

3. *Артемьян Г. Л.* Вибронадежность контактных соединений асинхронных двигателей малой мощности//Изв. вузов. Электромеханика.—1990.—№ 3.—С. 34—39.
4. *Артемьян Г. Л.* Вибрационная надежность асинхронных двигателей малой мощности//Электротехника.—1990.—№ 8.—С. 19—23.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1921.—544 с.

НИИЭлектромаш

29. I. 1991

Изв. АН Армении (сер. ТН), т. XLVI, № 1, 1993, с. 8—12.

## МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 621.791.052

Г. М. САРКИСЯН

### ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАЛКИ—ПРОТОТИПА СТЕБЛЕЙ РАСТЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ ПО ДЛИНЕ

Разработана методика расчета напряжений и деформаций при изгибных колебаниях консольной балки с переменным модулем упругости. Результаты исследования могут быть использованы для конструкций, имеющих балки и стержни с переменным модулем упругости при динамическом воздействии (мобильные машины, ядро жесткости высотных сооружений и др.).

Ил. 1. Библиогр.: 6 назв.

*Մշակված է լայնական տատանումների դեպքում փոփոխական առաձգականության մոդուլ ունեցող կոնսոլային հեծանի լարումների և դեֆորմացիաների հաշվարկի մեթոդիկա: Հետադրական արդյունքները կարող են օգտագործվել փոփոխական մոդուլ ունեցող կոնսոլվածքներում, որոնք ենթարկվում են դինամիկ ուժերի ազդեցությանը (շարժունակ մեքենաներ, բարձրահարկ շենքերի կոշտության միջուկներ և այլն):*

Идея исследования консольной балки с переменным модулем упругости возникла в процессе бионического изучения стеблей растений, жесткость которых меняется от комля к вершине по определенным канонам [1—3]. Использование принципов строения стеблей растений, наиболее успешно сопротивляющихся механическим воздействиям внешней среды—ветру, атмосферным осадкам и др., приобретенных в течение длительной эволюции, представляет интерес и является перспективным.

Теоретические и экспериментальные исследования консольных балок с переменным модулем упругости по длине выявили их высокие динамические качества по сравнению с балками постоянного модуля упругости [4]. При этом переменная жесткость балок достигается не за счет изменения поперечного сечения, а изменением модуля упругости, причем, по закону, характерному для стеблей. Отметить, что сохранение поперечного сечения постоянным при переменной жесткости балки является целесообразным с конструктивной точки зрения.

Целью работы является разработка метода расчета напряжений и деформаций балок постоянного сечения с заданным переменным модулем упругости при вынужденных колебаниях.

Рассмотрим случай, когда свободный конец консольной балки совершает заданное горизонтальное движение  $f(t)$  (рис.)

$$(y)|_{x=0} = f(t). \quad (1)$$

Изменение величины модуля упругости по длине балки описывается нижеследующей функцией:

$$E(\xi) = E_0 \left( a\xi + b + \frac{c}{\xi} \right). \quad (2)$$

где  $\xi = \frac{x}{l}$  — безразмерная величина (отсчет от защемления),  $a = 0,92$ ,  $b = 0,0754$ ,  $c = 0,0046$ .

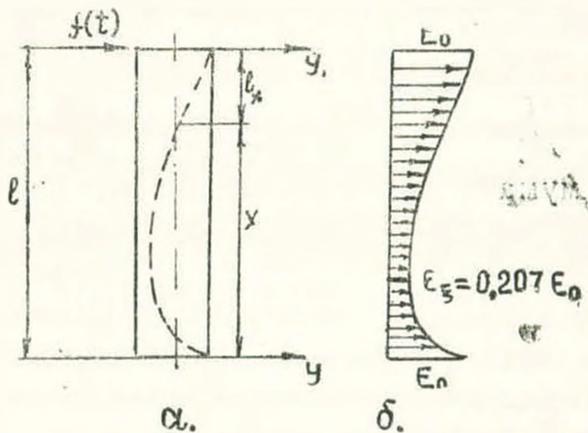


Рис. а) Схема нагружения балки. б) эпюра изменения модуля упругости по длине балки.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний такой балки представляется в виде [5]

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[ E(\xi) I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где  $E(\xi)I$  — изгибная жесткость в произвольном сечении,  $A$  — площадь поперечного сечения балки,  $\gamma$  — удельный вес,  $g$  — ускорение силы тяжести, а  $\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  характеризует изменение интенсивности сил инерции вдоль балки.

Для решения поставленной цели воспользуемся методом Рэлея-Ритца [6]. Прогибы балки при колебании представим в виде

$$y(\xi, t) = \sum x_i(\xi) \cos pt, \quad (4)$$

где  $x_i(\xi)$  определяет форму колебаний, а  $p$  — угловая частота.

Выражения наибольшей потенциальной и кинетической энергий имеют вид

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E(\xi) [x_l'(\xi)]^2 dx, \quad T = \frac{p^2}{2g} A \gamma \int_0^l [x_l(\xi)]^2 dx. \quad (5)$$

Приравняв эти энергии, находим

$$p^2 = \frac{I g}{\gamma A} \frac{\int_0^l E(\xi) [x_l'(\xi)]^2 dx}{\int_0^l [x_l(\xi)]^2 dx}. \quad (6)$$

Наименьшее выражение (6) соответствует точному решению при определении частоты основной формы колебаний. Для приближенного решения форму кривой изгиба балки примем в виде ряда

$$x_l(\xi) = \sum a_i \varphi_i(\xi). \quad (7)$$

где каждая из функций  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет условиям на концах стержня. Совместно решая (6) и (7), после преобразований получаем условие минимума

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l E(\xi) [x_l'(\xi)]^2 dx - \frac{\gamma A}{g} \frac{p^2}{I} \int_0^l x_l^2(\xi) dx = 0. \quad (8)$$

Таким образом, задача сводится к определению таких значений постоянных  $a_i$  в выражении (7), которые обращают в минимум интеграл (8). Для нашего случая выражение прогибов должно удовлетворять следующим условиям на концах балки:

$$\left[ E(\xi) I \frac{d^2 x_l(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \left[ \frac{d}{dx} \left[ E(\xi) I \frac{d^2 x_l(\xi)}{d\xi^2} \right] \right]_{\xi=0} = 0,$$

$$x_l(\xi)_{\xi=0} = 0, \quad \left[ \frac{dx_l(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0.$$

Для этого разложим выражение кривой изгиба (7) в виде ряда

$$\xi_l(\xi) = \sum a_i \varphi_i(\xi) = a_1(\xi)^2 + a_2(\xi)^3 + \dots + a_n(\xi)^n. \quad (9)$$

Каждый член этого ряда и его производная по  $\xi$  обращаются в нуль при  $\xi=0$ , поэтому приведенные выше условия на концах балки можно считать удовлетворительными. В качестве первого приближения возьмем два члена ряда (9)

$$x_l(\xi) = a_1(\xi)^2 + a_2(\xi)^3$$

и подставляя в (8), получаем

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^1 |E(\xi) [a_1(\xi)^2 + a_2(\xi)^3]''| a\xi = 0. \quad (10)$$

Выражение под интегралом обозначим через  $\Phi(\xi)$

$$\Phi(\xi) = E_0 \int_0^1 \left\{ \left( a\xi + b + \frac{c}{\xi} \right) [a_2(\xi) + a_2(\xi)^3]'' \right\}^2 d\xi.$$

Пользуясь условиями  $\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial a_1} = 0$  и  $\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial a_2} = 0$ , получим два линейных уравнения. Приравняв нулю определитель этих уравнений, находим величину  $p^2$ . Меньшая из двух корней будет величиной угловой частоты. Для рассматриваемого случая после преобразований эта величина составляет

$$p = \sqrt{\frac{D}{A_1 l^3 (0,5a_1^2 + 0,33a_1 a_2 + 0,14a_2^2)}}, \quad (11)$$

где

$$D = 4lgE_0 [a(0,5a_1^2 + 2,1a_1 a_2 + 2,25a_2^2 + b(a_1^2 + 3,1a_1 a_2 + 3a_2^2) + c(4,6a_1^2 + 6a_1 a_2 + 4,5a_2^2)].$$

Для определения формулы прогибов используем метод Лагранжа-Ритца. При этом задача решается во втором приближении, т. е.

$$\begin{cases} a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} = \Delta_{1p}, \\ a_2 \delta_{21} + a_2 \delta_{22} = \Delta_{2p}. \end{cases} \quad (12)$$

В случае балки, заделанной одним концом и под действием сосредоточенной силы на другом, имеем следующие выражения коэффициентов:

$$\delta_{11} = \frac{4E_0 l}{l^2} \left( \frac{al^2}{2} + bl + 4,6c \right), \quad \delta_{22} = \frac{18E_0 l}{l^3} (0,5al^2 + 0,66bl + c), \quad (13)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{12E_0 l}{l^3} (0,33al^2 + 0,5Bl + c), \quad \Delta_{1p} = \Delta_{2p} = p.$$

Совместно решая (12) и (13), после преобразований получаем

$$a_1 = \frac{pl^3}{8EI} k_1, \quad a_2 = -\frac{pl^3}{8EI} k_2,$$

где

$$k_1 = \frac{2,25 + 3b + 3c}{0,12a^2 + 0,75b^2 + 11,72c^2 + 0,75ab + 6,61ac + 9,31bc},$$

$$k_2 = \frac{a + b - 1,6c}{0,12a^2 + 0,75b^2 + 11,72c^2 + 0,75ab + 6,61ac + 9,31bc}.$$

Коэффициенты  $k_1, k_2$  при выбранном характере изменения модуля упругости по длине балки согласно формуле (2) и при  $a=0,92, b=0,0754, c=0,0046$  равны:  $k_1=14,12$  и  $k_2=4,71$ .

Тогда упругая линия изгиба балки выразится уравнением

$$y = \frac{Pl^3}{8EI} (14,12\zeta^3 - 4,72\zeta^3) \cos pt. \quad (14)$$

Выражения изгибающих моментов и поперечных сил по длине балки при поперечном колебании, полученные из уравнения изогнутой оси балки, имеют вид

$$M_{(z,y)} = 0,25Pl(k_1 - 3k_2\zeta^2) \cos p\zeta, \quad Q_{(z,y)} = -0,75P\dot{\zeta} \cos p\zeta. \quad (15)$$

Предлагаемая методика расчета может быть использована для конструкций, имеющих балки или стержни с переменным модулем упругости, работающих при динамическом воздействии (мобильные машины, ядро жесткости высотных сооружений и др.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян Г. М., Хуршудян Н. П. Архитектоника камыша озерного // Биол. журн. Армении.—1988.—№ 2 (41).—С. 137—142.
2. Саркисян Г. М., Хуршудян Н. П. Архитектоника стебля подсолнечника // Биол. журн. Армении.—1989.—№ 7 (42).—С. 659—662.
3. Саркисян Г. М., Хуршудян Н. П. Архитектоника стеблей кукурузы и сорго // Биол. журн. Армении.—1990.—№ 7 (43).—С. 578—582.
4. Саркисян Г. М. Применение консольных стоек с переменным модулем упругости // Тракторы и сельхозмашины.—1992.—№ 5.—С. 29—33.
5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.—М.: Наука, 1967.—386 с.
6. Протусевич И. Я. Вариационные методы в строительной механике.—М.: ОГИЗ 1948.—412 с.