что положительные и отрицательные уклоны распределены равномерно на всем пути и не превышают с вероятностью 0,95 значения $c_y = \operatorname{tg} \alpha = \pm 0,01$, где c_y — коэффициент уклона. Помимо движущей силы, на тело действуют: сила трения $F_t = c_t mg \cos \alpha$, сила сопротивления ветру $F_a = c_a v^2$ и составляющая силы тяжести $F_y = mg \sin \alpha$, где $c_t = 10^{-2}$, $c_a = 100$ кг/м. Отрицательное отклонение движущей силы от среднего значения $F_{cp} = c_t mg + c_a v_{cp}^2$ равно $\delta F_g = \pm 0,1$.

Здесь $x(t) = F(t)$, $y(t) = v(t)$ и $z(t) = c_y(t)$. Составим функциональное уравнение на основании баланса всех сил ($F - F_t - F_a - F_y = 0$) и перейдем к приращениям переменных. С учетом $c_{y,cp} = 0$ получим: $\delta v = a \delta F + b \delta c_y$, где δv , δF — относительные отклонения соответственно скорости и движущей силы, $\Delta c_y = c_y$ — абсолютное отклонение коэффициента уклона,

$$a = \frac{c_t mg + c_a v_{cp}^2}{2 c_a v_{cp}^3}, \quad b = \frac{mg}{2 c_a v_{cp}^3}.$$

Примем значение доверительной вероятности 0,95, распределение плотности вероятности движущей силы нормальным ($\epsilon_x=3$, $k_x=1,96$), а распределение уклонов пути — равномерным ($k_z=1,65$). Полагая, что движущая сила и уклоны пути независимы, вычислим оценки методической погрешности согласно (8): $m_A = 0,024$, $\delta_A = 0,275$.

Полученные оценки методической погрешности должны учитываться совместно с другими составляющими при определении общей погрешности результата косвенного измерения в соответствии с ГОСТ 8.009—84.

Проведенный анализ и рассмотренные примеры позволяют заключить, что полученные в работе оценки методической погрешности могут быть использованы для класса косвенных измерений, когда результат, представляющий собой интеграл от произведения стационарных случайных параметров, заменяется произведением их средних значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.—М.: Мир, 1967.—498 с.
2. ГОСТ 26976—86. Нефть и нефтепродукты. Методы измерения массы.—М.: Госкомстандарт, 1986.—14 с.
3. Френкель Н. Э. Гидравлика.—М.: Л.: ГЭИ, 1956.—456 с.