

ных сплавов и корунда возрастает. Она возрастает также при увеличении скорости резания и подачи.

Исследование показало, что режущие инструменты из синтетического корунда подвергаются выкрашиванию, причем интенсивность выкрашивания усиливается при форсировании режимов резания.

Таким образом, несмотря на специфические особенности синтетического корунда, контактные процессы, протекающие на передней и задней поверхностях режущего кристалла, схожи с контактными явлениями, происходящими на поверхностях резцов и фрез, оснащенных алмазами, композитами и другими инструментальными материалами.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арумянян А. М. Определение оптимальной геометрии режущего инструмента по составляющим сил резания и по шероховатости обработанной поверхности//Тез. докл. 16 ой росс. н.-т. конф. асп. общ. аспирантуры.—Бреван. 1979.—С. 4—7.
2. Авакян А. А., Хачатрян Г. Г., Киракосян Э. М. О применении рубиновых резцов при тонком продольном точении пластичных металлов//Вестник машиностроения. 1971.— № 7.—С. 71—72.
3. Авакян А. А., Хачатрян Г. Г. Стойкость рубиновых резцов в зависимости от ориентации кристаллов корунда//Вестник машиностроения.—1972.— № 7.—С. 72—73.
4. Арумянян А. М. Тонкая прерывистая обработка пластичных металлов режущими пластинками из синтетического корунда, албора, титанита и алмаза//Вестник машиностроения.—1981.— № 4.—С. 55—56.
5. Мелидзе Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента. —М.: Машиностроение, 1982.—320 с.

Леп. фил. ЕРНИ

16.XII.1990

Изв. АН Армении (сер. ТИ), т. XLV, № 1—2, 1992, с. 116.

## МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 539.214

А. А. ГРИГОРЯН

## ТЕЧЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ МАССЫ МЕЖДУ ШЕРОХОВАТЫМИ КОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Рассматривается течение несжимаемого идеального пластически неоднородного, жесткопластического материала между двумерно шероховатыми коническими поверхностями при их сближении с поперечными скоростями, изменяющимися по экспоненциальному закону по кольцевой координате. Показано, что неоднородность приводит к существенному увеличению силы давления на контактную поверхность в сравнении с однородным материалом.

Ил. 3. Библиогр. 7 назв.

Դիտարկվում է իդեալական կոշտ պլաստիկ, անսեղմելի և անհամասեղ նյութի հոսու-  
նաթյունը կոնական երկչափ անհարթ մակերևույթների միջև, երբ նրանք մոտենում են իրար  
ըստ շրջանագծային կոորդինատի աստիճանական օրենքով փոփոխվող լայնական արագություն-  
ներով ծուլի է տրված, որ անհամասեղությունը համեմատած համասեղ նյութի հետ հան-  
գեթեում է հարման մակերևույթի վրա ճնշման ուժի մեծացումը:

Пластическое течение материала между шероховатыми жёсткими плитами в условиях плоской деформации впервые рассмотрено в [1], а последующее развитие теории течения идеально пластического материала по жёстким поверхностям получила в [2—7]. Задача о течении пластического материала между коническими поверхностями впервые исследована в [2,3]. Здесь конические поверхности приняты шероховатыми в кольцевом направлении и движутся с постоянными поперечными скоростями. В статьях [5—7] приведены решения задачи о пластическом слое и клине с учетом неоднородности материала.

В настоящей работе рассматривается течение несжимаемого идеального пластически-неоднородного, жестко-пластического материала между двумерно шероховатыми коническими поверхностями при их сближении с поперечными скоростями, изменяющимися по экспоненциальному закону по кольцевой координате [4]. Примем

$$v = v_1 r e^{-\mu \varphi} \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad v = -v_2 r e^{-\mu \varphi} \quad \text{при } \theta = \beta,$$

где  $v_1, \mu$  — заданные положительные постоянные. В силу симметрии рассматриваем область  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  (рис. 1).

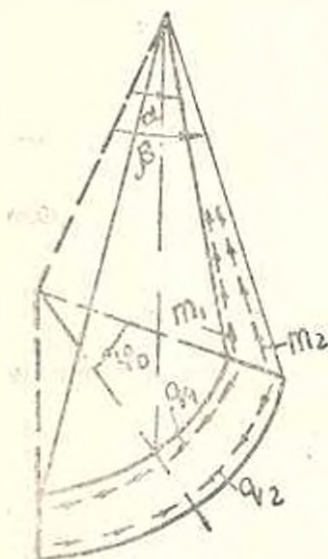


Рис. 1.

Соотношения теории идеального жестко-пластического течения в сферических координатах в обычных обозначениях имеют следующий вид:

а) дифференциальные уравнения равновесия —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} + \gamma_{\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r} [(z_{\theta} - \sigma_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{\theta}] = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r} (3\sigma_{\varphi} + 2\gamma_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

б) зависимости между компонентами скоростей деформаций, напряжений и скоростей перемещений —

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = \lambda (z_{ij} - \delta_{ij} \sigma), \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad 2\dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{v}{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$2\gamma_{\theta r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{\theta \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi};$$

в) условие пластичности Губера—Мизеса —

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2 + \tau_{\varphi r}^2) = 6K^2(r, \theta), \quad (3)$$

Здесь  $K(r, \theta)$  — функция, характеризующая неоднородность материала. Компоненты напряжений и функция  $K(r, \theta)$  отнесены к постоянной  $K$ , имеющей размерность напряжений.

В рассматриваемой задаче принимается, что пластические свойства меняются только по толщине слоя:  $K(r, \theta) = \omega(\theta)$ , где  $\omega(\theta)$  — безразмерная величина, определяемая из эксперимента.

Возникающие в конических поверхностях касательные напряжения принимаем заданными

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= m_1, & \tau_{\theta\varphi} &= q_1, & \text{при } \theta &= \alpha, & \tau_{\varphi r} &= -m_1, \\ \tau_{r\theta} &= -q_1, & \text{при } \theta &= \beta, & m_1^2 + q_1^2 &< 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты напряжения и скорости перемещения представим в виде

$$\sigma_r = \sigma_0 + \frac{6m}{\Omega} f', \quad \sigma_\theta = \sigma_0 + \frac{6m}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta - \mu \frac{1}{2}),$$

$$\sigma_\varphi = -p_1 + M \ln r - A(\varphi_0 - \varphi) + 6 \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\theta} \frac{m}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta - \mu \frac{1}{2}) \operatorname{ctg} \theta d\theta - \quad (5)$$

$$- 3 \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\theta} \tau(\theta) d\theta, \quad \tau_{r\theta} = \frac{m}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta - \mu \frac{1}{2}),$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{3m}{\Omega} \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\sin \theta} \right), \quad \tau_{\varphi r} = -\frac{3m}{\Omega} (f' + f \operatorname{ctg} \theta - \mu \frac{1}{2}),$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= (f' + f \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{1}{2})^2 + 9 \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\sin \theta} \right)^2 + \left( \psi + \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right) \times \\ &\times (f' + f \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{1}{2})^2 + 4(2f' - f \operatorname{ctg} \theta - \mu \frac{1}{2})(f' - 2f \operatorname{ctg} \theta - 2\mu \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$u = r(f' + f \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{1}{2})e^{-\mu\varphi}, \quad v = -3rfe^{-\mu\varphi}, \quad (7)$$

$$w = 3r\psi \sin \theta e^{-\mu\varphi} + \frac{D}{\mu} r \sin \theta,$$

где  $f$  и  $\theta$  — произвольные функции, зависящие от  $\theta$ , а  $p_1, \varphi_0, A, D$  — произвольные постоянные интегрирования.

Выражения напряжений (5) и скорости перемещения (7) являются решениями уравнений (1) — (3), если определены функции  $f$  и  $\psi$  из системы следующих дифференциальных уравнений:

$$\left[ \frac{\omega \sin \theta}{\Omega} (f' + f \operatorname{ctg} \theta + \mu \psi)' \right] + \frac{6\omega \sin \theta}{\Omega} (f' + f \operatorname{ctg} \theta + \mu \psi) + 4f \sin \theta = 0,$$

$$\left[ \frac{\omega \sin^3 \theta}{\Omega} \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\sin \theta} \right)' \right] - \frac{6\omega \sin^3 \theta}{\Omega} (f' + f \operatorname{ctg} \theta + \mu \psi) + \frac{A}{3} \sin \theta = 0$$

для с учетом представления (6) —

$$(\tau_{r_0} \sin \theta)' - \frac{6}{\mu} \tau_{r_0} \sin^2 \theta + 4f \sin \theta = 0,$$

$$(\tau_{\theta r} \sin^2 \theta)' + 3\tau_{r_2} \sin^2 \theta + A \sin \theta = 0.$$

Отсюда, исключая  $\tau_{r_2}$  и проинтегрировав полученное дифференциальное соотношение с учетом граничных условий (4) и обозначив

$$A = B - \frac{1}{2} \mu M, \quad B = \frac{q_1 \sin^2 \alpha + q_2 \sin^2 \beta + \frac{1}{2} \mu (m_1 \sin \alpha + m_2 \sin \beta)}{\cos \alpha - \cos \beta}, \quad (9)$$

$$C = \frac{q_1 \sin^2 \alpha \cos \beta + q_2 \sin^2 \beta \cos \alpha + \frac{1}{2} \mu (m_1 \sin \alpha \cos \beta + m_2 \sin \beta \cos \alpha)}{\cos \alpha - \cos \beta}.$$

получим

$$z = \xi - \frac{\mu}{2 \sin \theta} x, \quad \tau = \frac{B \cos \theta - C}{\sin^2 \alpha}, \quad (10)$$

где

$$\tau_{r_0} = \xi, \quad \tau_{\theta r} = x. \quad (11)$$

Введем новую функцию  $F(\theta)$

$$f' = F - f \operatorname{ctg} \theta - \mu \psi \quad (12)$$

и, исключив из выражения  $\Omega$  в (6) производные  $f'$ ,  $F'$  и  $\psi'$ , при помощи соотношений

$$F' = x \Omega, \quad \psi' = \frac{s}{3} \frac{\Omega}{\sin \theta} - \frac{\mu f}{\sin^2 \theta}, \quad (13)$$

получим

$$\Omega = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2-s^2}} \times \\ \times \sqrt{\left(1 + \frac{\mu^2}{12 \sin^2 \theta}\right) F^2 + 3(f \operatorname{ctg} \theta + \mu \psi)(f \operatorname{ctg} \theta + \mu \psi - F)}.$$

Из первого уравнения (8) следует

$$x = x \operatorname{ctg} \theta - 6 \frac{\omega}{\Omega} F. \quad (14)$$

Для определения функций  $f$ ,  $F$ ,  $x$ ,  $\psi$  из системы дифференциальных уравнений (12)–(14) имеем граничные условия

$$f(\alpha) = -v_1/3, \quad f(\beta) = v_2/3, \quad x(\alpha) = m_1, \quad x(\beta) = -m_2. \quad (15)$$

Определив эти функции, найдем две компоненты напряжения (11), а остальные компоненты напряжения и скорости перемещения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_1 - \frac{6\omega}{\Omega} (F - f \operatorname{ctg} \theta - u\psi), & \sigma_\theta &= \sigma_1 + \frac{6\omega}{\Omega} (F - 2f \operatorname{ctg} \theta - 2u\psi), \\ \sigma_\varphi &= -p_1 - A(\varphi_0 - \varphi) + 6 \int_{\alpha}^{\theta} (F - 2f \operatorname{ctg} \theta - 2u\psi) \frac{\omega}{2} \operatorname{ctg} \theta d\theta - 3 \int_{\alpha}^{\theta} x d\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\mu \frac{\omega F}{\Omega \sin \theta}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$u = rFe^{-u\varphi}, \quad v = -3rfe^{-u\varphi}, \quad w = 3r\psi \sin \theta e^{-u\varphi} + \frac{D}{r} r \sin \theta. \quad (17)$$

Давление на контактной поверхности  $\theta = \alpha$  на единицу длины вдоль  $r$  будет

$$\begin{aligned} P &= -2r \sin \alpha \int_{\alpha}^{\beta} (\sigma_\theta \cos \varphi - \tau_{\theta\varphi} \sin \varphi) \Big|_{\beta=\alpha} d\varphi = \\ &= 2r \sin \alpha \{ p_1 \sin \varphi_0 + (1 - \cos \varphi_0)(A + q_1) \}. \end{aligned}$$

Из условия сохранения количества масс

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^{\beta} \int_0^{\varphi_0} [v(r, \alpha, \varphi) \sin \alpha - v(r, \beta, \varphi) \sin \beta] r dr d\varphi = \\ = \int_0^{\beta} \int_0^{\varphi_0} u r^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \int_0^{\beta} \int_0^{\varphi_0} w \Big|_{r=0}^r r d\theta dr, \end{aligned}$$

подставив выражения компонент скорости перемещения в (17), определим

$$\begin{aligned} D &= \frac{1 - e^{-u\varphi_0}}{\cos \alpha - \cos \beta} (v_1 \sin \alpha + v_2 \sin \beta) - \\ &- 3 \int_{\alpha}^{\beta} F \sin \theta d\theta - \frac{3ue^{-u\varphi_0}}{\cos \alpha - \cos \beta} \int_{\alpha}^{\beta} \psi \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Проведено численное решение системы дифференциальных уравнений (12)–(14) при граничных условиях (15) для случаев неоднородности  $\alpha(\varphi) = e^{-\varphi}$ ,  $\mu_1 = 0.2$ ,  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 4.2$  и шероховатости:

$$1) m_1 = 0,15, \quad q_1 = 0,2, \quad m_2 = 0,2, \quad q_2 = 0,25;$$

$$2) m_1 = 0,15, \quad q_1 = 0, \quad m_2 = 0,2 \quad (i = 1, 2);$$

$$3) m_1 = 0, \quad q_1 = 0; \quad 4) m_1 = 0, \quad q_1 = 0,2, \quad q_2 = 0,25.$$

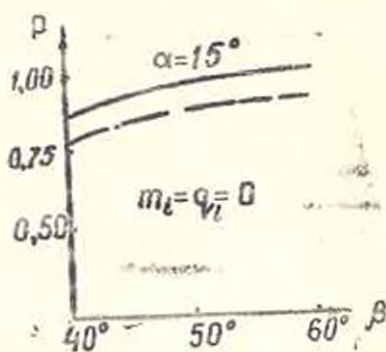


Рис. 2.

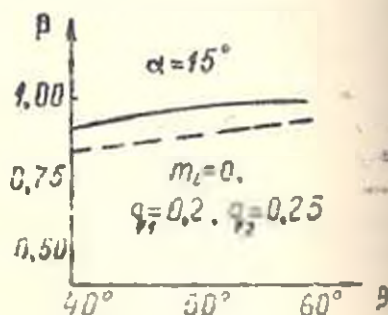


Рис. 3.

На рис. 2, 3 приведены графики, из которых можно сделать вывод, что неоднородность приводит к существенному увеличению сил давления на контактной поверхности  $\theta = \beta$  в сравнении с однородным случаем.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckysten Satz über das plastische Gleichgewicht//Z. angew. Math. und Mech. — 1923. — В. 3. Н. 6 — С. 401—406.
2. Ивлев Д. Д. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния//Тр. НИИ мат. ВГУ.—Воронеж, 1973.—Вып. 10.—С. 1—3.
3. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д., Рогов А. В. Современные проблемы механики вязкости.—М.: Машиностроение, 1982.—144 с.
4. Задоян М. А. Пластическое течение конусообразных тел//ПММ.—1983.—Т. 47, вып. 2.—С. 209—218.  
1960.—Т. 22, № 2.—С. 73—79.
5. Кузнецов А. И. Задача о неоднородном пластическом слое//Arch. Mech. Stoz.
6. Григорьев О. Д. Задача Прандтля для анизотропного неоднородного по толщине пластического слоя в равновесии полупространства под действием распределенной нагрузки//Изв. АН СССР, Инж. журнал. МТТ—1966—№ 3—147—149.
7. Аликян Ж. Г., Задоян М. А. Пространственное течение пластически анизотропного клина между жесткими шероховатыми плитами//Изв. АН АрмССР. Механика.—1981.—Т. 34, № 3.—С. 39—44.

Ин-т механики  
АН Армении

9. VI. 198