

УДК 621.391.81

Д. С. МЕЛКОНЯН, А. В. САРКИСЯН

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЦИФРОВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПО НЕРАВНООТСТОЯЩИМ ОТСЧЕТАМ ПРОЦЕССА

Предлагается эффективный алгоритм расчета косинус- и синус-преобразований Фурье от функции, заданной на неравноотстоящих точках, когда точки отсчетов функции расположены на оси абсцисс по закону геометрической прогрессии. Для интерполяции и аппроксимации исходной функции (процесса) вводятся специальные функции отсчетов, с помощью которых строится интерполирующее выражение в виде некоторой суммы этих функций. Это используется при построении расчетных формул для косинус- и синус-преобразований Фурье, которые представляются (с помощью теоремы изменения масштаба) в виде суммы соответственно косинус- и синус-преобразований Фурье функций отсчетов. Действительная и мнимая частотные характеристики вычисляются для дискретных значений частоты, также имеющих геометрическое распределение.

Ил. 3. Библиогр.: 6 назв.

Առաջարկվում է Ֆուրյեի կոսինուսի և սինուս-վերափոխության արդյունավետ ալգորիթմ, որտեղ վերափոխվող ֆունկցիան որված է իր արժեքներով անհավասարազան կետերում, որոնք արժեքների առանցքի վրա անկազրկած են ըստ երկրաչափական պրոգրեսիայի օրենքի: Տրված ֆունկցիայի (պրոցեսի) գծայնացման և միջարկման համար ներանցվում են անհավասարային ֆունկցիաներ, որոնց ոգնությանը կառուցվում է միջարկման արժեքայնություններ, որն անի այդ ֆունկցիաների գումարի տեսք: Այս հանգամանքը օգտագործվում է Ֆուրյեի կոսինուսի և սինուս-վերափոխության հաշվարկային արժեքայնությունների կառուցելիս՝ կիրառելով մասշտաբի փոփոխության թեորեմը: Իրական և կեղծ համարական-ներկայիքային բնութագրերը հաշվվում են անհավասարային երկրաչափական բաշխման օրենքին ենթարկվող ընդհանուր արժեքների համար:

Для машинного расчета преобразования Фурье в последние 20 лет разработаны несколько семейств эффективных машинных алгоритмов — быстрое преобразование Фурье (БПФ) [1], метод Винниграда [2], методы максимальной энтропии [3] и др. Хотя эти алгоритмы основаны на различных теоретических концепциях и вычислительных схемах, все они используют в качестве исходных данных равноотстоящие отсчеты обрабатываемых функций. Между тем в некоторых случаях, например, при обработке кривых переходных процессов и частотных характеристиках, значительный эффект в смысле сокращения избыточности исходных данных дает введение неравномерного шага дискретизации [4—6]. Однако выгоды от введения неравномерного шага обычно оказываются нереализованными, поскольку алгоритмы расчета преобразования Фурье по неравноотстоящим отсчетам не являются эффективными в принятом смысле. Поэтому задача построения эффективных алгоритмов цифрового спектрального анализа, которой посвящена данная статья, является актуальной.

Пусть аппроксимируемая функция $f(x)$ задана на вещественной оси x дискретными отсчетами $f_k = f(x_k)$ в узловых точках $x_k = x_0 c^k$, ($k=0, \dots, N$), где x_0 и c — константы, удовлетворяющие условиям $x_0 > 0$, $c > 1$.

Идея предлагаемого алгоритма заключается в том, что интерполирующая функция $S(x)$, для которой должно выполняться условие $S(x_k) = f_k$, ищется в виде

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \lambda(x/x_k),$$

где $\lambda(y)$ — так называемая функция отсчетов, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lambda(c^m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0; \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Кроме того, эта функция должна быть ограничена и непрерывна на отрезках $[c^k, c^{k+1}]$ ($k = -1, 0, 1, \dots$).

Введем функции отсчетов следующих двух типов:

1. Финитная функция отсчетов (рис. 1а, кривая 1):

$$\bar{\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{1-cx}{1-c} & x \in [1/c; 1]; \\ \frac{c-x}{c-1} & x \in [1; c]; \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [1/c; c]. \end{cases}$$

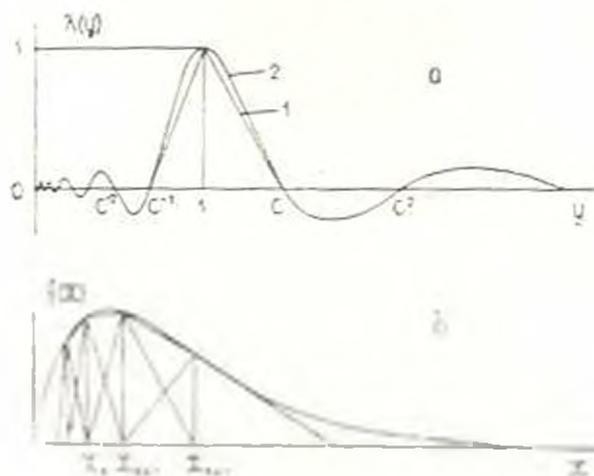


Рис. 1. а — финитная (1) и синусоидальная (2) функции отсчетов; б — принцип аппроксимации с помощью финитных функций отсчетов.

2. Синусоидальная функция отсчетов (рис. 1а, кривая 2):

$$\lambda(x) = \frac{\sin(\pi \log x)}{\pi \log x}.$$

Принцип аппроксимации функции с помощью финитной функции отсчетов приведен на рис. 1б. О точности аппроксимации с помощью финитной и синусовидальной функций отсчетов можно судить по результатам, представленным на рис. 2.

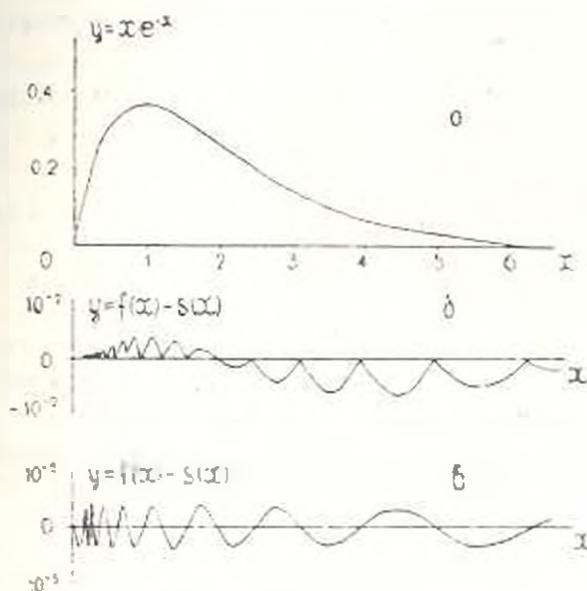


Рис. 2. Функция $y = x e^{-x}$ (а) и расчетные кривые ошибок аппроксимации финитными (б) и синусовидальными (в) функциями отсчетов.

Для расчета косинус- и синус-преобразований Фурье

$$F_c(a) = \int_0^{\infty} f(x) \cos ax \, dx, \quad F_s(a) = \int_0^{\infty} f(x) \sin ax \, dx$$

от заданной функции $f(x)$ последняя представляется на бесконечной полуоси $[0; \infty)$, рассмотренной интерполирующей функцией $f(x) \approx S(x)$. Таким образом, задача сводится к вычислению интегралов вида

$$R(a) = F_c[S(x)] = \int_0^{\infty} S(x) \cos ax \, dx,$$

$$I(a) = F_s[S(x)] = \int_0^{\infty} S(x) \sin ax \, dx.$$

Принцип построения расчетных формул использует то обстоятельство, что $S(x)$ состоит из суммы функций отсчетов $\lambda(y)$.

Пусть

$$u(v) = \int_0^{\infty} \lambda(y) \cos vy \, dy, \quad v(v) = \int_0^{\infty} \lambda(y) \sin vy \, dy.$$



Тогда в использовании теоремы замены масштаба получаем

$$F_{\alpha}(x/x_0) = x_0 \alpha(x, z), \quad F_{\alpha}(x/x_0) = x_0 v(x, z),$$

следовательно,

$$R(z) = x_0 \sum_{n=0}^N f_n c^n u(x_n, z), \quad I(z) = x_0 \sum_{n=0}^N f_n c^n v(x_n, z).$$

Пусть функции $R(z)$ и $I(z)$ вычисляются для дискретных значений $z_j = z_0 h^j$, где $h = c^{1/r}$, r — целое число.

Тогда

$$R(z_j) = R_j = x_0 \sum_{n=0}^N f_n c^n u(z_0 x_0 h^{r(n+j)}), \quad (1)$$

$$I(z_j) = I_j = x_0 \sum_{n=0}^N f_n c^n v(z_0 x_0 h^{r(n+j)}). \quad (2)$$

В зависимости от используемой функции отсчетов и требуемой точности расчетов может быть выбран некоторый интервал $[v_0, v_M]$, вне которого функции $u(v)$ и $v(v)$ практически равны нулю или некоторым установившимся значениям:

$$u(v) \approx u_0, \quad v(v) \approx 0 \quad \text{при } v < v_0; \quad (3)$$

$$u(v) \approx 0, \quad v(v) \approx 0 \quad \text{при } v > v_M. \quad (4)$$

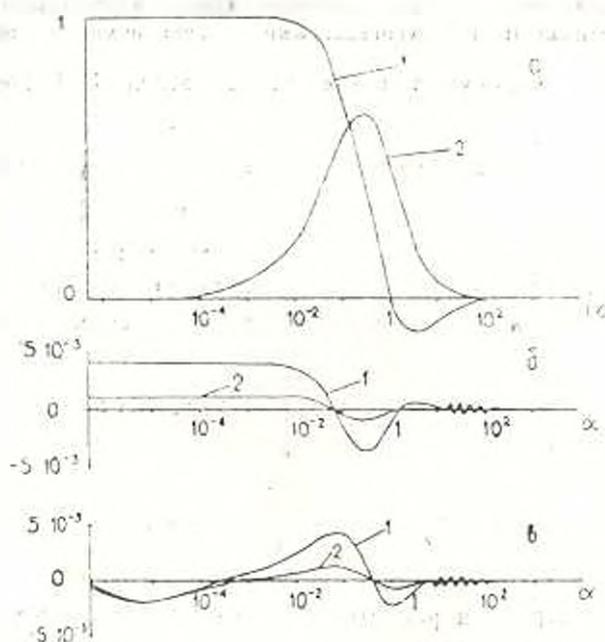


Рис. 3. Частотные характеристики функции $v = x_0^{-1}$, аппроксимированной финитной функцией отсчетов: а — вещественная (1) и мнимая (2) частотные характеристики; б — кривые ошибок вещественной частотной характеристики при различных частотах дискретизации исходной функции (10 (1) и 20 (2) точек на декаду); в — кривые ошибок мнимой частотной характеристики при различных частотах дискретизации исходной функции (10 (1) и 20 (2) точек на декаду).

На оси ν зададим сетку $\nu_m = \nu_0 h^m$ ($m = 0, 1, \dots, M$) и введем обозначения: $u(\nu_m) = u_m$, $v(\nu_m) = v_m$. Примем $\alpha_n = \nu_0 x_0$. В силу условий (3) и (4) и выражений (1) и (2) функции $R(z)$ и $I(z)$ приближенно равны нулю при установившихся значениях вне интервала $|\alpha_{-M}; \alpha_M|$. Таким образом, при заданном шаге дискретизации (параметр h) функции $R(z)$ и $I(z)$ определяются значениями

$$R_j = x_0 \sum_{n=0}^N J_n e^{i\alpha_n} u_{j(n)}, \quad I_j = x_0 \sum_{n=0}^N J_n e^{i\alpha_n} v_{j(n)}, \quad (j = -N, \dots, 0, \dots, M). \quad (5)$$

Значения U_m и V_m ($m = 0, \dots, M$) для финитной функции отсчетов вычисляются по аналитическим формулам. Для синусоидальной функции отсчетов эти значения могут быть рассчитаны любым численным методом, в частности, вышеописанным, используя в качестве интерполирующей функции финитную функцию отсчетов. Формулы (5) обеспечивают эффективный алгоритм расчета преобразований Фурье, существенно сокращающий объем вычислений при полном расчете искомым функций. На рис. 3, приведены вещественная и мнимая частотные характеристики функции $\text{hexr}(-x)$, полученные с помощью описанного алгоритма.

Представленный эффективный алгоритм может иметь широкое практическое применение при анализе переходных процессов в линейных динамических системах, уравнения которых неизвестны. Геометрический шаг дискретизации оказывается целесообразным при расчете жестких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рибичер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.—М.: Мир, 1978.—848 с.
2. Быстрые алгоритмы цифровой обработке изображений / под ред. Хуанга Т. С.—М.: Радио и связь, 1984.—224 с.
3. Джеймс Э. Т. О логическом обосновании метода максимальной энтропии // ТИИЭР.—1982.—Т. 70, № 9.—С. 33—51.
4. Мелконян Д. С., Газарян А. А. Численный метод расчета частотных характеристик по неравноотстояющим точкам кривой переходного процесса // Изв. АН Арм. ССР. Сер. ТН.—1979.—Т. XXXII, № 6.—С. 22—27.
5. Газарян А. А., Мелконян Д. С. Алгоритмы цифрового спектрального анализа переходных процессов в биологических системах // Автоматика.—1979.—№ 6.—С. 93—100.
6. Helms H. D. Power spectra obtained from exponentially interleaved sampling positions and frequencies // IEEE Trans. on Acoust., Speech and Sign. Proces.—1976.—V. 24.—№ 1.—P. 63—71.