Таблица 2

Выходной параметр	№ модуля				
	1	2	3	4	5
Среднее время восстановления, *мин*	135	120	120	100	130
Вместимость склада, *ячейки*		235	220	200	210
Величина задела, *шт*		125	110	110	90

Описанная выше имитационная модель обладает высокой гибкостью, дающей возможность производить настройку модели на произвольную последовательно-параллельную структуру ТЛ с необходимым числом элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Имитационное моделирование производственных систем / Под общ. ред. А. А. Вавилова.— М.: Машиностроение; Берлин: Техника, 1983.— 416 с.
2. *Матросова Г. А., Синекоп Ю. С.* Моделирование прохождения изделий по технологической линии // Автоматизация проектирования в электронике.— 1987.— № 36.— С. 57—61.
3. *Шрайбер Т. Дж.* Моделирование на GPSS.— М.: Машиностроение, 1980.— [illegible] с.
4. *Savsar Mehmet, Biles William E.* A simulation model for automated multi-stage production lines // Ann. Int. Ind. Eng. Conf., Chicago, Ill., May 6–10, 1984.— Norcross, Ga, 1984.— P. 517–525.

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLII, № 6, 1989, с. 297—302

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62.501.7

В. К. БРУТЯН

К СТОХАСТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ МАРКОВСКИХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

На закон управления марковскими системами, состояние которых задается стохастическим дифференциальным уравнением Ито, а функционал качества квадратичен, накладываются нелинейные ограничения. Для заданных нелинейных структур законов стохастического управления в пространстве состояний методами статистической линеаризации определяются приемлемые приближенные решения. Показывается, что при заданных структурных ограничениях решение эквивалентной линейной задачи достаточно точно сходится к субоптимальному решению исходной задачи. На конкретном примере полученные результаты применяются для определения закона стохастического управления двумерными марковскими системами.

Табл. 2. Библиогр.: 9 назв.

Աշխատանքում Իտոյի ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող մարկովյան համակարգերի կառավարման օրենքի վրա դրված են ոչ գծային սահմանափակումներ: Կառավարման որակը բնութագրվում է քառակուսային ֆունկցիոնալով: Տրված ոչ գծային ստոխաստիկ կառավարման օրենքների համար որոշվում են մոտավոր ընդունելի լուծումներ վիճակագրական գծայնացման մեթոդներով դրությունների տարածության մեջ։ Որոշված է, որ տրված կառուցվածքային սահմանափակումների դեպքում համարժեք գծային խնդրի լուծումը թվական ճիշտ զուգամիտվում է ելքային խնդրի համարյա լավագույն լուծմանը։ Որոշակի օրինակով ստացված արդյունքները կիրառվում են երկչափանի մարկովյան համակարգի ստոխաստիկ կառավարման օրենքի համար։

Рассматривается динамическая управляемая система, описываемая векторным стохастическим дифференциальным уравнением типа Ито [1]:

$$\partial x(t, \omega) = [Ax(t, \omega) + Du(t, \omega)]\,\partial t + G\,\partial\xi(t, \omega), \quad x(0, \omega) = x_0(\omega), \tag{1}$$

где $x(t, \omega)$ является n-мерным векторным стохастическим процессом в евклидовом пространстве R^n, представляющим состояние системы; $u(t, \omega)$ — r-мерный вектор нелинейного управления, значения которого находятся в выпуклом компактном подмножестве $U \subset R^n$; $\xi(t, \omega)$ — l-мерный винеровский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $M\{\partial\xi(t, \omega)\,\partial\xi'(\tau, \omega)\} = S(t)\,|t - \tau|$; A, D и G — $n \times n$, $n \times r$ и $n \times l$-мерный матрицы параметров, соответственно; ω — общая точка вероятностного пространства.

Предполагается, что начальное состояние $x_0(\omega)$ является нормальным случайным вектором с нулевым математическим ожиданием, не зависящим от $\xi(t, \omega)$ и имеющим корреляционную матрицу $M\{x_0(\omega)\,x_0'(\omega)\} = \Gamma_0$, где штрих обозначает транспортирование. Предполагается также, что решение уравнения (1) представляет собой марковский управляемый процесс с математическим ожиданием $\bar{x}(t) = M\{x(t, \omega)\}$, корреляционной матрицей $\Gamma = M\{(x(t, \omega) - \bar{x}(t))(x(t, \omega) - \bar{x}(t))'\}$ и n-мерной плотностью распределения вероятностей

$$p(x) = (2\pi)^{-n/2}\,|\Gamma|^{-1/2}\exp[-0{,}5\,(x - \bar{x})'\,\Gamma^{-1}(x - \bar{x})]. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем для краткости принимаются: $x \stackrel{\Delta}{=} x(t)$, $\Gamma \stackrel{\Delta}{=} \Gamma(t)$, а символ ω опускается.

Задача состоит в определении такого закона стохастического нелинейного управления $u = v(x)$ типа обратной связи, который в подмножестве U минимизирует ожидаемый квадратичный функционал

$$J = M\left\{x_T'\,\Gamma_T\,x_T + \int_0^T (x'Bx + u'Eu)\,dt\right\}$$

на основе априорной плотности распределения вероятностей $p(x_0)$ для начального состояния, где $\Gamma_T \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ и $E > 0$ являются соответственно измеримыми, локально ограниченными симметрическими матрицами. Решение этой задачи при наличии заданной нелинейной структуре закона стохастического управления в подмножестве U неизвестно [2, 3]. При этом условии суть большинства методов решения описывается на разложении нелинейной функции $v(x)$ в ряд Тейлора, что имеет следующие недостатки. Во-первых, при больших интенсивностях винеровских процессов алгоритмы могут давать расходящиеся результаты вследствие эффекта подчеркивания случайности операциями дифференцирования, которые участвуют в разложении [4, 5]. Во-вторых, разложение справедливо только для непрерывных законов нелинейного управления [4, 6]. Одним из возможных подходов к рассматриваемой задаче, свободным от этих недостатков, является метод статистической линеаризации [1, 4—8].

Решение задачи. В соответствии с методом статистической линеаризации закон стохастического нелинейного управления $u=v(x)$ заданной структуры в подмножестве U заменяется на линейное стохастическое управление $w=u_1x+u_2$, где u_1 есть некоторая $r\times n$ — мерная матрица. Эквивалентные коэффициенты r — скалярных компонент нелинейного стохастического управления $v_i(x)$ являются вектор-строками u'_{1i} матрицы u_1 и скалярными смещениями u_{2i}. Согласно методу статистической линеаризации эквивалентные коэффициенты u_{1i} и u_{2i} определяются из условий

$$M\{u_i\}=M\{w_i\},\quad i=1,\ldots,r, \tag{3}$$

$$M\{(u_i-\bar u_i)(u_j-\bar u_j)\}=M\{(w_i-\bar w_i)(w_j-\bar w_j)\}, \tag{4}$$

$$i,\ j=1,\ldots,r.$$

Подставляя $u_i=v_i(x)$ и $w_i=u'_{1i}x+u_{2i}$ в выражение (3), можно получить

$$u_{2i}=\int\limits_{R^n} v_i(x)\,p(x)\,dx-u'_{1i}\bar x.$$

Учитывая, что $\bar u=M\{u\}=M\{v(x)\}$, $\bar w=M\{w\}=u_1\bar x+u_2$ и

$$M\{(w-\bar w)(w-\bar w)'\}=M\{u_1(x-\bar x)(x-\bar x)'u'_1\}=u_1\Gamma u'_1,$$

$$M\{(u-\bar u)(u-\bar u)'\}=M\{v(x)\,v'(x)\}-M\{v(x)\}\,M\{v'(x)\},$$

из условия (4) можно определить

$$u_1\Gamma u'_1=\int\limits_{R^n} v(x)\,v'(x)\,p(x)\,dx-\int\limits_{R^n} v(x)\,p(x)\,dx\int\limits_{R^n} v'(x)\,p(x)\,dx.$$

Это матричное соотношение соответствует скалярным соотношениям

$$u'_{1i}\Gamma u_{1j}=\int\limits_{R^n} v_i(x)\,v_j(x)\,p(x)\,dx-\int\limits_{R^n} v_i(x)\,p(x)\,dx\int\limits_{R^n} v_j(x)\,p(x)\,dx. \tag{5}$$

В соответствии с модифицированным методом статистической линеаризации коэффициенты u_{1i} и u_{2i} находятся из условия [1, 5, 6, 8]

$$\min \int\limits_{R^n} [v_i(x) - u'_{1i} x - u_{2i}]^2 p(x)\, dx.$$

В этом методе эквивалентные коэффициенты u_{1i} и u_{2i} определяются в виде

$$\bar{u}_{1i} = \Gamma^{-1} \int\limits_{R^n} (x - \bar{x})\, v_i(x)\, p(x)\, dx,$$

$$\bar{u}_{2i} = \int\limits_{R^n} v_i(x)\, p(x)\, dx - u'_{1i} \bar{x}.$$

Из полученных выражений очевидно, что оба метода дают различные значения для u_{1i} и одинаковые — для u_{2i}.

В частных случаях, если в подмножестве U закон стохастического управления заданной структуры линейный и нечетный (т. е. $v_i(x) = k'_i x$ и $v_i(-x) = -v_i(x)$), можно избежать вычисления кратных интегралов, т. к. $\bar{x} = u_2 = 0$ и $u_{1i} = \lambda_i k_i$, где λ_i — скалярные величины. В этом частном случае для метода статистической линеаризации из соотношения (5) следует

$$\lambda_i^2 k'_i \Gamma k_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_i^2(y)\, p(y)\, dy$$

или

$$\lambda_i = \left[h_i^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_i^2(y)\, p(y)\, dy \right]^{1/2},$$

где $y = k'_i x$, $h_i = k'_i \Gamma k_i$, $p(y) = (2\pi h)^{-1/2} \exp(-y^2/2h)$.

Величина $\bar{\lambda}_i$ будет равна

$$\bar{\lambda}_i = h_i^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y v_i(y)\, p(y)\, dy.$$

Отметим, что если в подмножестве U закон стохастического управления заданной структуры содержит элемент:

а) с релейной характеристикой [4, 5, 7, 8]:

$$v_i(x) = \operatorname{sign}(k'_i x),$$

то $\lambda_i = h_i^{-1/2}$, $\bar{\lambda}_i = (2/\pi)^{1/2} h_i^{-1/2}$;

б) с характеристикой типа насыщения [4, 5, 7, 8]:

$$v_i(x) = \begin{cases} k_i' x, & \text{если } |k_i' x| \leq 1, \\ \operatorname{sign}(k_i' x), & \text{если } |k_i' x| \geq 1, \end{cases}$$

то

$$\lambda_i = [h_i^{-1} - (2/\pi)^{1/2} h_i^{-1/2} \exp(-(1/2) h_i) + (1 - h_i^{-1}) \operatorname{erf}(h_i^{-1/2})]^{1/2},$$

$$\bar{\lambda} = \operatorname{erf}(h_i^{-1/2}),$$

где erf обозначает интеграл вероятности ошибки [7]

Ниже сравниваются значения функционалов качества при управлении методами статистической линеаризации и субоптимальным методом полиномиальной аппроксимации [1, 9].

Пример. Пусть динамическая марковская система описывается уравнениями $dx_1 = x_2 dt + d\xi$, $dx_2 = -u dt$, $|u| \leq 1$, $M\{d\xi(t)\, d\xi'(\tau)\} = S|t - \tau|$, $M\{d\xi(t)\} = 0$ и требуется провести анализ для следующих двух случаев.

Случай 1. Функционал качества и структура закона стохастического управления описываются выражениями

$$J = \int_0^T x_1^2\, dt, \qquad u = \operatorname{sign}(k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

Вычисления по изложенным методам дают значения коэффициентов k_1 и k_2, для которых могут быть найдены соответствующие величины функционала качества, причем, при использовании λ и $\bar{\lambda}$ получаются различные значения J. Для такой структуры закона стохастического управления с помощью метода полиномиальной аппроксимации находится также субоптимальное управление. Сравнение результатов приводится в табл. 1, где столбец 1 соответствует методу статистической линеаризации, а 2 — модифицированному методу статистической линеаризации. Из этой таблицы очевидно, что в данном случае наилучшая сходимость к результатам субоптимального метода полиномиальной аппроксимации получается при модифицированном методе статистической линеаризации.

Случай 2. Функционал качества и структура закона стохастического управления описываются выражениями

$$J = \int_0^T (x_1^2 + x_2^2)\, dt,$$

$$u = \begin{cases} \operatorname{sign}(k_1 x_1 + k_2 x_2), & \text{если } |k_1 x_1 + k_2 x_2| \geq 1, \\ k_1 x_1 + k_2 x_2, & \text{если } |k_1 x_1 + k_2 x_2| < 1. \end{cases}$$

В этом случае сравнения результатов приводятся в табл. 2, из которой очевидно, что метод статистической линеаризации дает по сравнению с субоптимальным методом полиномиальной аппроксимации лучшие результаты, чем модифицированный метод.

Таблица 1

Значение коэффициента интенсивности винеровского процесса	Значение функционала качества		
	при управлении методом полиномиальной аппроксимации	при управлении методами статистической линеаризации	
		1	2
0,5	0,198	0,123	0,142
1	1,263	0,791	0,921
2	8,018	5,245	5,845
3	25,347	11,456	17,196
4	52,175	23,918	34,137
5	92,126	57,719	67,239

Таблица 2

Значение коэффициента интенсивности винеровского процесса	Значение функционала качества		
	при управлении методом полиномиальной аппроксимации	при управлении методами статистической линеаризации	
		1	2
0,5	0,354	0,353	0,353
1	1,437	1,421	1,426
2	5,985	6,059	6,434
3	14,296	13,833	17,6[illegible]7
4	36,739	35,416	40,199
5	61,782	59,825	67,976

Из проведенного численного анализа следует, что в общем случае тот или иной метод статистической линеаризации не может быть рекомендован как наилучший, т. к. конечные результаты зависят от структуры закона стохастического управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бриган В. К.* Основные аспекты теории непрерывных марковских управляемых систем и ее приложение.— Ереван: Анастан, 1984.— 296 с.
2. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление.— М.: Наука, 1978.— 552 с.
3. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы.— М.: Наука, 1985.— 560 с.
4. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования.— М.: Наука, 1966.— 992 с.
5. *Пупков К. А.* Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления.— М.: Машиностроение, 1965.— 399 с.
6. *Казаков И. Е., Мальчиков С. В.* Анализ стохастических систем в пространстве состояний.— М.: Наука, 1983.— 381 с.
7. *Бриган В. К.* Некоторые вопросы применения марковских процессов к исследованию нелинейных автоматических систем.— Ереван: Изд-во ЕрГУ, 1974.— 197 с.
8. *Казаков И. Е., Доступов Б. Г.* Статистическая динамика нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1962.— 332 с.
9. *Бриган В. К.* Об одной задаче синтеза нелинейных марковских управляемых систем методом полиномиальной аппроксимации // Автоматика и телемеханика.— 1980.— № 7.— С. 51—61.

ЕрИНХ — 4. IV. 1986