

Р. М. БАРСЕГЯН

## ФИЛЬТРАЦИЯ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ГРУНТАХ С УЧЕТОМ КОЛИЧЕСТВА ОТЖИМАЕМОЙ ВОДЫ НА ГРАНИЦЕ СЛОЯ

В работе [1] даны основные уравнения фильтрации воды в деформируемых водонасыщенных грунтах с учетом изменений между жидкой и твердой фазами грунта. Учет этого обстоятельства имеет важное значение для сильносжимаемых грунтов. Под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на поверхности водонасыщенного грунта, происходит консолидация грунта и из пор грунта постепенно освобождается вода за счет парового давления, устанавливаемого в воде в момент приложения внешней нагрузки. Количество воды, освобожденное из пор, равно суммарному объему уменьшенной части пор в момент времени  $t$ . В настоящее время при рассмотрении разных задач фильтрационной консолидации не учитывается влияние количества освобожденной из пор грунта воды на процесс фильтрации, а для сильносжимаемых грунтов влияние этого количества воды на процесс фильтрации может быть значительным.

В настоящей работе рассматривается задача фильтрации в деформируемом слое грунта мощности  $T$ . Поместим начало координат на верхней поверхности слоя (плоскость  $z=0$ ). Нижняя поверхность слоя грунта (плоскость  $z=T$ ) водонепроницаемая. При  $t=0$  на верхней поверхности слоя грунта прилагается равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $\phi$ , под действием которой начинается неустановившаяся фильтрация и напряжение постепенно передается на скелет грунта.

Рассмотрим следующее уравнение (1):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{(\gamma - \gamma_s)k}{\gamma(1 - e_{sp})} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{(1 + e_{sp})k}{\gamma a} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{(\gamma - \gamma_s)k}{\gamma(1 + e_{sp})} \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0(t)} - \frac{\gamma^2 e_{sp} + \gamma_s}{\gamma(1 + e_{sp})} s'(t).$$

Учитывая, что  $s'(t) = k \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0(t)}$ , следующего из равенства

$$\int_0^t k \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0(t)} dt = s(t), \text{ из данного уравнения получаем}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - a^* \frac{\partial H}{\partial z} = a^* \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - s'(t); \quad (1)$$

где

$$a^* = \frac{(\gamma - \gamma_s)k}{\gamma(1 - e_{sp})}; \quad a^* = \frac{(1 + e_{sp})k}{\gamma a};$$

$H = H(z; t)$  — искомый напор;  $\epsilon_{cp}$  — осредненный коэффициент пористости грунта;  $\bar{a}$  — коэффициент уплотнения грунта;  $\gamma$  — объемный вес воды;  $\gamma_s$  — удельный вес скелета грунта;  $k$  — коэффициент фильтрации;  $s(t)$  — осадка слоя грунта в момент времени  $t$ ;  $s'(t)$  — скорость осадки.

Ниже рассматривается задача о нахождении неизвестной функции  $H(z; t)$ , удовлетворяющей уравнению (1) и условиям

$$H(z; 0) = \frac{q}{\gamma} = H_0, \quad H|_{z=s_{cp}}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=\tau} = 0, \quad (2)$$

где  $s_{cp}$  — осредненное выражение осадки.

Введем новую функцию  $\bar{H}(z; t) = H(z; t) + s(t)$ , для которой имеем задачу (3), (4):

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = a_0^* \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} + a^* \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где

$$H(z; 0) = H_0; \quad \bar{H}|_{z=s_{cp}} = 2s_{cp}; \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} \Big|_{z=\tau} = 0. \quad (4)$$

С помощью преобразования  $H = h(z; t) \exp\left(-\frac{a}{2} z\right)$ , где  $a = \frac{a_0^*}{a^*}$  из (3), (4) получим

$$\frac{1}{a^*} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{a^2}{4} h, \quad (5)$$

$$h(z; 0) = H_0 \exp\left(\frac{a}{2} z\right), \quad h|_{z=s_{cp}} = 2s_{cp} \exp\left(\frac{a}{2} s_{cp}\right),$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{a}{2} h\right) \Big|_{z=\tau} = 0. \quad (6)$$

К задаче (5), (6) применяем преобразование Лапласа по  $t$ , полагая

$$\bar{h} = \int_0^\infty h(z; t) \exp(-pt) dt,$$

$$\frac{d^2 \bar{h}}{dz^2} - \frac{(\alpha + p)}{a^*} \bar{h} = -\frac{H_0}{a^*} \exp\left(\frac{a}{2} z\right). \quad (7)$$

$$\bar{h}|_{z=s_{cp}} = \frac{2}{p} s_{cp} \exp\left(\frac{a}{2} s_{cp}\right), \quad \left(\frac{d\bar{h}}{dz} - \frac{a}{2} \bar{h}\right) \Big|_{z=\tau} = 0, \quad (8)$$

где  $\alpha = \frac{1}{4} a^1 a^2$ .

Решение задачи (7), (8) найдено методом неопределенных коэффициентов. Оно имеет вид

$$\bar{h} = \frac{H_0}{p} \exp\left(\frac{a}{2}z\right) + \frac{H_0 R}{\Delta} \left[ \sqrt{\frac{x+p}{a^*}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-z) - \frac{a}{2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-z) \right], \quad (9)$$

где

$$R = \frac{2s_{cp} - H_0}{H_0 p} \exp\left(\frac{a}{2}s_{cp}\right),$$

$$\Delta = \left[ \sqrt{\frac{x+p}{a^*}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-s_{cp}) - \frac{a}{2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-s_{cp}) \right].$$

Представим решение (9) в виде отношения обобщенных полиномов относительно  $p$

$$\bar{h} = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= (2s_{cp} - H_0) \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-z) - \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a^*}{x+p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-z) \right] \exp\left(\frac{a}{2}s_{cp}\right) + \\ &+ \Delta H_0 \sqrt{\frac{a^*}{x+p}} \exp\left(\frac{a}{2}z\right), \\ \Psi(p) &= \Delta p \sqrt{\frac{a^*}{x+p}}. \end{aligned}$$

Для функции  $\bar{h}$  все условия теоремы обращения выполнены, поэтому

$$h = L^{-1} \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi(p_n)} \exp(p_n t),$$

где  $p_n$  — корни уравнения  $\Psi(p) = 0$ . Корни функции  $\Psi(p)$  суть  $p = 0$  и  $p_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} i \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}(T-s_{cp}) = \frac{2}{a} i \sqrt{\frac{x+p}{a^*}}.$$

Если обозначить  $i \sqrt{\frac{x+p_n}{a^*}}(T-s_{cp}) = \gamma_n$ , то  $p_n = -x -$

$\frac{a^*}{(T-s_{cp})^2} \gamma_n^2$ , где  $\gamma_n$  — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2}{a} \gamma. \quad (10)$$

После некоторых вычислений и преобразований с учетом характеристического уравнения получим

$$h = 2s_{cp} \exp\left(\frac{a}{2} z\right) + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{a(T-s_{cp})^2 + a^2 \mu_n^2} \times \\ \times \frac{\frac{a}{2}(T-s_{cp}) \sin \frac{\mu_n(T-z)}{T-s_{cp}} - \mu_n \cos \frac{\mu_n(T-z)}{T-s_{cp}}}{[2a(T-s_{cp}) - a^2(T-s_{cp})^2 - 4\mu_n^2] \cos \mu_n} \times \\ \times \exp\left[-a - \frac{a^2 \mu_n^2}{(T-s_{cp})^2}\right] t,$$

где  $M = 4a_0^2(H_0 - 2s_{cp})(T - s_{cp}) \exp\left(\frac{a}{2} s_{cp}\right)$ .

Приведем решение первоначальной задачи (1), (2):

$$H(z; t) = s(t) + 2s_{cp} + M \exp\left(-\frac{a}{2} z\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{a(T-s_{cp})^2 + a^2 \mu_n^2} \times \\ \times \frac{\frac{a}{2}(T-s_{cp}) \sin \frac{\mu_n(T-z)}{T-s_{cp}} - \mu_n \cos \frac{\mu_n(T-z)}{T-s_{cp}}}{[2a(T-s_{cp}) - a^2(T-s_{cp})^2 - 4\mu_n^2] \cos \mu_n} \times \\ \times \exp\left[-at - \frac{a^2 \mu_n^2 t}{(T-s_{cp})^2}\right]. \quad (11)$$

Сумма первых двух слагаемых выражения (11) представляет асимптотическое решение задачи для больших значений времени, когда практически завершен процесс неустановившейся фильтрации и тем самым завершена деформация слоя грунта. Ряд в (11) быстро сходящийся, поэтому для практики достаточно удовлетвориться первыми несколькими членами ряда. С этой целью ниже в таблице приводятся значения первых семи корней уравнения (10) для достаточно обширных значений безразмерной величины  $\lambda = \frac{2}{a(T-s_{cp})}$ .

Корни трансцендентного уравнения (10) можно найти графически, а если требуется большая точность — численными методами на ЭВМ. Заметим, что корни уравнения (10) возрастают с возрастанием индекса  $i$ , т. е.  $\mu_{i+1} > \mu_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) и для достаточно больших  $N$  имеем  $\mu_{N+1} - \mu_N \approx \pi$ .

В решение (11) входит неизвестная функция осадки  $s(t)$ . Ее можно заменить средней величиной  $s_{cp}$ , как это было сделано раньше при рассмотрении граничных условий задачи. В тех случаях, когда такое осреднение считается грубым, можно определить осадку слоя  $s(t)$  и подставить в (11).

Найдем осадку  $s(t)$  по формуле

$$s(t) = k \int_0^L \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} dt.$$

После несложных преобразований имеем:

$$s(t) = -\delta k (H_0 - 2s_{cp})(T - s_{cp}) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2 \left[ 1 - \exp\left(-\alpha t - \frac{\alpha^* u_n^2 t}{(T - s_{cp})^2}\right) \right]}{[4\alpha_n^2 - 2\alpha(T - s_{cp}) + \alpha^*(T - s_{cp})^2][\alpha(T - s_{cp})^2 + \alpha^* u_n^2]} \quad (12)$$

Таблица

$\delta$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$
0,1	0	3,1761	6,8862	10,2211	13,4996	16,7403	19,9558
0,2	0	3,7902	7,2502	10,5531	13,4996	16,7403	20,1774
0,3	0	4,0220	7,4324	10,6934	13,9019	17,0361	20,2573
0,4	0	4,1726	7,5336	10,7674	13,9600	17,1339	20,2978
0,5	0	4,2717	7,5966	10,8127	13,9952	17,1628	20,3223
0,6	0	4,3462	7,6392	10,8430	14,0189	17,1821	20,3386
0,7	0	4,3983	7,6698	10,8648	14,0357	17,1959	20,3503
0,8	0	4,4378	7,6929	10,8812	14,0484	17,2062	20,3950
0,9	0	4,4687	7,7109	10,8939	14,0593	17,2143	20,3659
1	0	4,4924	7,7253	10,9011	14,0662	17,2208	20,3713
1,5	0,9674	4,5675	7,7634	10,9347	14,0809	17,2401	20,3877
2	1,1656	4,6042	7,7900	10,9499	14,1017	17,2498	20,3958
2,5	1,2644	4,6281	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556	20,4008
3	1,3242	4,6407	7,8113	10,9652	14,1136	17,2595	20,4040
3,5	1,3644	4,6510	7,8175	10,9695	14,1169	17,2622	20,4064
4	1,3932	4,6588	7,8203	10,9728	14,1195	17,2643	20,4081
10	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730	20,4155
30	1,5493	4,7053	7,8497	10,9926	14,1348	17,2768	20,4187
50	1,5580	4,7081	7,8514	10,9938	14,1358	17,2776	20,4194
70	1,5617	4,7099	7,8522	10,9943	14,1362	17,2779	20,4197
100	1,5644	4,7103	7,8527	10,9947	14,1365	17,2782	20,4199

Таким образом, решение поставленной задачи дается формулой (11), в которой функция  $s(t)$  определяется по выражению (12).

В заключение отметим, что из полученных решений при  $s_{cp}=0$  следуют решения для задачи с дополнительными условиями:

$$H(z; 0) = H_0, \quad H|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad (13)$$

соответствующие наличию дренажа на верхнем основании слоя грунта и водоупора на нижнем основании слоя. В этом случае, например, решение (11) будет

$$H(z; t) = -s(t) + M_0 \exp\left(-\frac{a}{2}z\right) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \left[ \frac{a}{2}T \sin \frac{\mu_n(T-z)}{T} - \mu_n \cos \frac{\mu_n(T-z)}{T} \right]}{(2aT - a^2T^2 - 4\mu_n^2) \cos \mu_n(aT^2 + a^2\mu_n^2)} \times \\ \times \exp\left(-at - \frac{a^2\mu_n^2 t}{T^2}\right),$$

где  $M_0 = 4a_n^2 H_0 T$ ,  $\mu_n$  — корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = \frac{2}{aT} \mu$ .

Формула осадки слоя грунта в момент времени  $t$  (12) переходит в следующую формулу:

$$s(t) = -s_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\mu_n^2 \left[ 1 - \exp\left(-at - \frac{a^2\mu_n^2 t}{T^2}\right) \right]}{(4\mu_n^2 - 2aT + a^2T^2) \left[ \left(\frac{aT}{2}\right)^2 + \mu_n^2 \right]},$$

где  $s_{\infty} = \frac{\bar{a} q T}{1 + e_{\sigma}}$  — конечный осадок слоя грунта.

Условия (13) в настоящее время применяются при решении задач фильтрации в деформируемых грунтах.

ГрНМ им. К. Маркса

29. III. 1986

Պ. Մ. ԲԱՐՈՒԳՅԱՆ

ՍԾԱՆՑՈՒՄԸ ՍԵՂՄԵԼԻ ԲՆԱՀՈՂՆԵՐՈՒՄ ՇԵՐՏԻ ԵԶՐԻ ՎՐԱ  
ԲԱՄՎԱՍ ԶՐԻ ԳԱՆԱԿԻ ՀԱՆՇՎԱՌՄԱՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. Վ.

Զրահագեցած սեղմելի հողաշերտի արտաքին եզրի վրա ազդող ուժի շնորհիվ կոտարվում է ջրի ծծանցումը ներկայումս ծծանցման սարքեր խրնդիբներ դիտարկելիս հաշվի չի առնվում բնահողի ծակոտկեններից ազատված ջրի քանակի ազդեցությունը ծծանցման ընթացքի վրա: Մինչդեռ, հասկացիմ ուժեղ սեղմելի բնահողերի համար այդ հանգամանքի հաշվի առնելը անի որոշակի նշանակություն: Աշխատանքում տրվում է ծծանցման հավասարման լուծումը, որը հաշվի է առնում բնահողի դեֆորմացիան և ծծանցման ընթացքում բնահողի փուլերի միջև հարաբերության փոփոխությունը: Մի եզրային խնդրի լուծման մեջ հաշվի է առնվում ծծանցման ընթացքում բամբակի հեղուկի քանակության ազդեցությունը: Կանխված է բնահողի շերտի նրստվածքը ժամանակի ցանկացած պահին:

Э. А. ДЖАНГУЛЯН

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ РОТОРНЫХ И ЦЕПНЫХ РАБОЧИХ ОБОРУДОВАНИИ ТРАНШЕЙНЫХ ЭКСКАВАТОРОВ

Рабочим оборудованием роторных экскаваторов является ротор, по периметру которого жестко прикреплены ковши или скребки.

Толщина снимаемой роторным рабочим оборудованием грунтовой стружки переменная, она непрерывно увеличивается в процессе копания, а сама стружка имеет серповидную форму.

Объем грунтовой стружки  $V$ , снимаемой одним ковшом или скребком (рис. 1), равен

$$V = \delta' b R (1 - \cos \varphi_1),$$

где  $\delta'$  — минимальная толщина, соответствующая полному углу  $\varphi_1$  поворота ротора;  $b$  — ширина снимаемой стружки.

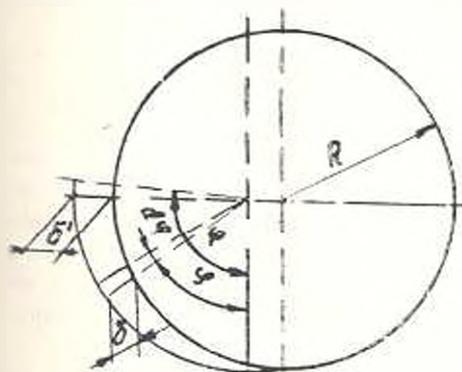


Рис. 1.

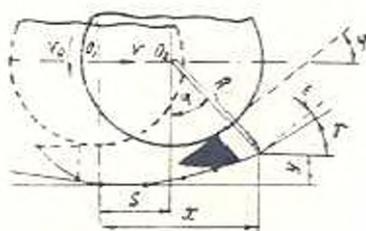


Рис. 2.

Режущие кромки роторного рабочего оборудования в процессе рытья траншей совершают сложное движение: прещательное  $V_0$  совместно с ротором и поступательное  $V_1$  — с экскаватором. Согласно принятым на схеме обозначениям (рис. 2), траектория режущей кромки будет [1]

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{R \sin \varphi}{k + R \cos \varphi},$$

где  $k = \frac{v_1 R}{v_0}$ .