Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XL, № 3, 1987

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

А. М. АДОНЦ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ТРАССИРОВКИ В ЗАДАННОМ ОБЪЕМЕ

В работе предлагаются математические модели и вычислительные методы, позволяющие с помощью ЭВМ находить пространственные структуры трассировки жгута в заданном объеме.

Модель 1. Найти незамкнутые пути (трассировки жгута длины l_0), выходящие из заданных точек и заканчивающиеся в заданных точках и проходящие через узловые точки один и только один раз (положение узловых точек определяется предметами, вмонтированными в объем), имеющие протяженность $L \leqslant l^0$, кроме того $l^0 - L \leqslant a^0$, где $0 \leqslant a^0 \leqslant \min_{i,j} a_{ij}$; $(l^0 - L)$ — экономия материала; a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j. Поставленная таким образом задача на данном множестве точек может быть и неразрешима. Решение начинается с проверки корректности множества точек. Затем строятся замкнутые пути, проходящие через те же точки и имеющие длину

$$a = l^0 + \min_{i,j} a_{ij} \leqslant l \leqslant l^0 + \max_{i,j} a_{ij} = b.$$

Тогда, отбрасывая часть замкнутого пути длины $(l - l^0)$ на участке i, j — который определяется неравенством

$$\min_{i,j} a_{ij} \geqslant a_{ij} - (l - l^0) > 0 \tag{1}$$

(число выделяемых участков может быть не единственно), получаем конфигурации трассировок, удовлетворяющие требованиям задачи. Если не найдется ни одного участка i, j, входящего в замкнутый путь, для которого выполняется неравенство (1), то этот путь отбрасывается. Таким образом, поставленная выше задача свелась к задаче, подобной задаче «коммивояжера» [1].

Модель 2. Жгут будем моделировать «ожерельем», состоящим из $(N + 1)$ бусин, связанных N звеньями; в каждой бусине имеется шарнир. Как длины звеньев, так и углы между последовательными звеньями образуют стационарные случайные процессы, которые можно считать марковскими. В соответствии с законом больших чисел, суммарная длина, т. е. сумма длин звеньев равна $NE_x + O(\sqrt{N})$, где N — число звеньев, E_x — математическое ожидание длины звена. Расстояние между началом и концом цепи равно $C_1\sqrt{N} + O\sqrt{N}$, где $C_1 = \text{const}$. Ставится задача: смоделировать все возможные трассировки жгута — "ожерелья" в заданном объеме (шар, куб, эллипсоид вращения и т. д.). Следуя закону повторного логарифма, диаметр области, куда укладывается цепь, равен $C_2\sqrt{N \ln \ln N}$, $C_2 = \text{const}$ (2).

Построение всевозможных трассировок в заданном объеме. Все рассматриваемые распределения моделируются методом Монте-Карло, в соответствии с таблицами случайных чисел. Большинство встречающихся распределений можно в первом приближении считать равномерными. В объеме берем любую точку, случайным образом проводим первое звено так, что конец его будет равномерно распределен на сфере. Точку на сфере определяем методом Монте-Карло. Угол между первым и вторым звеньями выбираем в соответствии с условным распределением этого угла в заданном интервале, а угол поворота вокруг оси (по конусу) — в соответствии с функцией распределения, которую в частном случае можно считать равномерной. После каждого шага проверяем расстояние от конца добавленного звена до центра области, используя формулу (2). Процесс построения трассировки жгута в заданном объеме заканчивается после N шагов.

Замечание. Алгоритм построения укладок с вероятностью, близкой к единице, дает искомые трассировки с контролем не выхода из объема, т. е. контролем величины (2).

Модель 3. Искомые конструкции трассировки жгута будем представлять графами и мультиграфами [2], вершины которого расположены в заданных узлах. Причем в каждом из узлов может сходиться от одного до P ребер (как правило, при разработке монтажных схем $P = 4$). Присваиваем каждой вершине графа номера от 1 до N и записываем матрицу смежностей графа: $A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = 1$ (означает наличие), $a_{ij} = 0$ (означает отсутствие) связи между i-ой и j-ой вершинами; $a_{ii} = 0$, т. к. в графе отсутствуют петли.

Переменные a_{ij} можно также считать логическими переменными. С каждой конфигурацией пути можно связать длину, подсчитанную по формуле

$$E_s = \frac{1}{2} S_p(\Sigma A_s),$$

где Σ — матрица длин связей между узлами, A_s — матрица смежностей. Решение задачи трассировки жгута разобьем на четыре этапа:

I. Построить структурные формулы трассировки жгута, когда между узлами возможны только одинарные связи.

II. Построить структурные формулы трассировки жгута, когда между узлами обязательно наличие двойных и тройных связей.

III. Каждую из полученных структурных форм трассировки охарактеризовать параметрами.

IV. Выбрать те трассировки, которые обладают заданными свойствами. Первые два этапа задачи можно сформулировать так: найти все неориентированные, связанные графы и мультиграфы, содержащие n ($n \geqslant 3$) вершин, в каждой из которых сходится от одного до четырых ребер. Задачу можно решить методом логических уравнений [3]. В нашем случае имеем дело с переменными $y_{ij} = 1$ или $y_{ij} = 0$, что означает наличие или отсутствие связи между i-м и j-м узлами. Условия задачи запишутся в виде следующих логических уравнений:

$$\vee\, y_{1k}^{a_{1k}} y_{2k}^{a_{2k}} \dots y_{k-1,k}^{a_{k-1,k}} = 1; \qquad (3)$$

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} \leqslant 4; \quad 1 \leqslant a_i \leqslant 4; \quad \bigwedge_{i,j=1}^{k} y_{ij}^{a_{ij}} = 1,$$

где

$$1 \leqslant a_i = \sum_{l=1}^{i-1} a_{li} + \sum_{m=i+1}^{k} a_{im} \leqslant 4.$$

Эти условия означают, что k-й узел может быть связан не менее, чем с одним и не более, чем с четырьмя узлами из прежних $k-1$ узлов, причем в конфигурациях ни один из узлов не должен быть более, чем четверным. Умножив соотношение, содержащее все решения задачи для $n = k-1$ последовательно на (3), получим совокупность решений задачи для $n = k$.

Графы удобно представлять в виде квадратных симметричных матриц из нулей и единиц. При построении решений для $n = k+1$ надо окаймить всевозможными способами каждую из матриц — решений k-го порядка $(k+1)$-ой строкой и $(k+1)$-ым столбцом, состоящим из нулей и единиц, так, чтобы общее количество единиц в каждом столбце и каждой строке было заключено между единицей и четырьмя. Чтобы осуществить окаймление, строим вектор-строку и вектор столбец, компоненты которых указывают, какие строки и столбцы уже насыщены единицами.

Среди матриц решений, полученных описанным выше способом, будут содержаться такие, которые отвечают одинаковым графам. В общем случае можно получить $n!$ различных матричных изображений одного и того же графа.

Первый способ различия графов. Графу можно сопоставить вектор (a_4, a_3, a_2, a_1). Компоненты вектора указывают соответственно количество четверных, тройных, двойных и одинарных узлов.

Второй способ. Если матрицы A и B соответствуют одному и тому же графу, то с помощью перестановок строк и столбцов матрицы A ее можно превратить в матрицу B. Итак, если Е матрица $\tilde{E}$ такая, что $\tilde{E}^{-1} A \tilde{E} = B$ или $A\tilde{E} = \tilde{E}B$, то матрицы A и B описывают один и тот же граф. Эта задача может быть решена методом математической логики, т. к. элементы матриц A, B, $\tilde{E}$ есть нули и единицы.

Построение мультиграфов. Построить мультиграфы не более, чем с четвертными узлами и не более, чем тройными связями между каждой парой узлов. Для решения этой задачи можно воспользоваться либо логическими уравнениями, либо матрицами, которые будут иметь элементы, равные 0, 1, 2, 3. Отбор матриц, изображающих одинаковые мультиграфы, аналогичен отбору матриц, изображающих одинаковые графы.

В результате решения вышеизложенной задачи предложенными методами получается значительный набор трассировок жгута в заданном объеме. Задача выбора трассировки жгута, которая удовлетворяет заданным требованиям, математически сводится к решению логических уравнений вида:

$$z \xrightarrow[A]{} k,$$

где $z = z(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ — совокупность свойств, которым должна удовлетворять искомая трассировка жгута в заданном объеме; k — искомые трассировки: $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$; A' — матрица.

ЕрПИ им. К. Маркса 27. I. 1986

Ա. Մ. ԱԴՈՆՑ

ՏՐՎԱԾ ԾԱՎԱԼՈՒՄ ՀԵՏԱԳԾՄԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՎ ՄՈԴԵԼԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Օգտվելով գրաֆների տեսության և մաթեմատիկական տրամաբանության ապարատից, մշակված են տրված ծավալում փուլերի հետագծման մեթոդը և մաթեմատիկական մոդելը։ Առաջարկված է մի քանի մոդել։

№ 1 մոդել՝ գտնել չփակված ճանապարհը, որը դուրս է գալիս որոշակի կետից և վերջանում տրված կետում, անցնելով բոլոր հանգուցային կետերով միայն մեկ անգամ։ Տրված պայմանները նման են «շրջիկ գործակալի» խնդրին։

№ 2 մոդել՝ բույլը մոդելավորված է շղթայի ձևով, որը կազմված է N հատվածներից և (N+1) հանգույցներից։ Ամեն մի հանգույց ունի իր հողը։ Հանգույցների երկարությունը և նրանց միջև եղած անկյունները կազմում են կայունացված պատահական պրոցես, որը կարելի է համարել մարկովյան շղթա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику.— М.: Наука, 1975.— 478 с.
2. *Берж К.* Теория графов и ее применения.— М.: ИЛ, 1962.— 320 с.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под общ. ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.— 311 с.