С. С. ДАРВИНЯН

К ПРОБЛЕМЕ УЧЕТА СИЛ ВНУТРЕННЕГО
СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

Известно, что колебания системы с одной степенью свободы при сейсмическом воздействии $y_0(t)$, когда внутреннее трение представляется гипотезой Фохта, описывается уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = - \frac{d^2 y_0}{dt^2}$$

Рассмотрим реологическую модель с комплексным вязким сопротивлением. Уравнение движения в таком предположении запишется следующим образом:

$$\frac{d^2 y^*}{dt^2} + 2n_0 e^{i\beta} \frac{dy^*}{dt} + \omega^2 y^* = - \frac{d^2 y_0^*}{dt^2}, \quad (1)$$

где y^* и y_0^* — комплексное смещение системы почвы; n_0 — коэффициент сопротивления; β — фазовый угол.

Пусть внешнее воздействие меняется по гармоническому закону:

$$y_0^* = A^* e^{i p t} = (A_1 + i A_2) e^{i p t} = A_1 e^{i p t}; \quad (2)$$

$$y^* = B^* e^{i p t} = (B_1 + i B_2) e^{i p t}.$$

Совместно решая (2) и (1), получаем:

$$B^* = \frac{p^2 A^*}{\omega^2 - p^2 + 2i n_0 p e^{i\beta}}, \quad (3)$$

а после некоторых преобразований знаменателя (3):

$$B^* = \frac{p^2 (\omega^2 - p^2 - 2n_0 p \sin \beta - 2in_0 p \cos \beta) A_1}{(\omega^2 - p^2 - 2n_0 p \sin \beta)^2 + 4n_0^2 p^2 \cos^2 \beta}. \quad (4)$$

Учитывая, что $B^* = B_1 + i B_2$ и обозначив $\gamma = \frac{\omega}{p}$, получим:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\gamma^2 - 1 - \frac{2n_0}{p} \sin \beta}{\left(\gamma^2 - 1 - \frac{2n_0}{p} \sin \beta\right)^2 + \frac{4n_0^2}{p^2} \cos^2 \beta}. \quad (5)$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{\frac{2n_0}{p} \cos \beta}{\left(\gamma^2 - 1 - \frac{2n_0}{p} \sin \beta\right)^2 + \frac{4n_0^2}{p^2} \cos^2 \beta}.$$

Определим действительные части внешней и упругой сил, а также сил сопротивления на единицу массы. Нетрудно найти, что

$$P = \operatorname{Re} \left(-\frac{d^2 y^*}{dt^2} - \frac{d^2 y_0^*}{dt^2} \right) = A_1 p^2 \left[\left(1 + \frac{B_1}{A_1} \right) \cos pt - \frac{B_2}{A_1} \sin pt \right],$$

$$Q = \operatorname{Re} \left(\omega^2 y^* \right) = A_1 \omega^2 \left(\frac{B_1}{A_1} \cos pt - \frac{B_2}{A_1} \sin pt \right), \quad (6)$$

$$R = \operatorname{Re} \left(2n_0 e^{i\beta} \frac{dy^*}{dt} \right) = -A_1 2n_0 p \left[\frac{B_1}{A_1} \sin (pt + \beta) + \frac{B_2}{A_1} \cos (pt + \beta) \right].$$

где отношения $\frac{B_1}{A_1}$ и $\frac{B_2}{A_1}$ определяются по формулам (5).

На основании (6) отношение внешней силы к упругой будет равно

$$k = \frac{P}{Q} = \frac{p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{A_2 \cos pt}{B_1 \cos pt - B_2 \sin pt} \right). \quad (7)$$

Подставляя в (7) значения B_1 и B_2 из (5), после некоторых преобразований получаем:

$$k = 1 + \frac{\frac{2n_0}{p} \left[(1 - \gamma^2) \sin \beta + \frac{2n_0}{p} \right] \cos pt + \frac{2n_0}{p} (1 - \gamma^2) \cos \beta \sin pt}{\gamma^2 \left(\gamma^2 - 1 - \frac{2n_0}{p} \sin \beta \right) \cos pt + \frac{2n_0}{p} \cos \beta \sin pt}. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что максимальное значение k не зависит от t , поэтому исследуем изменение k в момент $t = 0$. Принимая $t = 0$, из (8) получаем:

$$k|_{t=0} = k_0 = 1 + \frac{\frac{2n_0}{p} \left[\frac{2n_0}{p} + (1 - \gamma^2) \sin \beta \right]}{\gamma^2 \left(\gamma^2 - 1 - \frac{2n_0}{p} \sin \beta \right)}. \quad (9)$$

Если $k_0 > 1$, это означает, что динамическая сопротивляемость системы увеличивается. Из (9) видно, что вне зоны резонанса k_0 свое максимальное значение получает при $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$. При этом, когда

$\beta = \frac{\pi}{2}$, из (9) имеем:

$$k_0 = 1 - \frac{2n_0}{p\gamma^2} < 1.$$

Однако наибольший интерес представляет случай, когда $k_0 > 1$, поэтому берем значение $\beta = -\frac{\pi}{2}$. Тогда из (9):

$$(k_0)_{\max} = 1 + \frac{2n_0}{p\gamma^2}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что максимальное значение отношения внешней силы к упругой может уменьшаться или увеличиваться в зависимости от γ , т. е. от отношения частот собственных и вынужденных колебаний, и чем больше частота вынужденных колебаний, тем больше сопротивляемость системы.

При $\beta = 0$, т. е. принимая гипотезу Фохта [1], из (9) получаем:

$$\bar{k}_0 = 1 + \frac{4n_0^2}{p^2\gamma^2(\gamma^2 - 1)}. \quad (11)$$

Определим изменение отношения внешней силы к упругому в процентах при разных гипотезах. На основании (9) и (11):

$$\theta_0 = \frac{k_0 - \bar{k}_0}{k_0} = \frac{\frac{2n_0}{p} \left[\frac{4n_0^2}{p^2} - (\gamma^2 - 1)^2 \right] \sin \beta}{(\gamma^2 - 1) \left[\frac{4n_0^2}{p^2} + \gamma^2(\gamma^2 - 1) + \frac{2n_0}{p} (1 - 2\gamma^2) \sin \beta \right]}. \quad (12)$$

При $\beta = -\frac{\pi}{2}$:

$$\theta_0 = \frac{\frac{2n_0}{p} \left(\gamma^2 - 1 - \frac{2n_0}{p} \right)}{(\gamma^2 - 1) \left(\gamma^2 + \frac{2n_0}{p} \right)}. \quad (13)$$

Принимая $2n_0 = \omega\alpha$, где α — коэффициент затухания, получаем:

$$\theta_0 = \frac{\alpha(\gamma^2 - \gamma\alpha - 1)}{(\gamma^2 - 1)(\gamma + \alpha)}. \quad (14)$$

Анализ выражения (12) показывает, что в зависимости от γ и β во многих случаях предложенная реологическая модель дает заметное увеличение отношения внешних и упругих сил по сравнению с обычно принятыми результатами. Так, например, при $\beta = -\frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0,1$, $\alpha = 0,1$ из (14) получается $\theta_0 = 0,5$, т. е. указанное увеличение составляет 50%.

Таким образом, предложенная модель в комплексной форме позволяет подходить к решению задачи повышения динамической сопротивляемости конструкций при колебаниях, часто имевших место в действительности.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Назиров А. Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. — Ереван: Изд-во АИ АрмССР, 1959. — 162 с.