

линейно восстанавливающей силой [1]. При увеличении нагрузки в зоне OB_8 изменение относительного перемещения элемента 3 будет следовать по стрелкам сплошной линии и срыв колебаний произойдет в точках B_2 , B_4 и B_6 , B_8 соответственно. При уменьшении амплитуды колебаний внешней нагрузки изменение относительного перемещения элемента 3 будет следовать по стрелкам пунктирной линии и срыв колебаний произойдет в точках B_2 , B_4 и B_6 , B_4 . Срывы колебаний в окрестности указанных точек были обнаружены также экспериментально.

Таким образом, решение системы (2) показывает существенно влияние нелинейной восстанавливающей силы на срывы и последующие переходы в новое стационарное состояние элемента 3 при внешнем возмущении на фиксированных частотах. Аналогичные зоны устойчивости и неустойчивости были наблюдаемы при исследовании колебательного состояния элемента 2. Указанные результаты были использованы для оптимального выбора жесткостей конструктивных элементов асинхронных двигателей серии АИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Носовик Э. Л., Нырков А. Л. Нелинейные колебания статически нагруженных несбалансированных роторов на подшипниках качения // *Машиностроение*. — 1975. — № 3. — С. 13—19.
2. Фельдман А. И. Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970. — 718 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абломозина и Н. Стигмэ. — М.: Наука, 1979. — 564 с.
4. Л. Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

НИИ электромаш

8 III 1988

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XI, III, № 2, 1980, с. 54—60

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

УДК 699.841

В. А. АМБАРУМЯН, А. Г. АБОВЯН

КОЛЕБАНИЯ ПЕРЕКРЫТИЙ, ОПИРАЮЩИХСЯ НА ТОЧЕЧНЫЕ ОПОРЫ И ИМЕЮЩИХ КВАДРАТНЫЕ ОТВЕРСТИЯ

Рассмотрены свободные колебания перекрытий в виде квадратных пластин со свободными краями, опирающихся на симметрично расположенные точечные опоры и имеющих квадратные отверстия. Для решения задачи применены уравнения Лагранжа второго рода. Получены зависимости безразмерной частоты колебаний пластинки от координат расположения точечных опор и размеров симметрично расположенных квадратных отверстий.

На 3 иллюстрац. 4 табл.

Դիտարկել են ազատ եզրեր ունեցող և կիսաշին հենարանների վրա լինված շաղա-
կուի սալերի ազատ տատանումները: Խնդրի լուծման համար կիրառվել են Հադամսի երկ-
րորդ սահմանային պայմանները: Մտացվել են սալի ազատ տատանման իմունական հաճախու-
թյան կախվածությունները կիսաշին հենարանների կոորդինատներից և համալսվի դասավոր-
ված շաղախուի անցքերի չափերից:

Свободные колебания перекрытий, представляющих квадратные пластины со свободными концами и опирающихся на точечные опоры, рассмотрены в работах [1, 2]. Указанные задачи обычно последуются применением приближенных методов — Рунге, Гауэркина, конечных разностей, конечных элементов и др. Одним из наиболее удобных в вычислительном отношении и возможностей решения задач с сложными граничными условиями является метод, основанный на применении уравнений Лагранжа в сочетании с использованием условий связи, учитываемых с помощью множителей Лагранжа [2]. В работе [2] этим методом получены значения частот симметричных вертикальных колебаний квадратных пластин в случае, когда четыре симметричные жесткие опоры находятся на диагоналях.

Ниже, используя методику применения множителей Лагранжа, исследованы свободные колебания пластины с точечными опорами. Рассмотрены следующие вопросы: а) получение зависимостей первых частот колебаний квадратных пластин с свободными концами от координат произвольно-симметрично расположенных точечных опор. Определение локальных и абсолютных экстремумов основных частот свободных колебаний в зависимости от расположения опор; б) исследование свободных колебаний пластины с точечными опорами, имеющих симметричные квадратные отверстия.

Определение частот свободных колебаний пластин перекрытий с точечными опорами представляет интерес с точки зрения разработки методов динамического или сейсмического расчета, в которых используются разложения по собственным формам колебаний. Несколько отличная от рассматриваемой методика определения частоты основного тона свободных колебаний шарнирно-опертых пластины с отверстиями представлена в [3, 4]. Рассмотрим свободные колебания пластины, кинематическая энергия которой равна

$$K = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad (1)$$

где ρ — масса единицы площади, a, b — размеры пластины в плане, $W(x, y, t)$ — перемещение пластины, которое принимается в виде

$$W(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x, y), \quad (2)$$

где $\phi_n(x, y)$ — форма колебаний пластинки без внешних связей, $q_n(t)$ — обобщенная координата. Интегрирование производится по всей площади пластинки, а если имеется отверстие, то его исключают

при этом. Подставляя (2) в (1) и учитывая ортонормированность принятых функций $\varphi_n(x, y)$, получаем

$$K = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)^2 M_n, \quad \text{а} \quad M_n = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi_n^2(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Потенциальная энергия пластины, учитывая ортонормированность функций $\varphi_n(x, y)$, представляется в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 q_n^2(t) M_n. \quad (4)$$

Так как пластина оперта в отдельных точках, то функция $W(x, y)$ должна удовлетворить условиям

$$W(x_k, y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \varphi_n(x_k, y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \beta_{kn} = f_k = 0, \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Составляем функцию Лагранжа L

$$L = K - \Pi + \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k, \quad (6)$$

где λ_k — множитель Лагранжа, а уравнения Лагранжа имеют вид [2]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, R, \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Совместно решая (3) — (7), получаем

$$M_n [\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n] - \sum_{k=1}^N \lambda_k \beta_{kn} = 0, \quad f_k = 0. \quad (8)$$

Так как имеют место гармонические колебания с частотой ω , то можно принять, что

$$q_n = \bar{q}_n e^{i\omega t}, \quad \lambda_k = \bar{\lambda}_k e^{i\omega t}, \quad (9)$$

следовательно,

$$\bar{q}_n = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{\lambda}_k \beta_{kn}}{M_n [-\omega^2 + \omega_n^2]}. \quad (10)$$

Подставляя во второе уравнение (8), получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{\lambda}_k G_{kn} = 0, \quad G_{kn} = \frac{\beta_{kn} \beta_{kn}}{M_n [-\omega^2 + \omega_n^2]}, \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots, R.$$

Приравнивая определитель, составленный из коэффициентов $\bar{L}_k$, к нулю, уравнение частот получаем в виде

$$|C_{kv}| = 0, \quad k, v = 1, 2, \dots, R. \quad (12)$$

С помощью (12) определены собственные частоты симметричных колебаний квадратной пластины, опирающейся на четыре жесткие опоры (из-за симметричности задачи $R = 1$). Формы колебаний ψ_n и безразмерные частоты ω_n свободной пластины имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= 1, & -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{a} \leq \frac{1}{2}, & \quad \omega_1 = 0, \\ \psi_2(x, y) &= Y_2(y) - X_2(x), & \omega_2 &= \frac{20,5}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}, \\ \psi_3(x, y) &= Y_2(y) + X_2(x), & -\frac{1}{2} \leq \frac{y}{b} \leq \frac{1}{2}, & \quad \omega_3 = \frac{23,9}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}, \\ \psi_4(x, y) &= Y_2(y) X_2(x), & & \\ -X_2(x) &= 0,9913 \cos 2k_2 \frac{x}{a} - 0,13169 \operatorname{ch} 2k_2 \frac{x}{a}, & \omega_4 &= \frac{66}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя условия (13), определяем значения M_0, M_2, M_{11}, M_{22} , а затем и частоты свободных колебаний из уравнения $|C_{11}| = 0$. На рис. 1, 2 показаны зависимости безразмерной частоты основного тона колебаний квадратной пластины $\omega_1 a^2 \sqrt{\frac{m}{D}}$ от координат точечной

опоры $\frac{x_c}{0,5a}$ и $\frac{y_c}{0,5a}$. Графики построены на основании результатов, полученных при учете в формуле (11) четырех членов ($N = 4$). Чтобы показать скорость сходимости результатов, получены также частоты для случая $N = 2$ и 3, которые подтверждают это положение при $N = 3$ и $N = 4$ и указывают на удовлетворительную точность полученных результатов. Из рис. 1, 2 следует также, что частота основного тона колебаний имеет максимум в зависимости от координат опор, которые можно определить аналитически. С учетом только двух форм $N = 2$ из (12) можно получить частоту колебаний, имеющий вид

$$\omega = 23,9 \sqrt{1 + 1,0176 [X_2(x_c) + Y_2(y_c)]^2}^{-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Условия экстремума $\frac{\partial \omega}{\partial x_c} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y_c} = 0$ приводят к следующему результату: $X_2(x_c) = 0$ при $x_c = y_c$. Таким образом, в первом приближении получено, что максимум частоты имеет место в случае, когда опоры находятся на диагонали, а координата опоры совпадает с нулевой точкой, принятой кривой $X_2(x)$ (13). Уточнение этого результата получается увеличением количества учитываемых форм колебаний. При $N = 4$ получено, что максимумы частоты при

$\frac{y_c}{0,5a} = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$ и $0,5$ соответствуют $\frac{x_c}{0,5a} = 0,255, 0,265, 0,27, 0,28, 0,29$ и $0,34$, а абсолютный максимум соответствует случаю $\frac{x_c}{0,5a} = \frac{y_c}{0,5a} = 0,28$.

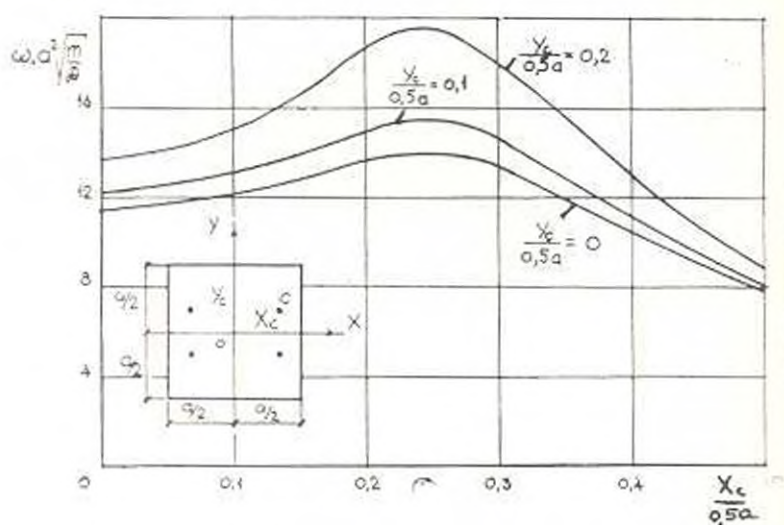


Рис. 1. Зависимости безразмерной частоты основного тона пластины от координат точечной опоры ($\frac{y_c}{0,5a} = 0, 0,1$ и $0,2$).

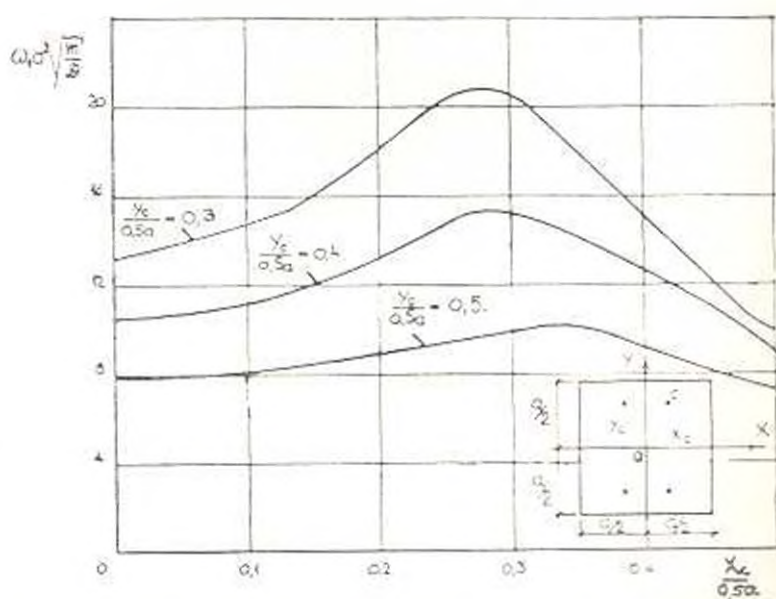


Рис. 2. Зависимости безразмерной частоты основного тона пластины от координат точечной опоры ($\frac{y_c}{0,5a} = 0,3, 0,4$ и $0,5$).

Теперь рассмотрим колебания квадратной пластины, опирающейся на точечные опоры и имеющей квадратное симметричное отверстие. Частоты колебаний в этом случае определяются с помощью той же формулы (12), но выражение M_{11} , входящее в (3), определяется

$$M_{11} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi_{11}^2(xy) dx dy = \int_{-y_0}^{y_0} \int_{-x_0}^{x_0} \varphi_{11}^2(xy) dx dy, \quad (15)$$

где $2x_0$, $2y_0$ — размеры отверстия. Вычислены и на рис. 3 построены зависимости безразмерных частот пластины от координат опор (при $x_0 = y_0$) при различных размерах отверстий. Во всех рассмотренных случаях наличие отверстия приводит к уменьшению основной частоты по сравнению со случаем сплошной пластины. Степень уменьшения частоты зависит как от размера отверстия, так и места расположения точечных опор. Так, например, при координатах опор $\frac{x_c}{0,5a} = \frac{y_c}{0,5a} = 0,3$ и размерах отверстий $\frac{x_0}{0,5a} = \frac{y_0}{0,5a} = 0,1, 0,2$ и $0,25$ безразмерная частота уменьшается соответственно на $0,4\%$, $2,2\%$ и $3,5\%$, а при $\frac{x_c}{0,5a} = \frac{y_c}{0,5a} = 0,5$ и $\frac{x_0}{0,5a} = \frac{y_0}{0,5a} = 0,1, 0,2$ и $0,25$ — $4,3\%$, 21% и $28,6\%$.

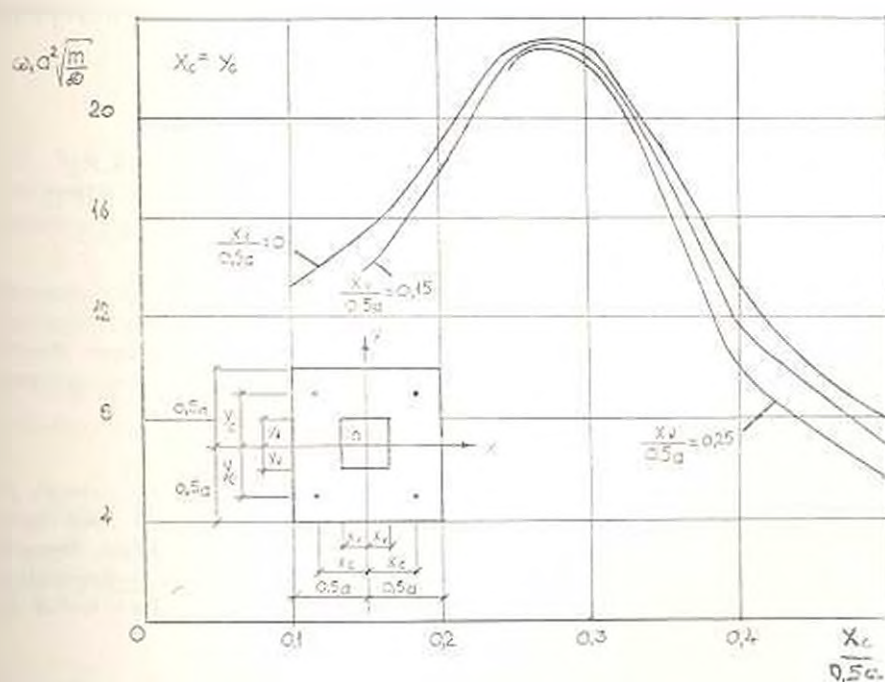


Рис. 3. Зависимости безразмерной частоты основного тона пластины, имеющей квадратное отверстие, от координаты точечной опоры.

Таким образом, предложенный ранее в [2] метод, основанный на применении уравнений и множителей Лагранжа, распространен и на случай наличия отверстий и перекрытий. Исследованы зависимости частот вертикальных колебаний перекрытий от расположения точечных опор и размеров отверстий. Полученные результаты могут быть применены при динамическом и сейсмическом расчетах сооружений промышленного, общественного или другого назначения, имеющих безбалочные перекрытия без внешних стен для опирания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цо Н. Основная частота свободных колебаний упругой квадратной пластины, опертой в четырех точках // Ракетная техника и космонавтика. — 1966. — № 4. — С. 225—227.
2. Лаурел Е. Свободные колебания линейно деформируемой конструкции при произвольных условиях опирания // Тр. Амер. Обш. инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех. — 1971. — № 3. — С. 17—23.
3. Колебания и устойчивость многовязных тонкостенных систем / Сб. ст. под ред. И. И. Преображенского. — М.: Мир, 1984. — 311 с.
4. Преображенский И. И. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями — М.: Машиностроение, 1981. — 191 с.

ЕрПН им. К. Маркса

28. XII. 1988

Изв. АН АрмССР (сер. Техн.), т. XLIII, № 2, 1990, с. 60—65

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

УДК 624.071.133.046.3

Г. А. ГЕННЕР, А. Ф. МИХАСЯН

О ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДВИЖЕНИИ В НИХ ПОТОКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Для цилиндрических оболочек из физически нелинейных материалов с произвольной диаграммой работы получено выражение для критической скорости внутреннего потока идеального газа, соответствующей поперечной потере устойчивости оболочки. Рассмотрены условия образования устойчивых форм равновесия системы оболочка — поток «бляшка» и «спазма».

Ил. 3. Библиогр.: 2 назв.

Աղյուսակների կամայական դիագրամով ֆիզիկական ոչ զրոյին նյութերից պատրաստված շանթերի համար ստացված է արտահայտություն իդեալական գազի ներքին շարժի կրիտիկական արագության համար, որը համապատասխանում է թաղանթի կայունության կորուստին նախքան նե թաղանթի նույն համակարգի բյուրացումն և սկզիումն կարճ հախառուրակչության մեծերի դոյաքման սլայմանները Հաստատվում է կրիտիկական արագության արժեքի վրա սկզբնական մեծան տարբեր աղեղցության սահմանը:

Тонкостенные цилиндрические оболочки при протекании в них потока жидкости или газа при определенных значениях его скорости мо-