Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLI, № 4, 1988

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

А. М. АЛОЯН

СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СООРУЖЕНИЯ ТИПА КРУГОВОЙ КОНСОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматриваются колебания круговой цилиндрической оболочки, одним концом жестко заделанной и другим—свободным, подвергающейся горизонтальным сейсмическим нагрузкам (рис.). Считается, что основание совершает только горизонтальные колебания по закону $y_0(t)$.

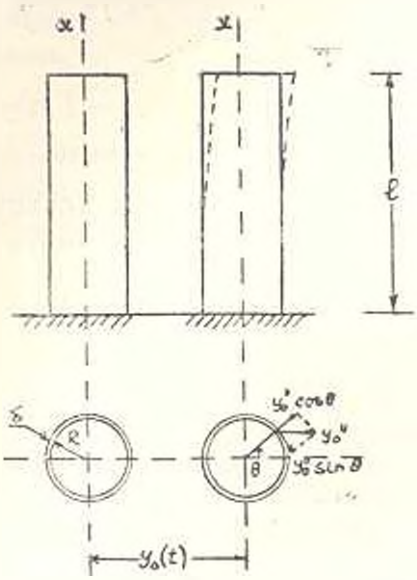

Рис.

Система уравнений колебания оболочки имеет вид [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1-\nu}{2R^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \dfrac{1+\nu}{2R}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta} + \dfrac{\nu}{R}\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{1-\nu^2}{E\delta}X, \\ \dfrac{1+\nu}{2R}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta} + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial w}{\partial\theta} = -\dfrac{1-\nu^2}{E\delta}Y, \\ \nu\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} + \dfrac{\delta^2 R}{12}\nabla^4 w + \dfrac{w}{R} = \dfrac{1-\nu^2}{E\delta}RZ, \end{cases} \qquad (1)$$

где X, Y, Z—компоненты внешней нагрузки;

$$X = 0; \quad Y = \frac{\gamma\delta}{g}y_0^{\cdot\cdot}(t)\sin\theta; \quad Z = -\frac{\gamma\delta}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma\delta}{g}y_0^{\cdot\cdot}(t)\cos\theta;$$

$\ddot{y}_0(t)$ — ускорение основания.

Из первых двух уравнений системы (1) выражая u, v через w и подставляя в третье уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения оболочки

$$\frac{\delta^2 R}{12}\nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{R}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\gamma R(1-\nu^2)}{Eg}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^4 w = -\frac{2\gamma(1-\nu^2)}{EgR^3}\ddot{y}_0(t)\cos\theta. \quad (2)$$

Решение $w(x, \theta, t)$ уравнения (2) представим в виде

$$w(x, \theta, t) = \cos\theta \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) f_i(t), \quad (3)$$

где

$$X_i(x) = \sin\mu_i\frac{x}{l} - \operatorname{sh}\mu_i\frac{x}{l} - \frac{\sin\mu_i + \operatorname{sh}\mu_i}{\cos\mu_i + \operatorname{ch}\mu_i}\left(\cos\mu_i\frac{x}{l} - \operatorname{ch}\mu_i\frac{x}{l}\right),$$

а балочные фундаментальные функции А. Н. Крылова удовлетворяют следующие краевые условия [2]:

$$X_i(0) = X_i''(0) = X_i'(l) = X_i'''(l) = 0;$$

$$\mu_1 = 1{,}875; \quad \mu_2 = 4{,}694; \quad \mu_i = \frac{2i-1}{2}\pi, \quad \text{при } i > 2.$$

Пользуясь методом Б. Г. Галеркина и учитывая ортогональность балочных функций А. Н. Крылова, получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений для определения $f_i(t)$

$$a_j\ddot{f}_j(t) + b_j f_j(t) + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\ddot{f}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_{ij} f_i(t) = e_j\ddot{y}_0(t), \quad (4)$$

где

$$a_j = \frac{\gamma R(1-\nu^2)}{Eg}\left[\left(\frac{\mu_j}{l}\right)^4 + \frac{1}{R^4}\right]\int_0^l X_j^2(x)\,dx,$$

$$b_j = \left[\frac{\delta^2 R}{12}\left\{\left(\frac{\mu_j}{l}\right)^8 + \frac{6}{R^4}\left(\frac{\mu_j}{l}\right)^4 + \frac{1}{R^8}\right\} + \frac{1-\nu^2}{R}\left(\frac{\mu_j}{l}\right)^4\right]\int_0^l X_j^2(x)\,dx,$$

$$a_{ij} = -\frac{2\gamma(1-\nu^2)}{EgR}\int_0^l X_i''(x)\,X_j(x)\,dx,$$

$$b_{ij} = -\frac{\delta^2}{3R}\left[\left(\frac{\mu_i}{l}\right)^4 + \frac{1}{R^4}\right]\int_0^l X_i''(x)\,X_j(x)\,dx,$$

$$e_j = -\frac{2\gamma(1-\nu^2)}{EgR^3}\int_0^l X_j(x)\,dx.$$

Для описания закона колебаний почвы при землетрясении Дж. Сноудоном предложена следующая формула [3]:

$$y_0^{\cdot}(t) = y_{0\max}^{\cdot} \frac{\Gamma^2}{4} \chi^2 t^2 e^{-\chi t}, \tag{5}$$

где χ — характеристика продолжительности.

Если довольствоваться вторым приближением, общее решение (4) будет

$$f_1(t) = A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) + e^{-\chi t}(h_1 t^2 + m_1 t + n_1),$$
$$f_2(t) = i' A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + i'' A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) + e^{-\chi t}(h_2 t^2 + m_2 t + n_2), \tag{6}$$

где p_1, p_2 — собственные частоты колебаний оболочки. Значения h_1, m_1, n_1, h_2, m_2, n_2, i', i'' определяются из (4), а произвольные постоянные A_1, A_2, α_1, α_2 должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись начальные условия: $w(x; \theta; 0) = 0$, $w_t^{\cdot}(x; \theta; 0) = 0$, откуда следует, что

$$f_1(0) = f_1^{\cdot}(0) = f_2(0) = f_2^{\cdot}(0) = 0.$$

Радиальное перемещение точек срединной поверхности оболочки во втором приближении будет

$$w(x; \theta; t) = X_1(x) f_1(t) \cos\theta + X_2(x) f_2(t) \cos\theta. \tag{7}$$

Из первых двух уравнений системы (1), выражая значения u, v через w, получаем

$$\nabla^4 u = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = F_1(x; t), \tag{8}$$

$$\nabla^4 v = \frac{\nu(1+\nu) - 2}{R^2(1-\nu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} +$$
$$+ \frac{\gamma(1-\nu^2)}{EgR^2} y_0^{\cdot}(t) \sin\theta = F_2(x; t). \tag{9}$$

Решения уравнений (8) и (9) имеют вид

$$u = \left[c_1 e^{\frac{x}{R}} + c_2 x e^{\frac{x}{R}} + c_3 e^{-\frac{x}{R}} + c_4 x e^{-\frac{x}{R}} + \right.$$
$$\left. + \frac{R^3}{2} \int_0^x F_1(y, t) \left(\frac{x-y}{R} \operatorname{ch} \frac{x-y}{R} - \operatorname{sh} \frac{x-y}{R} \right) dy \right] \cos\theta, \tag{10}$$

$$v = \left[-c_1 e^{\frac{x}{R}} - \frac{4}{1+\nu} c_2 x e^{\frac{x}{R}} + c_3 e^{-\frac{x}{R}} - \frac{4}{1+\nu} c_4 x e^{-\frac{x}{R}} + \right.$$
$$\left. + \frac{R^3}{2} \int_0^x F_2(y, t) \left(\frac{x-y}{R} \operatorname{ch} \frac{x-y}{R} - \operatorname{sh} \frac{x-y}{R} \right) dy \right] \sin\theta, \tag{11}$$

а постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 определяются из граничных условий: при $x = 0$, $u = v = 0$; $x = l$, $T_1 = S = 0$, где

$$T_1 = \frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)\right],$$

$$S = \frac{E\delta}{2(1+\nu)}\varepsilon = \frac{E\delta}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Когда известны все три компоненты перемещений, можно найти внутренние усилия и определить напряжения в оболочке.

Расчеты, выполненные для оболочки с размерами $R = 2{,}5$ *м*, $l = 50$ *м*, $\delta = 0{,}2$ *м* и параметрами $\nu = 0{,}2$ (бетон), $\gamma = 2200$ *кг/м*^{3}, $E = 29000$ *МПа* при $t = 0{,}1$ *с*, дали следующие результаты: частоты свободных колебаний во втором приближении: $p_1 = 36{,}1\ c^{-1}$, $p_2 = 84{,}3\ c^{-1}$, а в первом приближении: $p_1 = 36{,}13\ c^{-1}$.

Перемещение на свободном конце в радиальном направлении: I приближение—$w = -2{,}1$ *мм*; II приближение—$w = -1{,}9$ *мм*. Максимальные значения напряжений на высоте $l = 50$*м* и $x = 40$ *м*: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_1 = -23{,}2$ *МПа*, $\tau = 0$; $\sigma_1 = -3{,}7$ *МПа*, $\sigma_2 = -18{,}3$ *МПа*, $\tau = 2{,}4$ *МПа*. Максимальные значения усилий моментной группы при $x = 0$: $M_1 = -0{,}63$ *Нм*, $M_2 = -0{,}13$ *Нм*, $H = 0$.

Расчетные данные оболочки соответствуют данным ядра жесткости шестнадцатиэтажных зданий, осуществляемых методом подъема этажей. Результаты расчетов можно использовать при расчетах и проектировании цилиндрических силосов, градирн, резервуаров и др.

ЕрПИ им. К. Маркса

30. VIII. 1986

Հ. Մ. ԱԼՈՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՇԱՐԺԱԿԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԿՈՆՍՈԼԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍԱԿԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Դիտարկված են մի ծայրով ամրակցված շրջանային գլանային թաղանթի տատանումները, որոնք առաջանում են երկրաշարժի ազդեցություններից, ընդ որում դիտարկված են հիմքի միայն հորիզոնական տատանումները։ Թաղանթի տատանման դիֆերենցիալ հավասարումը լուծվում է Ֆ. Գալյորկինի մեթոդով։ Գտնված են գլանային թաղանթի տատանման սեփական հաճախությունները, սեղափոխումների երեք բաղադրիչները, հիգերը և լարումները։ Լուծված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек.—М.: Наука, 1972.—432 с.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний.—М.: Гостехиздат, 1958.—628 с.
3. *Хачиян Э. Е., Амбарцумян В. А.* Динамические модели сооружений и теория сейсмостойкости.—М.: Наука, 1981.—203 с.