ЛИТЕРАТУРА

1. *Мигулин В. В.* и др. Основы теории колебаний.—М.: Наука, 1988.—391 с.
2. *Хаслер М. Ж.* Электрические схемы с хаотическим поведением//ТИИЭР.—1985.—Т. 75.—С. 40—54.
3. *Сибирт У. М.* Цепи, сигнал, системы.—М.: Мир, 1988.—Т. 1.—336 с.
4. *Абелян М. П.* О моделировании вольт-амперных характеристик туннельных диодов//Изв. АН АрмССР. Сер. ТН.—1989.—Т. 42. № 2.—С. 92—95.
5. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений.—М.: Физматгиз, 1961.—387 с.

ВЦ АН Армении — 29. IV. 1990

Изв. АН Армении (сер. ТН), т. XLIV, № 5—6, 1991, с. 259—263.

ГИДРАВЛИКА

УДК 532.517.3

А. А. САРУХАНЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Приводится теоретическое исследование структуры изменения скорости при нестационарном движении вязко-пластичной жидкости в круглой цилиндрической трубе. Такое движение имеет место при течении глинистых растворов, которые применяются при бурении скважин, а также при движении нефти по трубопроводам при температурах, близких к застыванию. Задача сводится к решению уравнения Генки-Ильюшина. Получено решение этого уравнения при произвольном несимметричном начальном распределении скоростей. Общее решение задачи представляется в виде суммы, членами которого являются комбинации бесселевых функций.

Ил. 6. Библиогр.: 6 назв.

[illegible]

Задача изучения нестационарного ламинарного движения вязко-пластичной жидкости в круглой цилиндрической трубе имеет важное практическое значение, в частности, для расчета потерь напора, которые зависят от закона распределения скоростей по поперечному сечению трубы. Поэтому задача изучения нестационарного ламинарного движения сводится к определению закономерности изменения скоростей. Изучению этого вопроса посвящен ряд работ [1—5].

В [2] автор обобщает метод И. С. Громека и получает общее решение нестационарного ламинарного движения вязко-пластичной жидкости в круглой трубе. Однако, при решении задачи автор распрост-

раняет дифференциальные уравнения движения и полученные реше-
ния на всю внутреннюю область трубы, что не соответствует физи-
явления. Дифференциальные уравнения движения справедливы лиш-
для вязко-пластичной области течения ($r_0 < r < R$).

В [4] автором получено решение задачи с учетом области опре-
деления дифференциальных уравнений движения. Однако изучен ча-
стный случай, когда по всей длине трубопровода действует постоя-
ный перепал давления ($\partial p / \partial x = \mathrm{const}$). Определенный практически
и теоретический интерес представляет изучение задачи для общег-
случая, когда начальные и граничные условия имеют общий вид.

Рассмотрим нестационарное ламинарное движение вязко-пла-
стичной жидкости в круглой цилиндрической трубе. Будем считат-
что движение стабилизированное и осесимметричное, т. е. жидкост-
имеет скорость только в осевом направлении. При этом

$$U_r = U_\varphi = 0, \qquad \frac{\partial U_x}{\partial \varphi} = 0 \tag{1}$$

и система дифференциальных уравнений движения вязко-пластично-
жидкости будет [4]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{\tau_0}{\rho r}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad r_0 \leqslant r < R, \tag{3}$$

где r_0 — радиус ядра, определяемый из условия пластичност-
$r_0 = \frac{2\tau_0}{p}$, R = внутренний радиус трубы.

Из (2) и (3) следует, что $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ зависит только от t:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \tag{4}$$

Для решения уравнения (2) начальные и граничные условия задаю-
ся в виде

$$U(R, t) = 0 \qquad \text{при} \quad t > 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial U(r_0, t)}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \quad t > 0, \tag{6}$$

$$U(r, 0) = \varphi(r) \qquad \text{при} \quad r_0 < r < R, \quad t = 0,$$

где $\varphi(r)$ — начальное распределение скоростей.

Такая постановка задачи соответствует структуре движения и ф-
зике явления. Введем новую переменную

$$U(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$$

и тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(t) + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \nu\psi''(r) + \frac{\nu}{r}\psi'(r) - \frac{\tau_0}{\rho r}. \tag{9}$$

Функцию $\psi(r)$ выбираем так, чтобы удовлетворялось условие

$$\psi''(r) + \frac{1}{r}\psi'(r) - \frac{\tau_0}{\rho\nu r} = 0. \tag{10}$$

Граничные условия для функции $\psi(r)$ получаем из (5), (6) и (8):

$$\psi(R) = 0, \qquad \frac{\partial\psi(r_0)}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

Дважды интегрируя уравнение (10) и определяя постоянные интегрирования, получаем

$$\psi(r) = \frac{\tau_0}{\rho\nu}\left(r - R - r_0 \ln\frac{r}{R}\right). \tag{12}$$

Для функции $v(z, t)$ получим краевую задачу — решить неоднородное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + f(t) \tag{13}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$v(R, t) = 0, \qquad \frac{\partial v(r_0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0; \tag{14}$$

$$v(r, 0) = \Theta(r) \quad \text{при} \quad r_0 \leqslant r < R, \tag{15}$$

где $\Theta(r) = \varphi(r) - \psi(r)$.

Решение уравнения (13) с краевыми условиями (14) и (15) поищем в виде суммы

$$v(r, t) = v_1(r, t) + v_2(r, t), \tag{16}$$

где $v_1(r, t)$ — решение задачи, учитывающее действие перепада давления, $v_2(r, t)$ — то же, учитывающее влияние стенок трубы и начальное распределение скоростей.

Функция $v_1(r, t)$ является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) + f(t) \tag{17}$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$v_1(R, t) = 0, \qquad \frac{\partial v_1(r_0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \tag{18}$$

$$v_1(r, 0) = 0 \qquad \text{при} \quad r_0 \leqslant r < R \text{ и } t = 0, \tag{19}$$

а $v_2(r, t)$ – решением однородного уравнения

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) \tag{20}$$

при краевых условиях

$$v_2(R, t) = 0, \qquad \frac{\partial v_2(r_0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \tag{21}$$

$$v_2(r, 0) = \Theta(r) \qquad \text{при} \quad r_0 \leqslant r < R \text{ и } t = 0. \tag{22}$$

Общее решение уравнения (20) с краевыми условиями (21) и (22) имеет вид [5, 6]

$$v_2(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\nu \lambda_k^2 t} \cdot V_0(\lambda_k r), \tag{23}$$

где λ_k — собственные числа задачи, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$J_0(\lambda_k R) Y_1(\lambda_k r_0) - J_1(\lambda_k r_0) Y_0(\lambda_k R) = 0; \tag{24}$$

$J_0(\lambda_k r)$, $J_1(\lambda_k r)$ — соответственно Бесселевы функции первого рода нулевого и первого порядка; $Y_0(\lambda_k r)$, $Y_1(\lambda_k r)$ — то же, второго рода нулевого и первого порядка; $V_0(\lambda_k r)$ — комбинация Бесселевых функций $V_0(\lambda_k r) = J_0(\lambda_k r) Y_0(\lambda_k R) - J_0(\lambda_k R) Y_0(\lambda_k r)$; A_k — некоторые постоянные коэффициенты, определяемые из начального условия

$$A_k = \frac{\pi^2 \lambda_k^2}{2} \int_{r_0}^{R} r \Theta(r) V_0(\lambda_k r)\, dr. \tag{25}$$

Частное решение неоднородного уравнения (17) поищем в виде ряда Фурье-Бесселя по собственным функциям однородного уравнения

$$v_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) V_0(\lambda_k r) e^{-\lambda_k^2 \nu t}. \tag{26}$$

Подставляя значение $v_1(r, t)$ из (26) в (17), для определения коэффициентов $B_k'(t)$ получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k'(t) V_0(\lambda_k r) e^{-\lambda_k^2 \nu t} = f(t). \tag{27}$$

Обе части равенства умножим на $r v_0(\lambda_m r)$ и, проинтегрируя от r_0 до R, получим

$$\frac{2 B_k'(t) e^{-\lambda_k^2 \nu t}}{\pi^2 \lambda_k^2} = \frac{2 f(t)}{\pi \lambda_k^2},$$

откуда

$$B_k(t) = \pi \int_0^t f(t) e^{\lambda_k^2 \nu t}\, dt. \tag{28}$$

Общее решение задачи с учетом (8) и (16) будет

$$U(r, t)=\frac{\tau_0}{\mu}\left(r-R-r_0 \ln \frac{r}{R}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k) V_0(\lambda_k r) e^{-\lambda_k^2 \nu t} . \quad (29)$$

Таким образом, получена формула распределения скоростей по поперечному сечению трубы при нестационарном ламинарном движении вязко-пластичной жидкости для общего случая. Общее решение позволяет получить формулы для частных случаев, подставляя при этом соответствующие начальные и граничные усовия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов Е. Г., Исаев В. И. Гидроаэромеханика в бурении.—М.: Недра, 1987. 304 с.
2. Красильников Ю. И. Неустановившееся движение вязкопластичной жидкости в круглой трубе//ПММ.—1956.—Т. 20, № 5.—С. 655—660.
3. Габил Н. В. Неустановившееся течение вязкопластичной среды в круглой трубе// ДАН СССР.—1954.—Т. 95, № 3.—С. 173—175.
4. Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарное движение вязкопластичной жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения//ДАН СССР.—1954.—Т. 95, № 5.—С. 947—950.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности.—М.: Наука, 1967.—599 с.
6. Саргсян А. А. Нестационарное ламинарное движение вязкой жидкости в кольцевой цилиндрической трубе//Изв. АН АрмССР. Сер. ТН.—1990.—Т. 43, № 4.—С. 185—188.

ЕрПИ 20. III. 1990

Изв. АН Армении (сер. ТН), т. XLIV, № 5—6, 1991, с. 263—268

ГИДРАВЛИКА

УДК 621.226

В. В. ОГАНЕСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ЗАЩЕМЛЕНИЯ И ОБЛИТЕРАЦИИ В ЗОЛОТНИКАХ УПРАВЛЕНИЯ ПЛУНЖЕРНОГО ТИПА

Описаны причины заклинивания золотников дистанционного управления плунжерного типа. Приведены краткое описание экспериментального исследования этого явления и выбор на основании их результатов оптимальных параметров плунжерной пары для работоспособной конструкции золотника.

Ил. 4. Библиогр.: 2 назв.

[illegible]

Благодаря малой инерционности гидропривода гидросистемы отличаются высокой приемистостью и минимальным временем запаз-