2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод.—М.: Наука, 1977.—664 с.
3. *Андре-Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров.—М.: Мир, [illegible].—772 с.

АрмСХИ 23. X. 1990

Изв. АН Армении (сер. ТН), т. XLIV, № 1, 1991, с. 34—37

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.8:681.3:66.012

А. Н. АРУТЮНЯН, Г. Г. АРУНЯНЦ

К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ ОБОБЩЕННОГО КРИТЕРИЯ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В результате исследования деятельности лица, принимающего решения в системе человек-машина, выделены два принципа, которыми он руководствуется при решении многокритериальных задач. Формализация этих принципов позволяет оценить обобщенные критерии и сделать обоснованный выбор среди них. Показывается, что мультипликативная свертка критериев многокритериальной задачи учитывает оба принципа.

Библиогр.: 4 назв.

[illegible]

В процессе проектирования сложных технологических систем на разных этапах возникает проблема принятия решения в условиях необходимости удовлетворения множества критериев, зачастую находящихся в противоречии друг с другом. Такие задачи, в частности, возникают при формировании исходной базы знаний автоматизированной системы обучения операторов сложных объектов химической технологии, базирующихся на использовании методов экспертных оценок с целью создания формализованного описания деятельности идеализированного оператора.

В работе проводится обоснование возможности эффективности использования мультипликативной свертки в качестве обобщенного критерия при решении возникающих многокритериальных задач принятия решения. При решении многокритериальных задач применяются методы нахождения оптимальных решений по Парето или Слейтеру [1, 2]. Однако для большинства практических задач множество парето-оптимальных решений достаточно большое и проблема выбора решений среди них уже является самостоятельной задачей. Их решают путем использования обобщенного критерия, при выборе которого учитывается тот или иной принцип выбора стратегии лица, принимающего решение (ЛПР). Практика показывает, что ЛПР часто склонно пожертвовать значениями некоторых критериев для получения большого выигрыша в целом. Одновременно ЛПР стремится не слишком пренебрегать значениями каждого критерия в отдельности. С учетом последнего построены стабильные адаптивные алгоритмы [3]. Для краткости в дальнейшем первый принцип будет называться принципом жертв, а второй — принципом порогов. При этом возникает необходимость формализовать эти принципы, чтобы сделать обоснованный выбор обобщенного критерия.

Определение. Моментом перехода из точки $x_1 \in X$ в точку $x_2 \in X$ функции $f(x) > 0$, $x \in X = E$, называется величина

$$[f(x_2) - f(x_1)] / \min\{f(x_1),\ f(x_2)\}$$

и обозначается $M(x_1, x_2)f$.

Свойства момента. 1. Если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ заданы на X и $x_1, x_2 \in X$, то из $M(x_1, x_2)f_1 > 0$ и $M(x_1, x_2)f_2 > 0$ следует, что

$$M(x_1, x_2)f_1 f_2 > M(x_1, x_2)f_1 + M(x_1, x_2)f_2,$$

где $f_1 f_2$ — произведение $f_1(x)\,f_2(x)$.

Доказательство.

$$M(x_1, x_2)f_1 f_2 = \frac{f_1(x_2)\,f_2(x_2) - f_1(x_1)\,f_2(x_1)}{f_1(x_1)\,f_2(x_1)} =$$

$$= \frac{f_1(x_2)\,f_2(x_2) - f_1(x_1)\,f_2(x_2) + f_1(x_1)\,f_2(x_2) - f_1(x_1)\,f_2(x_1)}{f_1(x_1)\,f_2(x_1)} =$$

$$= \frac{f_2(x_2)}{f_2(x_1)}\,M(x_1, x_2)f_1 + M(x_1, x_2)f_2 > M(x_1, x_2)f_1 + M(x_1, x_2)f_2.$$

Аналогичным образом доказываются следующие свойства.

2. Если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ заданы на X и $x_1, x_2 \in X$, то из $M(x_1, x_2)f_1 < 0$ и $M(x_1, x_2)f_2 < 0$ следует, что

$$M(x_1, x_2)f_1 f_2 < M(x_1, x_2)f_1 + M(x_1, x_2)f_2.$$

3. Если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ заданы на X и $x_1, x_2 \in X$, то из $M(x_1, x_2)f_1 > 0$, $M(x_1, x_2)f_2 < 0$ и $M(x_1, x_2)f_1 > |M(x_1, x_2)f_2|$ следует, что

$$M(x_1, x_2)f_1 f_2 < M(x_1, x_2)f_1 + M(x_1, x_2)f_2.$$

4. Если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ заданы на X и $x_1, x_2 \in X$, то из $M(x_1, x_2)f_1 > 0$, $M(x_1, x_2)f_2 < 0$ и $|M(x_1, x_2)f_2| > M(x_1, x_2)f_1$ следует, что

$$M(x_1, x_2)f_1 f_2 < M(x_1, x_2)f_1 + M(x_1, x_2)f_2.$$

Замечание. Условие $M(x_1, x_2)f > 0$ является необходимым и достаточным для выполнения соотношения $f(x_1) < f(x_2)$.

Теорема 1. Если $F(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_m(x)$, $f_i(x) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x \in X$ и $F(x_1) < F(x_2)$, то

$$M(x_1, x_2) f_1 + \ldots + M(x_1, x_2) f_m > 0.$$

Теорема доказывается методом полной математической индукции.

Теорема 2. Если $F(x) = f_1(x) \cdots f_k(x) f_{k+1}(x) \cdots f_m(x)$, $f_i(x) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x \in X$, $k < m$ и $M(x_1, x_2) f_i > 0$ при $i \in [1, k]$, $M(x_1, x_2) f_i < 0$ при $i \in [k+1, m]$, то для выполнения соотношения $M(x_1, x_2) F > 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$M(x_1, x_2) f_1 \cdots f_k > |M(x_1, x_2) f_{k+1} \cdots f_m|. \tag{1}$$

Доказательство необходимости:

$$M(x_1, x_2) F = \frac{f_{k+1}(x_2) \cdots f_m(x_2)}{f_{k+1}(x_1) \cdots f_m(x_1)} \times$$

$$\times (M(x_1, x_2) f_1 \cdots f_k - M(x_1, x_2) f_{k+1} \cdots f_m) > 0,$$

т. е. $M(x_1, x_2) f_1 \cdots f_k > -M(x_1, x_2) f_{k+1} \cdots f_m$, откуда вытекает (1).

Доказательство достаточности: из

$$\frac{f_1(x_2) \cdots f_k(x_2) - f_1(x_1) \cdots f_k(x_1)}{f_1(x_1) \cdots f_k(x_1)} >$$

$$- \frac{f_{k+1}(x_2) \cdots f_m(x_2) - f_{k+1}(x_1) \cdots f_m(x_1)}{f_{k+1}(x_2) \cdots f_m(x_2)}$$

вытекает, что

$$\frac{f_1(x_2) \cdots f_k(x_2)}{f_1(x_1) \cdots f_k(x_1)} > \frac{f_{k+1}(x_1) \cdots f_m(x_1)}{f_{k+1}(x_2) \cdots f_m(x_2)},$$

т. е. $F(x_1) < F(x_2)$ и $M(x_1, x_2) F > 0$.

Эти две теоремы показывают, что если в качестве обобщенного критерия взять мультипликативную свертку, то она учитывает принцип жертв. Мультипликативная свертка учитывает также принцип порогов. Действительно, при выполнении одного из условий

$$f_i(x) \to 0, \quad \text{когда } x \to x_2, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

выполняется условие $\prod_{i=1}^{m} f_i(x) \to 0$, когда $x \to x_2$, и, следовательно, переход невозможен. Как показывает применение человеко-машинных методов решения многокритериальных задач, ЛПР применяет принцип порогов, задавая пороговые значения для каждого критерия в следующей форме:

$$f_i(x) > \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Пусть все критерии однородные и принимают значения из множества [0, 1]. Если система (2) совместима, то вместо $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$ можно рассматривать $\prod_{i=1}^{m} f_i^{\lambda_i}(x)$. При этом λ_i выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $\prod_{i=1}^{m} f_i^{\lambda_i}(x) < \prod_{i=1}^{m} z_i$ для всех $x \in X$, удовлетворяющих хотя бы одному из неравенств $f_i(x) < z_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Для этого достаточно λ_k выбрать из условий $f_k^{\lambda_k}(x) < \prod_{s=1}^{m} z_s$, как только $f_k(x) < z_k$.

Описанные выше принципы легли в основу при создании специального математического обеспечения автоматизированного формирования исходной базы знаний тренажерных систем объектов химической технологии. Выбор обобщенного критерия с учетом этих принципов позволяет решить задачу получения экспертных оценок при выборе параметров сложных иерархических технологических систем с привлечением опытных специалистов, работающих на разных уровнях управления. Созданная в результате диалоговая система принятия решения обеспечивает оперативное формирование базы знаний, исключая противоречивость и несовместимость информации, получаемой от экспертов разных уровней управления. В частности, при создании базы знаний тренажера операторов производства винилхлорида [4] с учетом особенностей указанного объекта управления получены эффективные решения при наличии множества противоречивых критериев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.—М.: Наука, 1982.—256 с.
2. *Попов Н. М.* Численные алгоритмы многокритериальной оптимизации // Системное программирование и вопросы оптимизации.—М.: Изд-во МГУ, 1987.—С. 155—168.
3. *Цыпкин Я. З., Красненкер А. С.* Стабильные алгоритмы векторной оптимизации // Э. и ММ.—1978.—№ 6.—С. 1181—1188.
4. Создание интеллектуальных информационно-моделирующих обучающих комплексов (тренажеров) для сложных химико-технологических объектов: Сб. науч. тр. под ред. Г. Г. Арунянца.—Ереван: АрмНИИНТИ, 1990.—75 с.

Ер. ОКБА НПО «Химавтоматика»

5. VII. 1989