

УДК 621.01

К. Г. СТЕПАНЯН, С. С. АРУТЮНЯН, С. Ш. ШАХПАРОНЯН

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ АНАЛОГ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ БУРМЕСТЕРА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К СИНТЕЗУ ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Предложен простой способ определения таких точек тела, траектории которых при заданном движении аппроксимируют в смысле наименьших квадратов пространственные циклоидальные кривые. На основе использования этих точек разработана унифицированный алгоритм пространственных направляющих зубчато-рычажных механизмов любой структуры. Приведенный в статье численный пример иллюстрирует эффективность предложенного метода.

Ил. 3. Библиогр.: 1 назв.

Առաջարկվում է պինդ մարմնի այնպիսի կետերի որոշման պարզեցում միջոց, որոնց հետագծերը տրված շարժման ժամանակ փոքրագույն թափանցանքի խմայնով մոտարկում են տարածական ցիկլոիդային կորերին: Այնուհետև ցույց է տրվում, որ ցանկացած կառուցվածքի տարածական ուղղորդի առամաս-շտակային մեխանիզմների նախագծումը բերվում է այդ կետերի որոշմանը, որը իր հերթին թույլ է տալիս ավտոմատիզացնել նշված մեխանիզմների նախագծման ընթացքը: Հեղվածում դիտարկված օրինակը հաստատում է մշակված մեթոդի առավելությունը այլ մեթոդների նկատմամբ:

В [1] введена концепция аппроксимационного подхода к циклоидальному случаю задачи Бурместера, изучающей точки плоскопараллельно перемещающегося объекта, которые при произвольном числе положений наименее отклоняются от циклоидальных кривых. В предлагаемой статье предпринята попытка распространить предложенные в [1] идеи на случай пространственного движения объекта.

Прежде чем перейти к формулировке поставленной задачи введем понятие пространственной m -циклоидальной кривой. Для этого рассмотрим пространственные кинематические m -звенные цепи $A_0A_1 \dots A_m$ с вращательными и поступательными парами (рис. 1). С каждым звеном l ($l = 1, 2, \dots, m - 1$) жестко свяжем подвижную систему координат $A_l x_l y_l z_l$ таким образом, чтобы число параметров, входящих в матрицу преобразования координат B_l между системами l и $l - 1$, было бы минимальным, а вид матрицы B_l был бы одинаков как для вращательной, так и для поступательной пары. Ось z_l системы $A_l x_l y_l z_l$ (рис. 1) направим по оси кинематической пары, связывающей звенья l и $l + 1$, ось x_l — по линии кратчайшего расстояния осей z_{l-1} и z_l (от z_{l-1} к z_l), а ось y_l сориентируем так, чтобы система координат $A_l x_l y_l z_l$ была правой. При указанном выборе координатных систем матрица преобразования координат B_l имеет вид

$$B_l = \begin{pmatrix} \cos \varphi_l & -\sin \varphi_l \cos \beta_l & \sin \varphi_l \sin \beta_l & a_l \cos \varphi_l \\ \sin \varphi_l & \cos \varphi_l \cos \beta_l & -\cos \varphi_l \sin \beta_l & a_l \sin \varphi_l \\ 0 & \sin \beta_l & \cos \beta_l & h_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

■ характеризуется четырьмя параметрами a_l , h_l , φ_l , β_l , где a_l , h_l — кратчайшие расстояния между осями z_{l-1} и z_l , x_{l-1} и x_l , а φ_l , β_l — углы между положительными направлениями осей x_{l-1} и x_l , z_{l-1} и z_l . Независимо от вида кинематической пары три из этих параметров являются постоянными, а один — переменной величиной. В частности, если звенья $l-1$ и l соединены вращательной парой, то $\varphi_l = \text{var}$, а при поступательной — $h_l = \text{var}$.

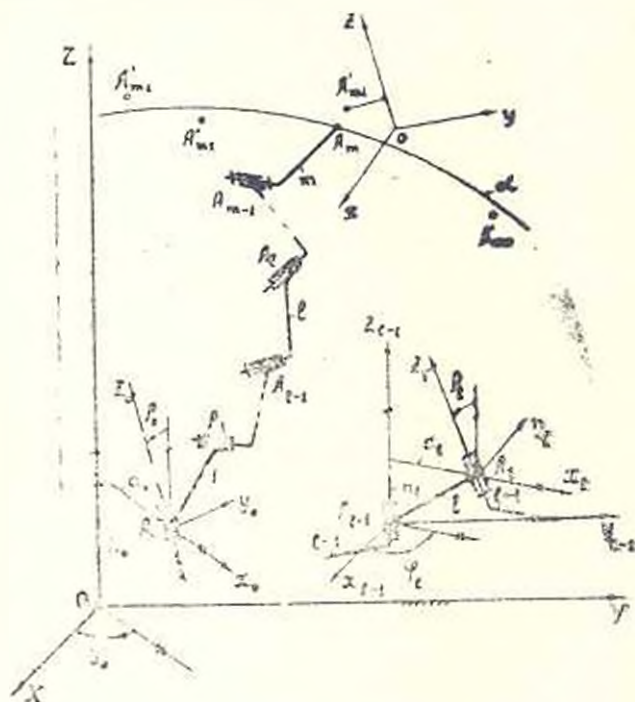


Рис. 1

Пространственные зубчато-рычажные цепи кинематически эквивалентны m -звенным незамкнутым пространственным цепям $A_0 A_1 \dots A_m$ (рис. 1), обобщенные координаты φ_l (или h_l) ($l=1, 2, \dots, m$) которые связаны между собой линейными уравнениями

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{pi} (u_1, u_2, \dots, u_n) \varphi_i = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r < m, \quad (2)$$

где α_{pi} — известные функции от постоянных передаточных отношений $u_1, u_2, \dots, u_n$ зубчатых колес, входящих в зацепления.

Для синтеза пространственных ЗРМ представляет практический интерес случай, когда число r уравнений (2) равно $m-1$. В этом случае точка A_m цепи $A_0A_1\dots A_m$ получает принудительное движение по некоторой кривой α , которую назовем пространственной m -циклоидальной кривой. На рис. 2 показана наиболее простая из этих цепей, для которой $m=2$, а уравнение связи имеет вид

$$\varphi_2 - \psi_1 = 0. \quad (3)$$

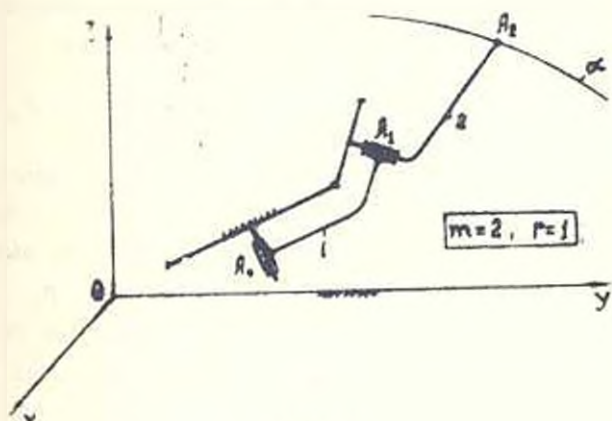


рис 2

2. Пусть заданы N конечноудаленных положений системы o_1xuz ($i=1, 2, \dots, N$) относительно неподвижной $OXYZ$. Возьмем в системе o_1xuz произвольную точку A_m (рис. 1) и по известным формулам преобразования координат определим N ее положений A_{mi} ($X_{A_{mi}}, Y_{A_{mi}}, Z_{A_{mi}}$)

$$(X_{A_{mi}}, Y_{A_{mi}}, Z_{A_{mi}}, 1)' = T_i (p_{2m+1}, p_{2m+2}, p_{2m+3}, 1)'. \quad (4)$$

где $T_i = [T_{jkl}] = 4 \times 4$ матрица преобразования координат от подвижной системы o_1xuz к неподвижной системе $OXYZ$, заданные элементы T_{jkl} ($j=1, 2, \dots, 4$, $k=1, 2, \dots, 4$, $i=1, 2, \dots, N$) которой определяют положение и ориентацию подвижной системы o_1xuz ; $p_{2m+1} = x_{A_m}$, $p_{2m+2} = y_{A_m}$, $p_{2m+3} = z_{A_m}$ — координаты искомой точки A_m в системе o_1xuz , а знак „ $'$ “ указывает на транспонирование соответствующих матриц.

Рассмотрим теперь следующую задачу: определить в системе $OXYZ$ пространственную m -циклоидальную кривую α , которая в смысле наименьших квадратов наилучшим образом аппроксимирует систему точек A_{mi} .

Для составления функций отклонения точек A_{mi} от кривой α исходим из параметрического уравнения траектории точки A_m зуб-

чато-рычажной цепи $A_0A_1 \dots A_m$ (рис. 1), генерирующей эту кривую. Согласно известным формулам преобразования координат имеем

$$(X_{A_{mi}}, Y_{A_{mi}}, Z_{A_{mi}}, 1)^T = B_0 \cdot B_1 \cdot \dots \cdot B_m (p_{2m+1}, p_{2m+2}, p_{2m+3}, 1)^T. \quad (5)$$

где $B_0, B_1, \dots, B_m$ определяются из (1), а $p_{2m+1} = x_{m \Delta m}, p_{2m+2} = y_{m \Delta m}, p_{2m+3} = z_{m \Delta m}$, являются координатами точки A_m в подвижной системе $A_{m-1}x_m y_m z_m$.

За меру приближения примем среднеквадратическую сумму отклонений точек A_{mi} от поточечно заданной кривой (5)

$$S = \sum_{i=1}^N [(X_{A_{mi}} - X_{A_i})^2 + (Y_{A_{mi}} - Y_{A_i})^2 + (Z_{A_{mi}} - Z_{A_i})^2]. \quad (6)$$

Решая линейную систему (2) относительно $m-1$ зависимых углов φ_i (или h_i), находим функции $\varphi_i = \varphi_i(\varphi_\mu)$ ($i = 1, 2, \dots, m, i \neq \mu$) от принятой независимой φ_μ . Подставляя далее их в (6), выражаем целевую функцию $S(p, \beta, \varphi)$ через вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_{2m+6}) = (a_0, h_0, \dots, a_{m-1}, h_{m-1}, p_{2m+1}, \dots, p_{2m+6})$ постоянных линейных параметров, вектор $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ постоянных угловых параметров и вектор $\varphi = (\varphi_{\mu 1}, \varphi_{\mu 2}, \dots, \varphi_{\mu N})$ дискретных значений искомой функции φ_μ . При этих обозначениях рассматриваемая аппроксимационная задача сводится к определению векторов $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_{2m+6}^*)$, $\beta^* = (\beta_0^*, \beta_1^*, \dots, \beta_m^*)$ и $\varphi^* = (\varphi_{\mu 1}^*, \varphi_{\mu 2}^*, \dots, \varphi_{\mu N}^*)$ по критерию

$$S(p^*, \beta^*, \varphi^*) = \min_{\substack{p \in E^{2m+6} \\ \beta \in E^{m+1} \\ \varphi \in E^N}} S(p, \beta, \varphi). \quad (7)$$

Алгоритм решения задачи (7) осуществляется по схеме, предложенной в [1].

3. Рассмотрим приложение предлагаемого алгоритма определения приближенных m -циклоидальных точек к синтезу пространственных направляющих ЗРМ (рис. 3). Разъединяем кинематическую пару A_2 в результате чего образуются зубчато-рычажная подцель $A_0A_1A_2$ и трехподвижная диада DCO . Произвольно выбираем размеры l_3 и l_4 звеньев OC и CD , а ось вращательной пары D направляем по оси OX неподвижной системы $OXYZ$. Далее точку O этой диады вводим по заданной траектории γ , в результате чего подвижная система $oxyz$, жестко связанная с шатуном OC , получает определенное пространственное движение. По найденному движению системы $oxyz$ с помощью описанного выше алгоритма определяем приближенную 2-циклоидальному точку и параметры цепи $A_0A_1A_2$. Далее посредством сферической пары A_2 соединяем диаду DCO с цепью $A_0A_1A_2$, в результате чего получаем одноподвижный пространственный направляющий ЗРМ (рис. 3) для приближенного воспроизведения кривой γ .

В качестве конкретного примера рассмотрим синтез пространственного направляющего ЗРМ (рис. 3) для приближенного воспроизведения винтовой линии $X_i = 0,15 \sin [0,157(i-1)]$, $Y_i = 0,4 + 0,025(i-1)$, $Z_i = 1 - 0,15 \cos [0,157(i-1)]$, $i = 1, 2, \dots, 11$.

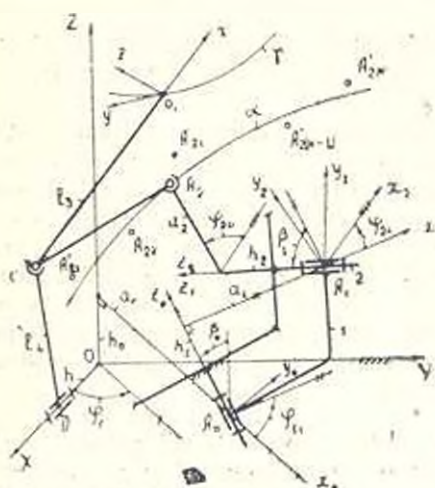


Рис. 3.

Синтез осуществлен при следующих значениях параметров ориентирующей цепи ДСО: $l = 1,4$, $l_1 = 0,6$, $h = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$, $\alpha = 4$, где α_1 — угол между пальцем сферическим с пальцем пары C и продольной осью звена AC , α_2 — угол между плоскостью прорези пары C и плоскостью вращения звена CD , α_3 — угол между плоскостью прорези пары C и плоскостью, проходящей через ось вращения звена CD и точку C .

В результате синтеза получены следующие значения искоемых параметров механизма: $\varphi_0 = 56^\circ 23' 5''$, $h_0 = 0,542204$, $a = 0,355197$, $\beta_0 = 58^\circ 27' 7''$, $h_1 = 1,781489$, $a_1 = 0,049144$, $\beta_1 = 175^\circ 16' 10''$, $h_2 = 2,136275$, $a_2 = 0,0515$, $\beta_2 = 42^\circ 57' 23''$, $\alpha_1 = -0,423103$, $y_1 = -0,52274$, $z_1 = 0,099562$. Максимальное по модулю отклонение чертящей точки O от заданных точек винтовой линии равно $\Delta_{max} = 0,00088$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сисаян К. Г., Арутюнян С. С., Каралетян Г. П. Циклоидальный аналог аппроксимационной задачи Бурместера с приложением к синтезу зубчатых рычажных механизмов // Изв. вузов. Машиностроение — 1988. — № 3. — С. 48–52.