Изв. АН Армении (сер. ТН). т. XLIV, № 5—6, 1991, с. 282—287

УДК 62.50

Р. Е. САРКИСЯН

АДАПТИВНЫЕ ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ ДИАЛОГОВЫХ СИСТЕМ

Сообщение 2. МЕТОД ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Излагается метод построения человеко-машинных процедур адаптивного типа для решения практических многокритериальных задач, основанный на представлении предельных отношений замещения через производные критериальных функций по направлению и процедуре интервального их оценивания.

Библиограф.: 8 назв.

Շարադրված է տեխնիկական և կազմակերպական բնույթի բարդ համակարգերի նախագծման, պլանավորման և կառավարման գործնական բազմաչափանիշային օպտիմիզացիոն խնդիրների լուծման նոր մեթոդ՝ հիմնված հարմարվող բնույթի մարդ-մեքենայական ընթացակարգերի օգտագործման վրա։ Երկխոսության ընթացակարգը կառուցվում է, ելնելով չափանիշային ֆունկցիաների ըստ ուղղության ածանցյալների հարաբերություններից և ոչ ձևական ընդհանրական օգնությամբ նրանց փոփոխման նախընտրելի տիրույթների գնահատման հնարավորություններից։ Քննարկված են նաև մեթոդի մեքենայական իրականացման հարցեր։

В [1], развивая подход, основанный на идее выявления предпочтений одновременно с исследованием множества допустимых решений многокритериальной задачи, была доказана возможность представления маргинальных коэффициентов замещения через отношения производных критериальных функций по направлению. Для дифференциальных функций производные по направлению заменялись скалярными произведениями градиентов критериальных функций на направление.

В настоящей работе излагаются концептуальные основы построения человеко-машинной процедуры адаптивного типа с привлечением информации о производных по направлению и соотношений, связывающих их с соответствующими характеристиками формализованной модели.

Рассмотрим следующую многокритериальную задачу при определенности. Пусть $x \in D \subset E^n$ — вектор конструктивных параметров системы, возможные значения которых ограничены множеством D, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$ — вектор критериев, значения которых желательно максимизировать, $F = \{f \in E^m \mid f = f(x),\ x \in D\}$ — множество векторных оценок, $\partial F = \{f \in F \mid \varphi \in F,\ \varphi \geq f \Rightarrow \varphi = f,\ \forall \varphi \in F\}$ — эффективная граница F (множество эффективных решений, область Парето), $\partial D = f^{-1}(\partial F)$ — соответствующее множество эффективных решения, $u : E^m \to E^1$ — многомерная функция полезности, описывающая структуру предпочтений лица, принимающего решения, которая в явном виде не задана. Предполагается, что множество D выпукло, замкнуто и ограничено, функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, вогнуты и непрерывно дифференцируемы в D, а u — монотонно возрастающая вогнутая непрерывно дифференцируемая функция. При этих условиях, как известно, множество πF непусто и ограничено [2]. Задача заключается в выборе наиболее предпочтительного решения в множестве πD. Пусть $\nabla_x u = \sum_{i=1}^{m} (\partial u / \partial f_i) \nabla f_i (x^k)$ — градиент функции u, $\nabla f_i (x^k)$ — градиент функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ в точке x^k, $e = \nabla_x u / \|\nabla_x u\|$. При построении формализованной модели решения поставленной задачи будем исходить из следующей системы аксиом:

а) $\|e\| = 1$;

б) $\exists \delta > 0$, $x^k + \varepsilon e \in D$, $\forall \varepsilon \in (0, \delta)$, $x^k \in D$;

в) $e = \arg\max \Phi (d)$;

г) если $x^k \notin \pi E$, то $f_i (x^k + \varepsilon e) \geqslant f_i (x^k)$, $i = 1, \ldots, m$, и

$\exists i_0 : f_{i_0} (x^k + \varepsilon e) > f_{i_0} (x^k)$, если же $x^k \in \pi D$, то

$f_i (x^k + \varepsilon e) > f_i (x^k)$, $i \in R_1 \subset \{1, \ldots, m\}$;

д) $\mu_{i i_0} \in [A_i, B_i]$, $i = 1, \ldots, m$.

Аксиомы а) — д) интерпретируются следующим образом. Первая из них является условием нормировки, а вторая означает, что e допустимо. Аксиома в) требует, чтобы e являлось решением некоторой оптимизационной задачи. Согласно аксиоме г), в точках, не являющихся эффективными, перемещение по e не приводит к ухудшению значений критериев. В эффективных же точках, которые не считаются наиболее предпочтительными, есть подмножество критериев R_1, значения которых не должны быть ухудшены при движении вдоль e. Наконец, аксиома д) предполагает, что с помощью дополнительной информации могут быть определены нижние и верхние границы маргинальных коэффициентов замещения $\mu_{i i_0} = \nabla f_i (x^k)^T e / \nabla f_{i_0} (x^k)^T e$, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq i_0$ [1]. Среди возможных направлений e обладает тем свойством, что функция $v' (\varepsilon) = \nabla_x u (f (x^k + \varepsilon d))^T d$ достигает в точке x^k своего максимума при $d = e$. Следовательно, e можно определить из задачи

$$\nabla_x u^T d \to \max_{d \in \Omega(d)}, \tag{1}$$

где $\Omega(d)$ — совокупность ограничений на d. Учитывая, что u является сложной функцией x, задачу (1) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{m} (\partial u / \partial f_i) \nabla f_i (x^k)^T d \to \max_{d \in \Omega(d)}. \tag{2}$$

Решение ее не изменяется, если в ней целевую функцию разделить на $\partial u / \partial f_{i_0} > 0$, где f_{i_0} — критерий, выбранный в качестве опорного.

Так как получаемые при этом отношения $(\partial u/\partial f_i)/(\partial u/\partial f_{i_k})$ являются коэффициентами замещения $\nu_{ii_k} = \nabla f_i(x^k)^T e/\nabla f_{i_k}(x^k)^T e$, в результате такого действия вместо (2) получаем задачу

$$\sum_{i=1}^{m} (\nabla f_i(x^k)^T e/\nabla f_{i_k}(x^k)^T e) \cdot \nabla f_i(x^k)^T d \to \max_{d \in P(d)}. \tag{3}$$

Следовательно, фигурирующая в аксиоме в) функция $\Phi(d)$ равна выражению $\sum_{i=1}^{m} (\nabla f_i(x^k)^T e/\nabla f_{i_k}(x^k)^T e) \nabla f_i(x^k)^T d$. Она зависит как от направления d, так и от его оптимального значения e, т. е. $\Phi(d) = \Phi(e, d)$. Экстремальное значение $\Phi(e, d)$ равно $\Phi(e, e) = e^T He/S^{f_{i_k}^T} e$, где $S^{f_{i_k}} = \nabla f_{i_k}(x^k)$, H — симметричная положительно определенная матрица порядка $(n \times n)$ с элементами $h_{pq} = \sum_{i=1}^{m} (\partial f_i/\partial x_p)(\partial f_i/\partial x_q)$, $p, q = 1, \ldots, n$. Пусть $G_0 = G_0(x^k; d)$ — коническая аппроксимация множества D в точке x^k [3]. Согласно аксиоме г) направление e принадлежит одному из множеств $F_0 = \{d \mid f_i(x^k + \alpha d) > f_i(x^k),\ i = 1, \ldots, m\}$ или $F_0' = \{d \mid f_i(x^k + \alpha d) \geqslant f_i(x^k),\ i \in R_1\}$ в зависимости от того, принадлежит ли x^k множеству ∂D или нет. Условия, фигурирующие в описании F_0 или F_0', легко интерпретировать в терминах производных по направлению функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$. Действительно, используя разложение [3]

$$f_i(x^k + \alpha d) = f_i(x^k) + \alpha \nabla f_i(x^k)^T d + \alpha^2 \|d\| \alpha(x^k; \alpha d), \tag{4}$$

где $\alpha(x^k; \alpha d) \to 0$ при $\alpha \to 0+$, и исходя из эквивалентности условий $f_i(x^k + \alpha d) > f_i(x^k)$ и $(f_i(x^k + \alpha d) - f_i(x^k))/\alpha > 0$ для $\alpha > 0$, приходим к выводу, что имеет место $f_i'(x^k; \alpha d) = \lim_{\alpha \to 0+} (f_i(x^k + \alpha d) - f_i(x^k))/\alpha = \nabla_x f_i(x^k)^T d > 0$. Если при этом для некоторого возможного направления d имеет место $\nabla_x f_i(x^k)^T d > 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что $f_i(x^k + \alpha d) > f_i(x^k)$, $\alpha \in (0, \delta)$, т. е. d является направлением возрастания $f_i(x)$ в точке $x^k \in D$.

Целевая функция $\Phi(e; d)$ в (3) содержит маргинальные коэффициенты замещения $\nu_{ii_k} = \nabla f_i(x^k)^T e/\nabla f_{i_k}(x^k)^T e$, $i = 1, \ldots, m$. Аксиома д) предполагает возможность оценивания нижних и верхних границ ν_{ii_k} с помощью определенной корректной процедуры. Для построения такой процедуры оценивания будем исходить из подхода, предложенного Майер-Ротом и Стэнкардом [8]. Суть его заключается в следующем. Пусть $f^1, f^2 \in F$ таковы, что $f_\nu^1 = f_\nu^2 = f_\nu^*$, $\nu = 1, \ldots, m$, $\nu \neq i, i_k$, $f_i^1 = f_i^* + \Delta f_i$, $f_{i_k}^2 = f_{i_k}^* + \Delta f_{i_k}$, где $f_\nu^* \geqslant f_\nu(x^k)$, $\nu = 1, \ldots, m$, и ЛПР отдает предпочтение оценке f^1. Тогда $\nu_{ii_k} \geqslant \Delta f_{i_k}/\Delta f_i$. Если же предпочтение отдается оценке f^2, тогда $\nu_{ii_k} \leqslant \Delta f_{i_k}/\Delta f_i$. Пусть теперь величина $\Delta f_{j_k} > 0$ такова, что разница в полезности векторных оценок $(f_1^k, \dots, f_m^k)^T$ и $(f_1^k, \dots, f_{j_k}^k + \Delta f_{j_k}, \dots, f_m^k)^T$ для ЛПР очевидна. Выберем величины $0 < \Delta f_{i1} < \Delta f_{i2}$ такими, что по мнению ЛПР оценка $(f_1^k, \dots, f_i^k + \Delta f_{i1}, \dots, f_m^k)^T$ менее предпочтительна, а оценка $(f_1^k, \dots, f_i^k + \Delta f_{i2}, \dots, f_m^k)^T$ более предпочтительна, чем $(f_1^k, \dots, f_{j_k}^k + \Delta f_{j_k}, \dots, f_m^k)^T$. Тогда $\Delta f_{j_k}/\Delta f_{i2} < \mu_{ij_k} < \Delta f_{j_k}/\Delta f_{i1}$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j_k$. Используемая в этом подходе элементарная операция по переработке ЛПР информации по существу сводится к сравнению полезности значений оценок на шкалах двух различных критериев при фиксированных значениях остальных m-2 критериев и оценивается как допустимая (с точки зрения возможности ЛПР), а процедура, использующая эту операция—корректная [4].

Пусть

$$P_0 = \{d = e \mid S^{i\,T} e / S^{j_k\,T} e \in [A_i, B_i], \quad i = 1, \dots, m\},$$

где $S^i = \nabla f_i(x^k)$, $\forall i$.

Множество P_0 будем называть конусом предпочтения.

Приведенные соотношения позволяют получить два альтернативных пути решения задачи (3). Один из них приводит к задаче робастного программирования [5]

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{ij_k} \nabla f_i(x^k)^T d \to \max_{\substack{d \in G_0 \cap (F_0 \vee F_0'),\ \|d\|=1, \\ \mu_{ij_k} \in [A_i,\ B_i],\ i=1,\dots,m}} \qquad (5)$$

Формально по отношению к задаче (5) может быть применен принцип слияния Беллмана-Заде. С другой стороны, применение процедуры Сойстера [5] позволяет преобразовать задачу (5) с ограничениями по включению в задачу математического программирования с ограничениями типа неравенств. Второй путь связан с заменой в выражении $\Phi(e; d)$ искомого экстремального решения e на d и добавлением к ограничениям $G_0 \cap (F_0 \wedge F_0')$ конуса предпочтения ρ_0. В результате такой замены получаем задачу

$$\Phi(d;\ d) = d^T H d / S^{j_k\,T} d \to \max_{\substack{d \in P_0 \cap G_0 \cap (F_0 \vee F_0') \\ \|d\| = 1}} \qquad (6)$$

Числитель в целевой функции в (6) обусловлен выражением $\sum_{i=1}^{m} [\nabla f_i(x^k)^T d]^2 > 0$ и является положительно определенной квадратичной формой. Соответствующим выбором f_{j_k} можно добиться также выполнения условия $S^{j_k\,T} d > 0$. Функция $\Psi(d;\ \beta) = d^T H d - \beta S^{j_k\,T} d$ выпукла для любого $\beta > 0$. Пусть d^1, d^2 и $d = \alpha d^1 + (1 - \alpha) d^2$, $\alpha \in (0, 1)$

6 291

удовлетворяют ограничениям задачи (6). Тогда, полагая $\beta = \max\{\Phi(d^1; d^1), \Phi(d^2; d^2)\}$, приходим к выводу, что $\Psi(d; \beta) \leqslant 0$, т. е. $\Phi(d; d) \leqslant \beta$. Следовательно, функция $\Phi(d; d)$ квазивыпуклая. Если ограничения задачи (6) задают многогранное множество, то, как известно [3], среди ее оптимальных решений существует экстремальная точка этого множества.

Если решение задачи (6) уже найдено, движение вдоль него можно организовать с помощью одного из традиционных методов линейного подъема [3]. Например, величина оптимального шага σ^* может быть вычислена на основе правил $\sigma^* = \min_i \{\sigma_i^* / \sigma_i^* = \arg\max f_i \times (x^k + \sigma e), i = 1, \ldots, m\}$ или $\sigma^* = \arg\max f_{i_k}(x^k + \sigma e)$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{max}$, где $\sigma_{max} = \max\{\sigma / x^k + \sigma e \in D\}$. Сочетая неформальную процедуру А. Джоффриона [6] по вычислению σ^* с анализом функции $\mu_{i_k}(\sigma)$ и $\omega_i(\sigma)$, $i = 1, \ldots, m$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{max}$, можно выбрать наиболее приемлемую величину σ^* в интерактивном режиме.

Результаты итерации является решение $x^{k+1} = x(\sigma^*) = x^k + \sigma^* e \in D$. Для задачи линейного или вогнутого программирования условия $x^k \in \pi D$ имеет место тогда и только тогда, когда x^k совпадает с решением задачи $\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \to \max$ при $f_i(x) \geqslant f_i(x^k)$, $i = 1, \ldots, m$. Для невыпуклых задач можно воспользоваться условиями теоремы Гермейера, утверждающей о существовании величин $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, для которых имеет место условие $\min_i \alpha_i f_i(x^k) \geqslant \min_i \alpha_i f_i(x)$, $x \in D$ [2].

Если $x^k \notin \pi D$ необходимо выбрать новый опорный критерий f_{i_k}, формировать множества G_0, F_0 и P_0 и повторить вычисление $e = d^*$ и σ^*. Если же $x^k \in \pi D$ и считается наиболее предпочтительным, то исходная задача решена, в противном случае необходимо формировать множество R_1 и продолжать поиск с новыми данными относительно f_{i_k} множеств G_0, F_0 и P_0. Каждая итерация человеко-машинной процедуры содержит фазу оптимизации и фазу анализа и принятия решения. В результате работы алгоритма происходит адаптация двух типов: ЛПР к задаче и ЭВМ к системе предпочтений ЛПР. Генерируемая при этом последовательность $\{x^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к наиболее предпочтительному решению из πD. Реализация метода в решении практических задач показывает, что сходимость достигает за 4—5 итераций. В основе машинных BASIC—программ положены алгоритмы комплексного метода SUMT Фиакко и Маккормика [7]. На основе метода разрабатывается диалоговый пакет програм, совместимый с стандартными программными средствами САПР и АСНИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян Р. Е.* Адаптивные человеко-машинные процедуры для диалоговых систем. 1. Маргинальные отношения замещения и производные критериальных функций по направлению.// Изв. АН Армении. Сер. ТН.—1991.—Т. 44, № 4.— С. 184—189.
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.— М.: Наука, 1982.—254 с.
3. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.— М. Мир, 1982.—583 с.
4. *Емельянов С. В., Ларичев О. М.* Многокритериальные методы принятия решений.— М.: Знание, 1985.—32 с.
5. *Неговце К.* Применение теории систем к проблемам управления. М. Мир, 1981.—350 с.
6. *Джоффрион А., Дайер Дж., Файнберг А.* Решение задач оптимизации при многих критериях на основе человеко-машинных процедур// Кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решения.—М.: Мир, 1976.—С. 126—145.
7. *Банди Б.* Методы оптимизации.—М.: Радио и связь, 1988.—128 с.
8. *Muler-Rotha C., Stankard Jr. M. F.* A Linear Programming Approach to choosing between multi-objective alternatives.//7-th Main. Program Symp., The Hague sept. 1970. P. 165—172.

ЕрПИ 20. XI. 1990