Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLIII, № 4, 1990, с. 185–188

ГИДРАВЛИКА

УДК 532.517.3

А. А. САРУХАНЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Задача приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса для осесимметричного ламинарного движения вязкой жидкости при двух нулевых граничных условиях и произвольного начального условия. По полученной формуле распределения скоростей по живому сечению можно определить расход и среднюю скорость потока.

Библиограф.: 5 назв.

Խնդիրը բերվում է մածուցիկ հեղուկի առանցքասիմետրիկ լամինար շարժման համար Նավիե-Ստոքսի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի ինտեգրմանը երկու զրոյական եզրային և կամայական սկզբնական պայմանների դեպքում: Արագությունների բաշխման ստացված բանաձևով կարելի է հաշվել կենդանի հատույթով ելքը և հոսքի միջին արագությունը:

Рассмотрим нестационарное ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости в кольцевой цилиндрической трубе с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2. Дифференциальные уравнения, описывающие нестационарное осесимметричное течение, имеют вид [1, 2, 4]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Из последних двух уравнений следует, что давление в каждый момент во всех живых сечениях имеет одну и ту же величину. Это возможно, если

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(t) \tag{3}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(r, t) = \psi(r), \quad t = 0; \qquad u(R_1, t) = 0 \ \text{ и } \ u(R_2, t) = 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) согласно (4) представим в виде

$$u = u_1 + u_2, \tag{5}$$

где u_1 — решение задачи, учитывающее действие перепада давления, u_2 — то же, с учетом влияния стенок трубы и начального распределения скоростей.

Для первого условия получаем краевую задачу — найти решение неоднородного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right) + f(t) \tag{6}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$\begin{gathered} u_1(r,\ t) = 0, \quad t = 0, \quad R_1 < r < R_2 \\ u_1(R_1,\ t) = 0 \quad \text{и} \quad u_1(R_2,\ t) = 0, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Для второго условия имеем краевую задачу

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) \tag{8}$$

при условиях

$$\begin{gathered} u_2(r,\ t) = \psi(r), \quad t = 0, \quad R_1 < r < R_2; \\ R_2(R_1,\ t) = 0 \quad \text{и} \quad u_2(R_2,\ t) = 0, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Решение уравнения (8) с учетом (9) имеет вид [3, 5]

$$u_2(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k^2 \nu t} V_0(\lambda_k r), \tag{10}$$

где $V_0(\lambda_k r)$ — комбинация Бесселевых функций:

$$V_0(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) Y_0(\lambda_k R_1) - I_0(\lambda_k R_1) Y_0(\lambda_k r), \tag{11}$$

$I_0(\lambda_k r)$ — Бесселевы функции первого рода нулевого порядка, $Y_0(\lambda_k r)$ — то же, второго рода нулевого порядка, λ_k — собственные числа задачи, которые являются корнями характеристического уравнения

$$I_0(\lambda_k R_2) Y_0(\lambda_k R_1) - I_0(\lambda_k R_1) Y_0(\lambda_k R_2) = 0. \tag{12}$$

Значение постоянных коэффициентов A_k определяются из начального условия задачи

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_0(\lambda_k r) \tag{13}$$

и

$$A_k = \frac{\pi^2 \lambda_k^2 I_0^2(\lambda_k R_2)\,[F(R_2) - F(R_1)]}{2\,[I_0^2(\lambda_k R_1) - I_0^2(\lambda_k R_2)]}, \tag{14}$$

где

$$F(R) = \int_0^R r\psi(r)\, V_0(\lambda_k r)\, dr. \tag{15}$$

Для определения функции $u_1(r, t)$ имеем неоднородное уравнение (6) с нулевыми начальными и граничными условиями (7). Поищем общее решение этой задачи в виде ряда Фурье-Бесселя по собственным функциям задачи

$$u_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\, V_0(\lambda_k r)\, e^{-\lambda_k^2 \nu t}. \tag{16}$$

Совместно решая (6) и (16), для определения коэффициентов $B_k(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k'(t)\, V_0(\lambda_k r)\, e^{-\lambda_k^2 \nu t} = f(t). \tag{17}$$

Обе части равенства (17) умножим на $r V_0(\lambda_m r)$ и проинтегрируем в пределах от R_1 до R_2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\, e^{-\lambda_k^2 \nu t} \int_{R_1}^{R_2} r V_0(\lambda_k r)\, V_0(\lambda_m r)\, dr = f(t) \int_{R_1}^{R_2} r V_0(\lambda_m r)\, dr. \tag{18}$$

Так как $\int_{R_1}^{R_2} r V_0(\lambda_k r)\, V_0(\lambda_m r)\, dr = 0$, если $k \neq m$, а при $k = m$ —

$$\int_{R_1}^{R_2} r V_0^2(\lambda_m r)\, dr = \frac{2\,[I_0^2(\lambda_k R_1) - I_0^2(\lambda_k R_2)]}{\pi^2 \lambda_k^2 I_0^2(\lambda_k R_2)}.$$

Учитывая, что

$$\int_{R_1}^{R_2} r V_0(\lambda_k r)\, dr = \frac{2}{\pi \lambda_k^2}\left(\frac{I_0(\lambda_k R_1)}{I_0(\lambda_k R_2)} - 1\right),$$

уравнение (18) примет вид

$$B_k'(t)\, \frac{2\,[I_0^2(\lambda_k R_1) - I_0^2(\lambda_k R_2)]}{\pi^2 \lambda_k^2 I_0^2(\lambda_k R_2)}\, e^{-\lambda_k^2 \nu t} = \frac{2}{\lambda \pi_k^2}\left(\frac{I_0(\lambda_k R_1)}{I_0(\lambda_k R_2)} - 1\right).$$

откуда

$$B_k(t) = \frac{\pi I_0(\lambda_k R_2)}{I_0(\lambda_k R_1) + I_0(\lambda_k R_2)}\,[\Phi(t) - \Phi(0)], \tag{19}$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^t f(t)\, e^{\lambda_k^2 \nu t}\, dt. \tag{20}$$

Таким образом, общее решение задачи согласно (5), (10), (14), (16) и (19) будет

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi I_0(\lambda_k R_2)}{I_0(\lambda_k R_1) + I_0(\lambda_k R_2)}\left\{\frac{\lambda \pi_k^2}{2} \cdot \frac{I_0(\lambda_k R_2)}{I_0(\lambda_k R_1) - I_0(\lambda_k R_2)} \times \right.$$

$$\left. \times [F(R_2) - F(R_1)] + \Phi(t) - \Phi(0)\right\} V_0(\lambda_k r)\, e^{-\lambda_k^2 \nu t}. \tag{21}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Д. Н.* Нестационарные гидромеханические процессы.— М.: Машиностроение, 1982.— 240 с.
2. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1951.— 415 с.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М.: Наука, 1967.— 599 с.
4. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: ГИТТЛ, 1955.— 432 с.
5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.— М.: ИЛ, 1964.— 487 с.

ЕрПИ им. К. Маркса 7. VI. 1988

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLIII, № 4, 1990, с. 188—192

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УДК 621.317

Э. В. КАЗАРЯН, М. К. БАГДАСАРЯН

К РАСЧЕТУ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ БЕСКОНТАКТНОГО ТОКОИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА НА ЭВМ

Приведены результаты аналитического исследования зависимостей изменения магнитного потока от положения проводника с током и программа для расчета на ЭВМ, которая позволяет определить параметры токоизмерительного устройства и оценить погрешность измерения, соответствующую различным геометрическим размерам и свойствам материала магнитопровода, вдоль длины магнитопровода, охваченного обмоткой. Это позволяет конструировать бесконтактные токоизмерительные устройства с минимальной погрешностью измерения.

Ил. 3. Библиогр.: 3 назв.

Բերված են հոսքի հաղորդիչի դիրքի փոփոխությունից կախված մագնիսական հոսքի փոփոխության վերլուծական հետազոտությունը և ԷՀՄ-ով հաշվարկի ծրագիրը, որի միջոցով որոշվում է հոսանքաչափիչ սարքի պարամետրերը և գնահատվում է մագնիսալարի տարբեր չափերին և նյութի հատկություններին համապատասխանող չափման սխալը հոսանքի հաղորդիչի տարբեր դիրքերում: Դա հնարավորություն է տալիս նախագծել նվազագույն չափման սխալով անհպակա հոսանքաչափիչ սարք:

При инженерных расчетах магнитных цепей чаще всего используются методы коэффициентов рассеяния, конечных разностей и графоаналитический [1]. Выполнение расчетов этими методами достаточно сложно и трудоемко из-за нелинейности магнитной цепи, поэтому расчет магнитной цепи целесообразно проводить аналитическим методом [2] с использованием ЭВМ. Рассматриваемая магнитная система электроизмерительных клещей переменного тока типа Ц4505 состоит из стального шихтованного магнитопровода, выполненного из двух С-образных половин с расположенными на них одинаковыми обмотками $W_2/2$, соединенными согласно (рис. 1*а*). Между половинами магнитопровода имеются технологические воздушные зазоры δ_1 и δ_2. Схема за-