Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLIII, № 3, 1990, с. 121—125

ГИДРАВЛИКА

УДК 532.517.3

А. А. САРУХАНЯН

РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

Исследование течения вязкой жидкости в указанных условиях основывается на некотором предположении о характере течения. При такой постановке задачи полученные решения дают точные результаты только в некоторых диапазонах параметров движения. Предлагается метод решения задачи для произвольного осесимметричного профиля скоростей в начале входного участка круглой цилиндрической трубы. Полученные решения уравнения Навье—Стокса, приближенные по методу С. М. Тарга, дают достаточно хорошее совпадение с данными экспериментов по всей длине начального участка.

Библиогр.: 3 назв.

Նշված պայմաններում մածուցիկ շարժման ուսումնասիրությունը հիմնվում է շարժման բնույթի որոշակի ընդունելության վրա։ Խնդրի նման դրվածքի դեպքում ստացված լուծումները տալիս են արդյունքներ միայն շարժման որոշ տիրույթներում։ Կլոր հատվածքով խողովակի սկզբնական տեղամասում արագության կամայական առանցքահամաչափ պրոֆիլի համար առաջարկվում է խնդրի լուծման նոր մեթոդ։ Նավյե-Ստոքսի հավասարումների համար, որոնք մոտարկվում են Ս. Մ. Տարգի եղանակով, ստացված լուծումները շարժման ամբողջ տիրույթում տալիս են փորձի տվյալների հետ լավ համընկնող արդյունքներ։

При построении каждого из приближенных методов расчета течения в начальном участке [1—3] приходится производить некоторые предположения о характере течения, поэтому решения, полученные по этим методам, дают точные результаты в определенных диапазонах параметров движения. В работе [1] излагается метод решения задачи о развитии течения в круглой трубе, основанный на использовании приближенных уравнений движения вязкой жидкости, в которых производится частичный учет их членов. Однако, ход решения задачи и результаты получаются громоздкими.

Ниже предлагается другой метод, который по существу не меняет постановки задачи, но приводит к сравнительно простому решению. Пусть в круглой неограниченной в одном направлении трубе радиуса R происходит ламинарное стационарное течение вязкой жидкости, причем, жидкость имеет во входном сечении $z = 0$ некоторый, наперед заданный, произвольный осесимметричный профиль скоростей $U = \varphi(r)$. Совместим с центром входного сечения начало осей цилиндрических координат и направим ось OZ вдоль оси трубы в сторону течения. Упрощенные уравнения такого осесимметричного движения имеют вид [1]

$$U_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (v_r r)}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

где U_0 — средняя скорость живого сечения

$$U_0 = \frac{2}{R^2}\int_0^R \varphi(r)\, r dr \tag{3}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$v_z = 0, \quad v_r = 0 \quad \text{при } r = R, \quad z > 0; \tag{4}$$

$$v_z = \varphi(r) \quad \text{при } z = 0, \quad 0 < r < R. \tag{5}$$

$$v_z \to v' \quad \text{при } z \to \infty, \ 0 \leqslant r < R. \tag{6}$$

Здесь v'—скорость стабилизированного ламинарного движения, определяемое из уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Из (7) для v' получаем известную формулу

$$v' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R^2}{4\nu}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{8}$$

Средняя скорость при ламинарном движении жидкости определяется по формуле $U_0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R^2}{8\nu}$ или $-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8\eta U_0}{R^2}$, следовательно

$$v' = 2U_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)_{z\to\infty}. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (1) при краевых условиях (4)—(6) поищем в виде суммы

$$v_z = U(z, r) + \psi(z, r), \tag{10}$$

где $U(z, r)$ — общее решение однородного уравнения

$$U_0\frac{\partial U}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right), \tag{11}$$

а $\psi(z, r)$ — частное решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее условию $\frac{\partial\psi(z, r)}{\partial z} = f_0(z)$.

Общее решение уравнения (11) поищем в виде

$$U(z, r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(z)\, J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right). \tag{12}$$

где $C_k(z)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие от z, $J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)$ — функции Бесселя первого рода нулевого порядка, λ_k — собственные числа задачи.

Подставляя (12) в (11), для определения $C_k(z)$ получаем уравнение

$$U_0 \sum_{k=0}^{\infty} C_k'(z) J_0\left(\lambda_k\left(\frac{r}{R}\right)\right) = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} C_k(z) \frac{\lambda_k^2}{R^2} J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right).$$

Отсюда, приравнивая соответствующие коэффициенты в левой и правой части, найдем

$$C_k'(z) = -\frac{\lambda_k^2}{R\,\mathrm{Re}} C_k(z), \tag{13}$$

где $\mathrm{Re} = RU_0/\nu$.

Решение уравнения (13) имеет вид

$$C_k(z) = C_k e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,\mathrm{Re}} z}, \tag{14}$$

где C_k — постоянный коэффициент, подлежащий определению, а общее решение задачи с учетом (10), (12) и (14) —

$$v_z = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,\mathrm{Re}} z} + \psi(z, r). \tag{15}$$

Для определения неизвестной функции $\psi(z, r)$ используем уравнение (2) и, принимая во внимание условия прилипания жидкости к стенкам трубки, запишем

$$\int_0^R r \frac{\partial v_z}{\partial z} \partial r = 0. \tag{16}$$

Подставляя в (16) значение v_z из (15), получаем

$$\psi'(z) = \frac{2}{R\,\mathrm{Re}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda_k J_1(\lambda_k) e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,\mathrm{Re}} z},$$

откуда

$$\psi(z, r) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,\mathrm{Re}} z} + C_0(r). \tag{17}$$

С учетом (17) окончательно для v_z получаем

$$v_z = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left| J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} \right| e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,\mathrm{Re}} z} + C_0(r). \tag{18}$$

Значение $C_0(r)$ определяется из второго краевого условия при $z \to \infty$ и $v_z = 2U_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, откуда получаем

$$C_0(r) = 2U_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

т. е.

$$v_z = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\left(J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}\right)e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,Pe}z} + 2U_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (19)$$

Значения собственного числа задачи определяется из граничного условия при $r = R$ из (19)

$$J_0(\lambda_k) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} = 0 \quad \text{или} \quad J_2(\lambda_k) = 0. \quad (20)$$

Следовательно, собственные числа задачи λ_k являются последовательными корнями функции Бесселя первого рода второго порядка. Из краевого условия (5) и уравнения (19) имеем

$$\varphi_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\left[J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}\right], \quad (21)$$

или

$$\varphi_1(r) = \varphi(r) - 2U_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (22)$$

Из последнего равенства видно, что постоянные числа C_k являются коэффициентами разложения функции $\varphi_1(r)$ в ряд Фурье-Бесселя.

Система нормализованных ортогональных функций, соответетствующих собственным функциям, с весом r имеет вид

$$\Phi_k\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_k}\left[1 - \frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)}{J_0(\lambda_k)}\right]. \quad (23)$$

Для определения значения коэффициентов C_k обе части уравнения (21) умножим на $\lambda_k \frac{r}{R}\Phi_k\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)dr$, проинтегрируем по r от 0 до R и получим

$$C_k = \int_0^R \frac{\lambda_k}{R^2} 2\sqrt{2}\left[1 - \frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)}{J_0(\lambda_k)}\right]\varphi_1(r)\,r\,dr. \quad (24)$$

Совместное решение (19) и (1) дает

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu\lambda_k^2}{R^2} J_0(\lambda_k) e^{-\frac{\lambda_k^2}{R\,Pe}z} + \frac{8\nu U_0}{R^2}. \quad (25)$$

откуда видно, что распределение давления вдоль оси трубы совпадает в пределе при $z \to \infty$ с распределением, соответствующим параболическому режиму течения, т. е.

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z\to\infty} = \frac{8U_0\eta}{R^2}.$$

Интегрируя соотношение (25) по z от 0 до некоторого z, окончательно получаем закон распределения давления вдоль оси трубы

$$\frac{p_0 - p}{\lambda} = U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_0(\nu_k) - J_0(\nu_k) e^{-\frac{\nu_k^2}{R\,\mathrm{Re}} z} \right] + \frac{8U_0\nu}{R^2} z. \qquad (26)$$

Легко проверить, что в (26) при $z = 0$ будем иметь $p = p_0$.

Для проверки достоверности расчетов были сопоставлены экспериментальные кривые, полученные в [1], с данными, полученными по формуле (19). Расчетные кривые дают достаточно хорошее совпадение с данными экспериментов на всей длине начального участка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений.— М.—Л.: Изд-во тех.-теорет. лит., 1951.— 415 с.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.— 711 с.
3. *Попов Д. Н.* Нестационарные гидро-механические процессы.— М.: Машиностроение, 1982.— 240 с.

ЕрПИ им. К. Маркса

7. VI. 1988

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLIII, № 3, 1990, с. 125—127.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317.734

Р. А. СИМОНЯН, С. А. ШАШИКЯН

ОСНОВНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ ПИТАНИЯ

Рассматриваются основные параметры выпускаемых приборов с точки зрения схемной реализации и функциональных возможностей. Доказывается необходимость разработки приборов нового поколения для непосредственного быстрого и точного измерения основных параметров источников питания (выходного сопротивления, коэффициента нестабильности, пульсации выходного напряжения и др.). Описан разработанный макет прибора нового поколения для измерения указанных параметров.

Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.

[illegible]