Изв. АН Армении (сер. ТН), т. XLIV, № 5–6, 1991, с. 240–244.

ГИДРАВЛИКА

УДК 532.517.3

А. А. САРУХАНЯН

К РАСЧЕТУ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ НАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ

Для расчета потерь энергии вязкой несжимаемой жидкости при плоскопараллельном напорном движении получена общая расчетная формула, которая применима как при нестационарном, так и при стационарном движении. Расчет потерь энергии по полученным формулам производится по закономерности распределения скоростей. Получена закономерность распределения скоростей при нестационарном движении для любого начального его распределения. Из полученных формул для любой практической задачи можно определить значение потерь энергии.

Ил. 1. Библиогр.: 4 назв.

Մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի հարթ զուգահեռական շարժման դեպքում էներգիայի կորուստների հաշվարկի համար ստացված է ընդհանուր բանաձև, որը օգտագործելի է կայունացված և չկայունացված շարժումների դեպքում։ Էներգիայի կորուստի ստացված բանաձևով հաշվարկներ կատարելու համար անհրաժեշտ է ունենալ կենդանի կտրվածքում արագության բաշխման օրինաչափությունը։ Չկայունացված շարժման դեպքում ստացված է արագությունների բաշխման օրինաչափությունը, մուտքի կտրվածքում նրա կամայական սկզբնական բաշխման դեպքում։ Ստացված բանաձևերով կարելի է կամայական գործնական դեպքերի համար ստանալ էներգիայի կորստի արժեքները։

Прикладное значение изучения нестационарных гидромеханических процессов связано с уточнением методики гидравлического расчета цилиндрических каналов различных систем. Цилиндрические каналы часто бывают прямоугольного поперечного сечения, где движение жидкости рассматривается как параллельное. Разработка методики расчета потерь энергии нестационарных потоков в таких каналах актуальна по прикладному значению. Расчет потерь энергии при нестационарных гидромеханических процессах для цилиндрических каналов круглого поперечного сечения производится с помощью нестационарных касательных напряжений на стенке неподвижного канала [1]. Однако потери энергии при нестанонарном движении зависят не только от касательного напряжения на стенке неподвижного канала, а также от формы эпюр распределения нестационарных скоростей по живому сечению.

Для вывода обобщенной формулы расчета потерь энергии при нестационарном ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками, расположенными на расстоянии $2h$, выделим бесконечно малый объем жидкости в виде плоского слоя толщиной dy и длиной dx (рис.).

Уравнение движения выделенного элемента будет

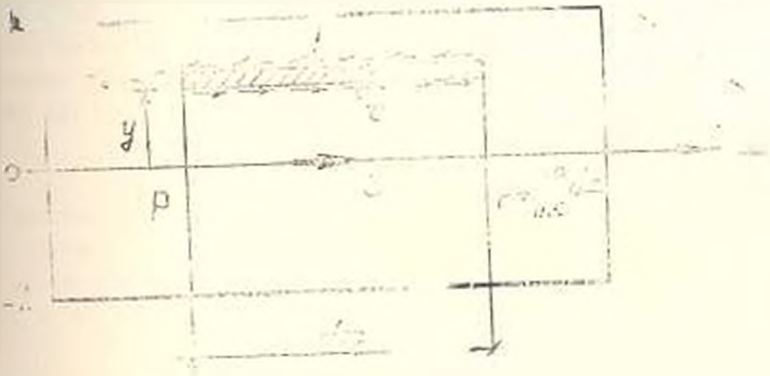
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (1)$$

Силы трения, действующие на боковые поверхности жидкого элемента, выполняют работу

$$dЭ = l dT = l \frac{\partial\tau}{\partial y} dx\, dy, \tag{2}$$

где l — длина пути перемещения. Эта работа затрачивается для преодоления силы сопротивления жидкого элемента массой dm. Потери удельной энергии для данной трубки тока на пути l будут

$$dh_w^{(n)} = \frac{dЭ}{g\,dm} = \frac{l}{2h\rho g v} \int_{h}^{-h} U \frac{\partial\tau}{\partial y} dy. \tag{3}$$



Потери энергии жидкости, проходящие по живому сечению потока за единицу времени, составляют

$$Э = l \int_{-h}^{-h} U \frac{\partial\tau}{\partial y} dy. \tag{4}$$

а среднее значение потерь удельной энергии потока

$$h_w = \frac{Э}{gm} = \frac{l\nu}{2h v g v} \int_{-h}^{+h} U \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy. \tag{5}$$

Из уравнения движения (1) получим уравнение одномерного неустановившегося движение в виде

$$h_w = -\frac{l}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{l}{g} \left(\xi \frac{dv}{dt} + \frac{v}{2} \frac{d\xi}{dt} \right), \tag{6}$$

где

$$\xi = \frac{\int_{-h}^{+h} u^2 dy}{2v^2 h}, \qquad v = \frac{\int_{-h}^{+h} U dy}{2h}. \tag{7}$$

Формулу (6) можно считать общей для расчета потерь энергии вязкой жидкости в цилиндрических каналах. Однако, при этом необходимо изучить неравномерность измерения средней скорости потока v и коэффициента количества движения β.

Рассмотрим нестационарное ламинарное движение несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками, расстояние между которыми равно $2h$. Начальный участок или участок формирования потока по длине трубы примем конечной длины и рассмотрим движение в стабилизированном участке. Принимая движение осесимметричным, изотермическим и пренебрегая массовыми силами, система уравнений Навье-Стокса при этом примет вид [2, 4]

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Из системы (8) следует, что давление в каждом фиксированном живом сечении не изменяется вдоль координат y, z и зависит только от переменной t, т. е.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \tag{9}$$

Предположим, что в начале неустановившегося процесса жидкость имеет начальное распределение скоростей по живому сечению $\varphi(y)$. При этих условиях задача изучения неустановившегося движения несжимаемой жидкости в плоской трубе сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = f(t) + \nu\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \tag{10}$$

при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} &U_x(y, t) = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm h, \quad t > 0; \\ &U_x(y, t) = \varphi(y) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (-h < y < +h). \end{aligned} \tag{11}$$

Решение уравнения (10) при условиях (11) будем искать в виде суммы двух функций [3]

$$U_x(y, t) = U_1(y, t) + U_2(y, t). \tag{12}$$

Функцию $U_1(y, t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла однородному уравнению

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \tag{13}$$

и условиям

$$\begin{aligned} &U_1(y, t) = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm h, \quad t > 0, \\ &U_1(y, t) = \varphi(y) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (-h < y < +h). \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда функция $U_2(y, t)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = f(t) + \nu \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \tag{15}$$

и нулевым начальным и краевым условиям

$$\begin{aligned} U_2(y, t) &= 0 \quad \text{при} \quad y = \pm h, \quad t > 0, \\ U_2(y, t) &= 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (-h < y < +h). \end{aligned} \tag{16}$$

При таком выборе функции U_1 и U_2 их сумма будет искомым решением задачи [3].

Функция $U_1(y, t)$ описывает нестационарные движения жидкости, происходящие только вследствие придания отклонения скоростей от стационарного распределения, а функция $U_2(y, t)$ — вынужденные нестационарные движения вследствие действия перепада давления при отсутствии начальных возмущений.

Решение однородного уравнения (13) при краевых условиях (14) имеет вид [3]

$$U_1(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k y}{h} \cdot e^{-\frac{\pi^2 k^2}{h^2} \nu t}, \tag{17}$$

где

$$C_k = \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} \varphi(y) \cdot \sin \frac{\pi k y}{h} \cdot dy. \tag{18}$$

Функцию $U_2(y, t)$ поищем в виде ряда по собственным функциям $\sin \frac{\pi k y}{h}$ однородной задачи

$$U_2(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin \frac{\pi k y}{h} \cdot e^{-\frac{\pi^2 k^2}{h^2} \nu t}. \tag{19}$$

Функция $U_2(y, t)$ в виде (19) удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Подставляя значение $U_2(y, t)$ из (19) в уравнение (15) получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k'(t) \cdot \sin \frac{\pi k}{h} y \cdot e^{-\frac{\pi^2 k^2}{h^2} \nu t} = f(t). \tag{20}$$

Разложим теперь функцию $f(t)$ в интервале $(-h, +h)$ в ряд по синусам и получим

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \cdot \sin \frac{\pi k}{h} y,$$

где

$$\gamma_k(t) = \frac{2}{h} \int_0^h f(t) \cdot \sin \frac{\pi k y}{h} \, dy.$$

Из последнего соотношения получается, что при $k = 2n$, $\gamma_{2n} = 0$, и $k = 2n + 1$, $\gamma_{2n+1} = -\frac{4f(t)}{(2n+1)\pi}$. Следовательно, для определения коэффициентов $b_k(t)$ получаем линейное дифференциальное уравнение только при нечетных значениях чисел k

$$b_{2n+1}'(t)\cdot e^{\frac{\nu\pi^2(2n+1)^2}{h^2}t} = -f(t)\frac{4}{(2n+1)\pi},$$

откуда

$$b_{2n+1}(t) = -\frac{4}{\pi(2n+1)}[F(t) - F(0)],$$

где

$$F(t) = \int f(t)e^{\frac{\nu\pi^2(2n+1)^2}{h^2}t}\,dt.$$

Таким образом, общее решение задачи неустановившегося ламинарного движения между двумя параллельными стенками будет

$$U_x(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k - \frac{4[F(t) - F(0)]}{\pi(2k+1)}\right]\sin\frac{\pi k y}{h}\,e^{-\frac{\nu\pi^2k^2}{h^2}t}. \quad (21)$$

Общее решение задачи дает возможность получить расчетные формулы для практических задач напорного неустановившегося ламинарного плоскопараллельного движения. По заданным краевым условиям практической задачи определяется закон распределения скоростей (21) и соответствующий при этом коэффициент количества движения β и потерь энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Д. Н.* Нестационарные гидромеханические процессы.—М.: Машиностроение, 1982.—240 с.
2. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений.—М.—Л.: Изд-во тех. лит., 1951.—420 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнение математической физики.—М.: Наука, 1977.—735 с.
4. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Изд-во тех. лит., 1955.—519 с.

ЕрПИ 20. III. 1990